

KHỞI ĐỘNG TRƯỚC KỲ THI QUỐC GIA NĂM 2015

Môn thi: Toán – THPT

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 + 1$ (C)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).
- Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $M(0;1), N, P$ sao cho N là trung điểm của MP .

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $(2\cos x + \sin x - \cos 2x)\cos x = 1 + \sin x$

Câu 3 (1,0 điểm). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \frac{1}{x}$ và đường thẳng $y = -2x + 3$

Câu 4 (1,0 điểm).

- Giải phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$
- Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A , 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C . Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất để trong 4 học sinh được chọn không quá 2 trong 3 lớp trên.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có các đỉnh lần lượt là $A(1;-2;3), B(2;1;0)$ và $C(0;-1;-2)$. Viết phương trình đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , $SA = SB = a$; $SD = a\sqrt{2}$ và mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $AC = 2AB$.

Điểm $M(1;1)$ là trung điểm của BC , N thuộc cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{3}NC$, điểm D thuộc BC sao cho AD đối xứng với AM qua tia phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng DN có phương trình $3x - 2y + 8 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết C thuộc đường thẳng $d: x + y - 7 = 0$.

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = 1 \\ y(\sqrt{xy - 2y^2} + \sqrt{4y^2 - xy}) = 1 \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x^2y + y^2z + z^2x}{x^4 + y^4 + z^4}$$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ QG NĂM 2015

Đề 1 - Ngày thi : 10-10-2014

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu 1 Cho hàm số : $y = -2x^3 + 6x^2 + 1$ (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Tìm các giá trị tham số m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M(0; 1), N, P sao cho N là trung điểm của MP.

Lời giải :

a.

Tập XD: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -6x^2 + 12x$.

$y' = 0 \iff x = 0$ hay $x = 2$ nên $y(0) = 1$ hay $y(2) = 9$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

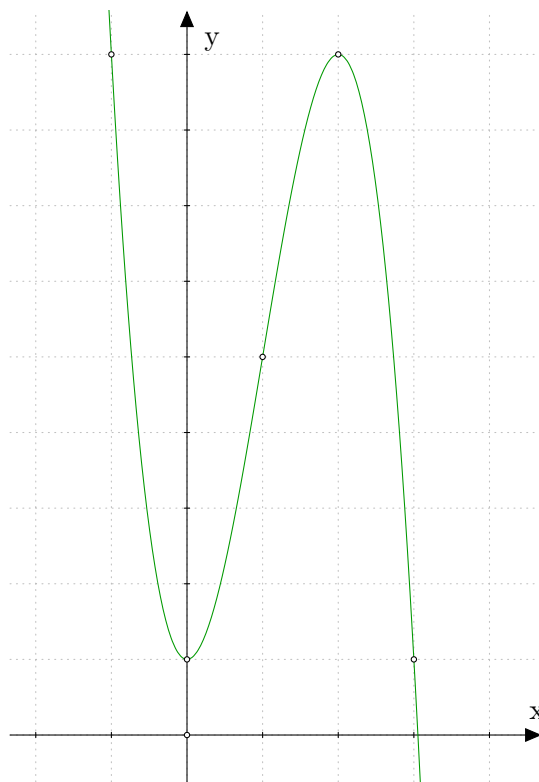
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$		1		9	$-\infty$

Hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng (0; 2)

Hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 + 1$ nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$

Điểm cực đại (2; 9). Điểm cực tiểu (0; 1)

Đồ thị



b. Đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M(0; 1), N, P nếu như phương trình hoành độ giao điểm $-2x^3 + 6x^2 + 1 = mx + 1$ có 3 nghiệm phân biệt tức là $x(2x^2 - 6x + m) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Như thế chỉ cần $2x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 nghĩa là $9 - 2m > 0$ và $m \neq 0$, nên cần $m < \frac{9}{2}$. Giả sử $N(x_1; y_1)$, $P(x_2; y_2)$. N là trung điểm của MP nên $2x_1 = x_2$ và $2y_1 = y_2 + 1$. Ta có x_1, x_2 là nghiệm của $2x^2 - 6x + m = 0$ nên $x_1 + x_2 = 3$ suy ra $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 5$, $y_2 = 9$ và $m = 4$

Câu 2 Giải phương trình: $(2 \cos x + \sin x - \cos 2x) \cos x = 1 + \sin x$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos 2x \cos x + \sin x \cos x - \sin x \iff \cos 2x - \cos 2x \cos x - \sin x + \sin x \cos x$$

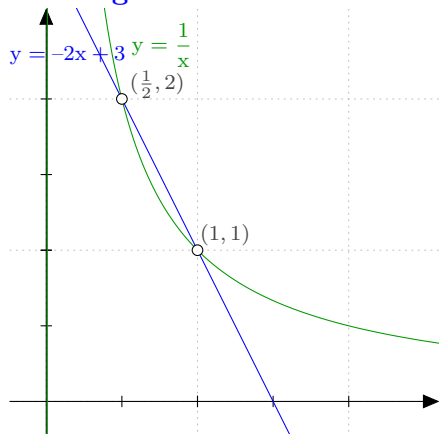
$$\iff \cos 2x (1 - \cos x) - \sin x (1 - \cos x) = 0 \iff (1 - \cos x)(\cos 2x - \sin x) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = \sin x \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = k2\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Câu 3 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \frac{1}{x}$ và đường thẳng $y = -2x + 3$.

Lời giải :



Hoành độ giao điểm đường cong và đường thẳng là nghiệm phương trình $\frac{1}{x} = -2x + 3 \iff x = \frac{1}{2}$ hay $x = 1$

Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| -2x + 3 - \frac{1}{x} \right| dx = \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-2x + 3 - \frac{1}{x} \right) dx \right|$$

$$= \left| \left(-x^2 + 3x - \ln x \right) \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{4} - \ln 2$$

Câu 4

a. Giải phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$

b. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất để trong 4 học sinh được chọn không quá 2 trong 3 lớp trên.

Lời giải :

a. Điều kiện $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có:

$$\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2 \iff 2\log_3(|x-1|) + 2\log_3(2x-1) = 2$$

$$\iff \log_3(|x-1|) + \log_3(2x-1) = 1 \iff \log_3[|x-1|(2x-1)] = 1$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)(2x-1) = 3 \\ (1-x)(2x-1) = 3 \end{cases} \iff x = 2$$

Kết hợp với điều kiện thì nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$

b. Cách 1

Số cách chọn 4 học sinh có trong 12 học sinh là: $C_{12}^4 = 495$ (cách)

Số cách chọn 4 học sinh mà không có học sinh của quá 2 lớp gồm:

TH1: Chỉ có học sinh lớp A: C_5^4 (cách)

TH2: Chỉ có học sinh lớp B: C_4^4 (cách)

TH3: Có học sinh lớp A và có học sinh lớp B: $C_9^4 - C_5^4 - C_4^4$ (cách)

TH4: Có học sinh lớp A và có học sinh lớp C: $C_8^4 - C_5^4$ (cách)

TH5: Có học sinh lớp B và có học sinh lớp C: $C_7^4 - C_4^4$ (cách)

Tóm lại là có: $C_9^4 + C_8^4 + C_7^4 - C_5^4 - C_4^4 = 225$ (cách)

Vậy xác suất cần tính là: $\frac{225}{495} = \frac{5}{11}$

b. Cách 2

Số cách chọn 4 học sinh có trong 12 học sinh là: $C_{12}^4 = 495$ (cách)

Số cách chọn 4 học sinh gồm: Lớp A có 2 hs, lớp B có 1 hs, lớp C có 1 hs. $C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$ (cách)

Số cách chọn 4 học sinh gồm: Lớp A có 1 hs, lớp B có 2 hs, lớp C có 1 hs. $C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1$ (cách)

Số cách chọn 4 học sinh gồm: Lớp A có 1 hs, lớp B có 1 hs, lớp C có 2 hs. $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2$ (cách)

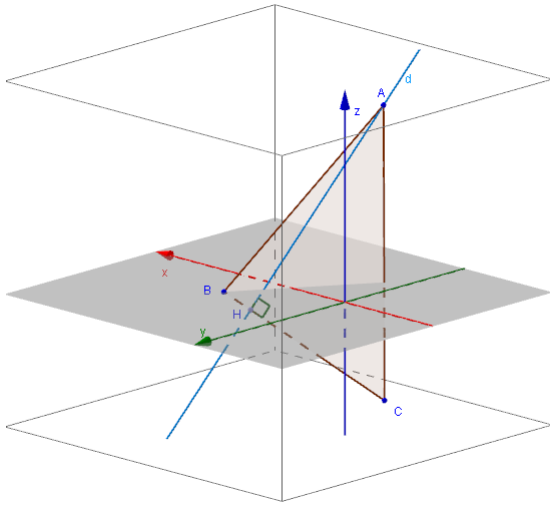
Số cách chọn 4 học sinh đều có trong 3 lớp là: $C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 + C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 270$ (cách)

Tóm lại số cách chọn 4 học sinh mà không có học sinh của quá 2 lớp là : $495 - 270 = 225$ (cách)

Vậy xác suất cần tính là: $\frac{225}{495} = \frac{5}{11}$

Câu 5 Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có các đỉnh lần lượt là A(1; -2; 3), B(2; 1; 0), C(0; -1; -2). Viết phương trình đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC.

Lời giải :



$\vec{CB} = (2; 2; 2)$, mặt phẳng α qua A vuông góc BC có phương trình $(x-1) + (y+2) + (z-3) = 0 \iff x + y + z - 2 = 0$

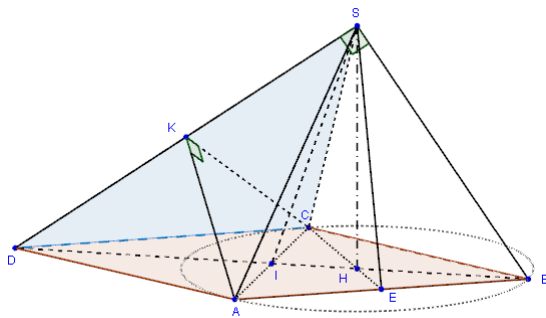
BC cắt α tại H có tọa độ thỏa $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

nên H $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ và $\vec{AH} = \left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{10}{3}\right)$

Do đó phương trình đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC là $AH : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-5}$

Câu 6 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, SA = SB = a; SD = $a\sqrt{2}$ và mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt đáy (ABCD). Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải:



Kẻ $SH \perp BD \Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp

Gọi E, I lần lượt là trung điểm của AB, BD.

$AB = SA = SB = a$ suy ra $\triangle SAB$ đều nên $SE \perp AB$,

và $AB \perp (SHE)$ do đó EH là trung trực của AB

$\Rightarrow \triangle BEH \sim \triangle BIA \Rightarrow \frac{BE}{BI} = \frac{BH}{BA} \iff BH \cdot 2BI = BA \cdot 2BE$

$\iff BH \cdot BD = BA^2 = SB^2 = a^2 \Rightarrow \triangle SBD$ vuông tại S

Từ đó ta được $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $BD = a\sqrt{3}$, $AC = a$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Gọi K là trung điểm SD ta được $AK \perp SD \perp CK$

Mà $SK = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $AK = \sqrt{SA^2 - SK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

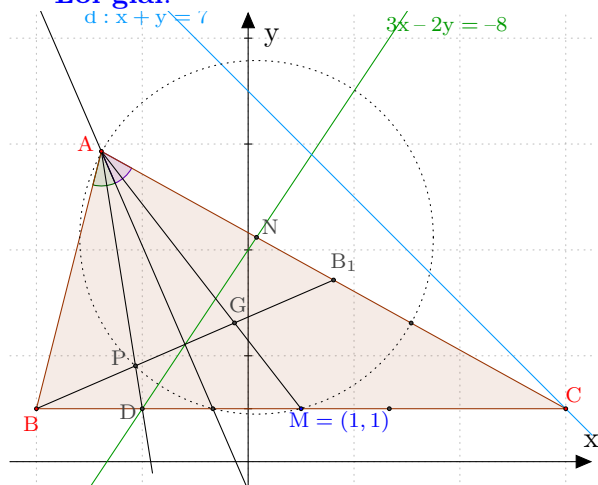
tương tự $\triangle ABC$ đều nên $SC = a \Rightarrow CK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

suy ra $\triangle ACK$ vuông cân tại K do đó $AK \perp (SCD)$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) là $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 7 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $AC = 2AB$. Điểm $M(1; 1)$ là trung điểm của BC, N thuộc cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{3}NC$, điểm D thuộc BC sao cho AD đối xứng với AM qua tia phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng DN có phương trình $3x - 2y + 8 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết C thuộc đường thẳng d : $x + y - 7 = 0$.

Lời giải:



Gọi B_1 là trung điểm AC. Việc chứng minh P là trung điểm BG dành cho bạn. Khi đó:

$$\bullet \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AP} = \frac{m}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{m}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{2}\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

$$\bullet \overrightarrow{AD} = n\overrightarrow{AB} + (1-n)\overrightarrow{AM} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{m}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{2}\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AB} + (1-n)\overrightarrow{AM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2n \\ m = 3(1-n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{5} \\ n = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AM}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) \Rightarrow 3\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DM}$$

$$\Rightarrow 3(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{DM}) = 2\overrightarrow{DM} \Rightarrow 5\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC} \quad (*)$$

Câu 8 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = 1 \\ y(\sqrt{xy - 2y^2} + \sqrt{4y^2 - xy}) = 1 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện $4y \geq x \geq 2y > 0$.

Trừ vế với vế ta được

$$2x^2 - 5xy - y^2 - y(\sqrt{xy - 2y^2} + \sqrt{4y^2 - xy}) = 0$$

Chia hai vế cho y^2 ta có

$$2\left(\frac{x}{y}\right) - 5\left(\frac{x}{y}\right) - 1 - \sqrt{\frac{x}{y} - 2} - \sqrt{4 - \frac{x}{y}} = 0$$

Đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow t \in [2; 4]$. Khi đó ta được

$$2t^2 - 5t - 1 - \sqrt{t - 2} - \sqrt{4 - t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 6t + \sqrt{t - 2}(\sqrt{t - 2} - 1) + (1 - \sqrt{4 - t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t(t - 3) + \frac{(t - 3)\sqrt{t - 2}}{\sqrt{t - 2} + 1} + \frac{t - 3}{1 + \sqrt{4 - t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 3)\left(2t + \frac{\sqrt{t - 2}}{\sqrt{t - 2} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{4 - t}}\right) = 0$$

ta thấy $2t + \frac{\sqrt{t - 2}}{\sqrt{t - 2} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{4 - t}} > 0$ với $t \in [2; 4]$

Vậy $t = 3$ suy ra $x = 3y$ thế vào phương trình (1) của hệ ta được phương trình

$$2y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Câu 9 Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^2y + y^2z + z^2x}{x^4 + y^4 + z^4}$$

Lời giải :

GTLN:

Ta có $a^2b + b^2c + c^2a \leq (a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$ và $a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3}$

Suy ra $A \leq \sqrt{\frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 1$. Cho nên $\max A = 1 \iff a = b = c = 1$.

GTNN:

Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2 \implies x, y, z \in [1; 4]$. Khi đó

$$3A \geq \frac{2(x + y + z) + xy + yz + zx}{5(x + y + z) - 12} = f(x, y, z)$$

Dễ dàng chứng minh được

$$f(x, y, z) \geq \min\{f(1, y, z), f(4, y, z)\} \geq \min\{f(1, 4, z), f(1, 1, z), f(4, 1, z)\} \geq \frac{7}{8}$$

Cho nên $\min A = \frac{7}{8} \iff a = 2, b = c = 1$.

—Hết—

Lời giải được thực hiện bởi các thành viên diễn đàn toán THPT www.k2pi.net.vn