

Bài 1. (2.0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

Bài 2. (1.0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^1 x(x-1)^2 dx$

Bài 3. (1.0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z - 5 = 0$.

1. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).
2. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M và song song với mặt phẳng (P).

Bài 4. (1.0 điểm) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB = 3 \text{ cm}$, $BC' = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

1. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho;
2. Tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và $mp(ACC'A')$.

Bài 5. (1.0 điểm) Giải phương trình $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 6. (1.0 điểm) Với các chữ số của tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, viết được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, trong đó có hai chữ số 1, ba chữ số còn lại khác nhau từng đôi và khác 1.

Bài 7. (1.0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy các điểm $A(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $B(2\sqrt{2}; 0)$ và $C(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. Các đường thẳng (d_1) và (d_2) cùng đi qua gốc tọa độ và hợp với nhau góc 45° . Biết rằng (d_1) cắt đoạn AB tại M và (d_2) cắt đoạn BC tại N. Khi tam giác OMN có diện tích bé nhất, hãy tìm M và viết phương trình các đường thẳng (d_1) và (d_2)

Bài 8. (1.0 điểm) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4xy = 3x^2 - 4y^2 \\ x + y + 4 = 2(2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{xy}) \end{cases}$$

Bài 9. (1.0 điểm) Với các số dương x và y có tổng bé hơn 1.

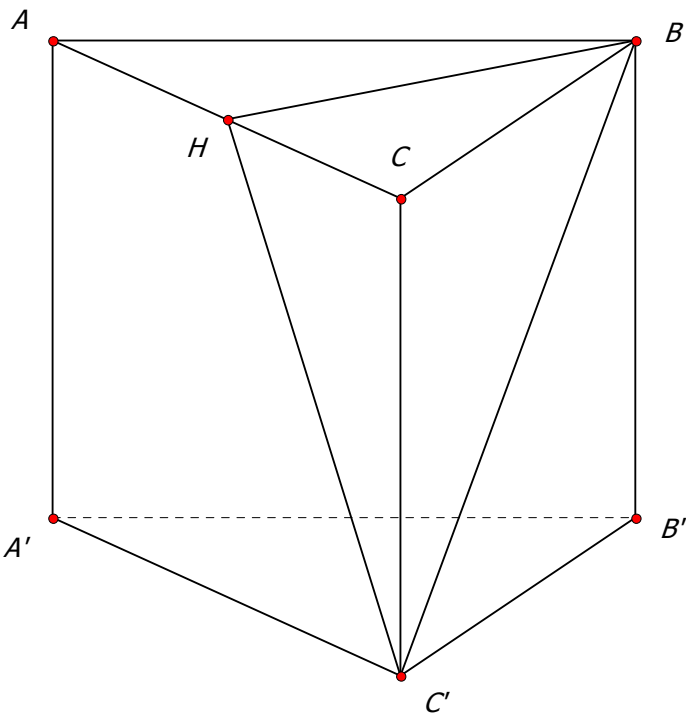
Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{1-x-y} \geq 36$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Đáp án	Điểm												
1	1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.	1,0												
	Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$, suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị	0,25												
	Đạo hàm: $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>$+\infty$</td><td>2</td></tr></table> Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ Hàm số không có cực trị	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	y'	+		+	y	2	$+\infty$	2	0,25
x	$-\infty$	-1	$+\infty$											
y'	+		+											
y	2	$+\infty$	2											
	Đồ thị: $f(x) = \frac{2 \cdot x + 1}{x + 1}$ Với $x = 0$ ta có $y = 1$ Với $x = -2$ ta có $y = 3$	0,5												

	2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.	1,0
	Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Theo giả thiết ta có $y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$	0,5
	Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = x + 1$	0,25
	Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 3$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = x + 5$	0,25
2	Tính tích phân $I = \int_0^1 x(x-1)^2 dx$	1,0
	Ta có $I = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx$	0,25
	$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1$	0,5
	$I = \frac{1}{12}$	0,25
3	1. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là: $d(M, (P)) = \frac{ 1 - 2(-2) + 2 \cdot 3 - 5 }{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$ (đơn vị độ dài)	0,5
	2. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M và song song với mặt phẳng (P).	0,5
	Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Vì $(Q) \parallel (P)$ nên $\vec{n} = (1; -2; 2)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (Q).	0,25
	Phương trình của mặt phẳng (Q) là: $1 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 2) + 2(z - 3) = 0$ Hay $x - 2y + 2z - 11 = 0$	0,25
4	1. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho;	0,5
	Vẽ hình:	0,5

	 Diện tích đáy của khối lăng trụ: $S = \frac{9}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$	
	Chiều cao của khối lăng trụ: $h = CC' = \sqrt{BC'^2 - BC^2} = 3 \text{ (cm)}$	0,25
	Thể tích của khối lăng trụ đã cho: $V = S.h = \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2} \text{ (cm}^3\text{)}$	0,25
	2. Tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và $mp(ACC'A')$.	0,5
	Gọi H là trung điểm của cạnh AC , suy ra HC' là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ACC'A')$.	0,25
	Do đó $(\widehat{BC', (ACC'A')}) = (\widehat{BC', HC'})$	0,25
	Ta có tam giác BHC' vuông tại H , cạnh $BH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$.	0,25
	Ta có $\sin \widehat{HC'B} = \frac{BH}{BC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HC'B} = 30^\circ$. Vậy $(\widehat{BC', (ACC'A')}) = 30^\circ$	0,25
5	Biến đổi phương trình đã cho thành $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \sin\frac{\pi}{4} = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$	0,25đ
	$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin(-x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ $\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$	0,25đ
	Với $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, ta có $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	0,25đ

	Với $\sin(x) = \frac{1}{2}$, ta có $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ Ta có 3 họ nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$	0,25đ
6	Trường hợp trong số tự nhiên có chữ số 0: Có $4.C_4^2.A_4^2 = 288$ số tự nhiên (Có 4 cách đưa số 0 vào các hàng của số tự nhiên, mỗi cách chọn số 0 ta có C_4^2 cách đưa số 1 vào hai hàng của số tự nhiên. Còn lại 2 hàng, có A_4^2 cách chọn 2 chữ số (trong các chữ số 2, 3, 4, 5) để đưa vào).	0,5đ
	Trường hợp trong số tự nhiên không có chữ số 0: Có $C_5^2.A_4^3 = 240$ số tự nhiên. Kết quả có 528 số tự nhiên.	0,5đ
7	Gọi α là góc giữa (d_1) với chiều dương trục hoành, β là góc giữa (d_2) với chiều dương trục hoành, với $\alpha + \beta = 45^\circ$. Ta có $\begin{cases} OM = \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha} \\ ON = \frac{\sqrt{2}}{\cos \beta} \end{cases}$ Như vậy tam giác OMN có diện tích là $S = \frac{1}{2}.OM.ON.\sin 45^\circ$ Hay là $S = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \alpha \cos \beta}$ Hay là $S = \frac{\sqrt{2}}{\cos 45^\circ + \cos(\alpha - \beta)}$	0,25đ
	Tam giác OMN có diện tích bé nhất với điều kiện $\cos(\alpha - \beta) = 1$, tức là $\alpha = \beta$. Và ta có $\alpha = \beta = \frac{\pi}{8}$	0,25đ
	Lúc này (d_1) là phân giác của góc $\widehat{AOB}$, do đó điểm M chia đoạn AB theo tỷ số $k = -\frac{OA}{OB} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ Tọa độ điểm M sẽ là $\begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 2(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$	0,25đ

	Phương trình đường thẳng $(d_1): y = x \tan \frac{\pi}{8}$ hay là $(d_1): y = (\sqrt{2} - 1)x$, Đường thẳng (d_2) đối xứng với (d_1) qua trục hoành nên phương trình đường thẳng $(d_2): y = (-\sqrt{2} + 1)x$.	0,25đ
	Xét hệ phương trình sau $\begin{cases} 3x + 2y + 4xy = 3x^2 - 4y^2 & (*1) \\ x + y + 4 = 2(2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{xy}) & (*2) \end{cases}$. Ta phân tích phương trình $(*1): 3x + 2y + 4xy = 3x^2 - 4y^2$ Trở thành $(3x + 2y)(2y - x + 1) = 0$ Hay là $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$	0,25đ
	Còn phương trình $(*2): x + y + 4 = 2(2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{xy})$ được phân tích thành $(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2)^2 = 0$ Hay là $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0$	0,25đ
	Xét hệ $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$, ta có hệ vô nghiệm	0,25đ
	Xét hệ $\begin{cases} 2y - x + 1 = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} x = 23 - 8\sqrt{7} \\ y = 11 + 4\sqrt{7} \end{cases}$	0,25đ
	Đặt $1 - x - y = z$, ta có $x + y + z = 1$, ta cần chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq 36$.	0,25đ
	Do $x + y + z = 1$, nên ta đặt lại $x = \frac{a}{a+b+c}$, $y = \frac{b}{a+b+c}$ và $z = \frac{c}{a+b+c}$, với a, b và c là các số dương. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{a+b+c}{a} + \frac{4(a+b+c)}{b} + \frac{9(a+b+c)}{c} \geq 36$	0,25đ
	Hay là $1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{4a}{b} + 4 + \frac{4c}{b} + \frac{9a}{c} + \frac{9b}{c} + 9 \geq 36$ Hay là $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{4a}{b} + \frac{4c}{b} + \frac{9a}{c} + \frac{9b}{c} \geq 22$	0,25đ
	Hay là $\left(\frac{b}{a} + \frac{4a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{9a}{c}\right) + \left(\frac{4c}{b} + \frac{9b}{c}\right) \geq 22$ Áp dụng bất đẳng thức Cô - si 3 lần ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra: $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 36$ khi và chỉ khi $\left(\frac{b}{a} + \frac{4a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{9a}{c}\right) + \left(\frac{4c}{b} + \frac{9b}{c}\right) = 22$ Như vậy $\begin{cases} b = 2a \\ c = 3a \end{cases}$. Lúc này $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.	0,25đ