

# KHỞ ĐỘNG TRƯỚC KỲ THI QUỐC GIA NĂM 2015

Môn thi: Toán – THPT. ĐỀ SỐ 02

Thời gian làm bài: 180 phút

**Câu 1 (2,0 điểm).** Cho hàm số  $y = \frac{3x+1}{2x-1}$  (C)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).
- Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm  $M(1;4)$ .

**Câu 2 (1,0 điểm).**

- Giải phương trình  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- Có năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2cm, 4cm, 6cm, 8cm và 10cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Tính xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

**Câu 3 (1,0 điểm).** Tính tích phân  $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \frac{\ln x}{x} dx$ .

**Câu 4 (1,0 điểm).**

- Giải bất phương trình  $\log_2(x^2 - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$ .
- Tìm số phức  $z$  thỏa mãn đẳng thức sau  $(1+i)z^2 + 2 + 11i = 0$ .

**Câu 5 (1,0 điểm).** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng (P):  $4x - 3y + 11z - 26 = 0$  và hai đường thẳng  $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$  và  $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$ . Xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng  $d_1$  với mặt phẳng (P). Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng (P) sao cho  $\Delta$  cắt cả  $d_1$  và  $d_2$ .

**Câu 6 (1,0 điểm).** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu vuông góc của  $A'$  xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ . Biết đường thẳng  $AA'$  hợp với đáy (ABC) một góc  $60^\circ$ . Chứng minh rằng tứ giác  $BB'C'C$  là hình chữ nhật và tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

**Câu 7 (1,0 điểm).** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn

(C):  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16}$ . Đường phân giác trong góc  $BAC$  cắt (C) tại điểm  $E\left(0; -\frac{7}{2}\right)$ . Xác định tọa độ các đỉnh tam giác  $ABC$ , biết đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $N(-5;2)$  và đường thẳng  $AB$  đi qua  $P(-3;-2)$ .

**Câu 8 (1,0 điểm).** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ 4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(y - 1)\sqrt{2x - 2} \end{cases}$$

**Câu 9 (1,0 điểm)** Cho  $x, y, z$  là các số thực thuộc đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $\frac{1}{4x+5} + \frac{2}{4y+5} + \frac{3}{4z+5} = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $P = xy^2z^3$ .

-----Hết-----

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ QG NĂM 2015

Đề 2 - Ngày thi : 18-10-2014

## I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

**Câu 1** Cho hàm số :  $y = \frac{3x+1}{2x-1}$  (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm M(1; 4).

**Lời giải :**

a.  
Tập XD:  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ . Đạo hàm:  $y' = -\frac{5}{(2x-1)^2}$ .

$y' < 0, \forall x \in \mathbb{D}$  nên hàm số  $y = \frac{3x+1}{2x-1}$  nghịch biến trên từng khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

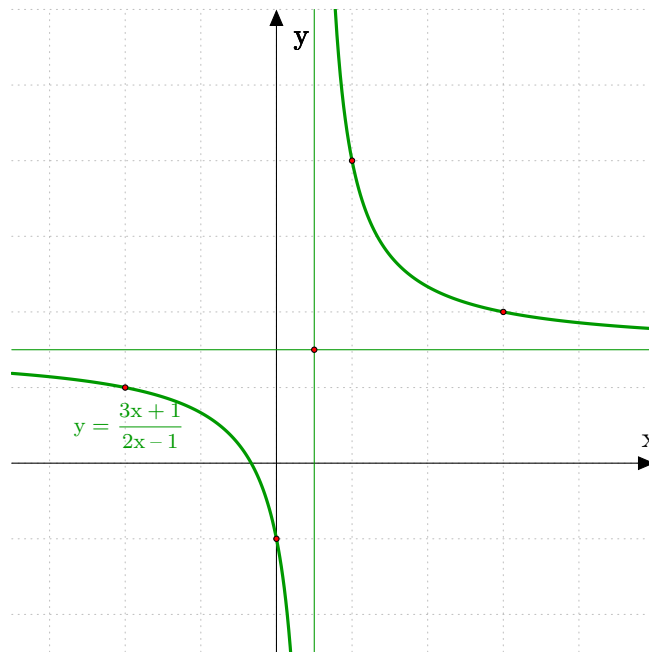
$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{3}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{3}{2}$  nên  $y = \frac{3}{2}$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} y = -\infty$  nên  $x = \frac{1}{2}$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Bảng biến thiên:

|    |               |               |               |
|----|---------------|---------------|---------------|
| x  | $-\infty$     | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$     |
| y' |               | -             | -             |
| y  | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$     | $\frac{3}{2}$ |

Đồ thị



b.  
Gọi  $K \left( a, \frac{3a+1}{2a-1} \right)$  với  $a \neq \frac{1}{2}$  là một điểm thuộc hàm số  $y = \frac{3x+1}{2x-1}$

Khi đó phương trình đường tiếp của của K với đồ thị hàm số y là :  $y = -\frac{5(x-a)}{(2a-1)^2} + \frac{3a+1}{2a-1}$  ( $\Delta$ )

$\Delta$  đi qua M(1; 4) khi  $4 = -\frac{5(1-a)}{(2a-1)^2} + \frac{3a+1}{2a-1} \iff 4(2a-1)^2 = -5(1-a) + (3a+1)(2a-1)$   
 $\iff a^2 - 2a + 1 = 0 \iff (a-1)^2 = 0 \iff a = 1$

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến đó đi qua M(1; 4) là :  $y = -5x + 9$

**Câu 2**

a. Giải phương trình  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b. Có năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2cm, 4cm, 6cm, 8cm và 10cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Tính xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

**Lời giải:**

a. (Cách 1)

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\iff \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ &\iff \cos x + \sin x - \sin 2x - \cos 2x = 1 \\ &\iff \sin x(1 - 2\cos x) + \cos x(1 - 2\cos x) = 0 \\ &\iff (\sin x + \cos x)(1 - 2\cos x) = 0\end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \sin x + \cos x = 0 \iff \tan x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{TH2: } \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

a. (Cách 2)

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\iff \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\iff \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos x \\ &\iff \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)(1 - 2\cos x) = 0\end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{TH2: } \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

b.

Xét 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c thỏa mãn  $a > b > c > 0$  thì điều kiện cần và đủ để 3 đoạn thẳng lập thành một tam giác là  $a + b > c$ ,  $b + c > a$ ,  $c + a > b \implies b + c > a$

Do 2, 4, 6, 8, 10 lập thành cấp số cộng với công sai bằng 2 và  $a, b, c \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Nên  $a \geq b + 2$  và  $b \geq c + 2$ . Mà  $b + c > a \geq b + 2$  nên  $c > 2$  tức là  $c \geq 4$ . Suy ra  $b \geq 6$  và  $a \geq 8$

Nếu  $a = 8$  thì  $b, c \in \{4, 6\}$ . Khi đó có  $(a, b, c) = (8, 6, 4)$  thỏa mãn điều kiện  $a > b > c > 0$  và  $b + c > a$

Nếu  $a = 10$  thì  $b, c \in \{4, 6, 8\}$ . Khi đó có  $(a, b, c) = (10, 8, 4); (10, 8, 6)$  thỏa mãn điều kiện  $a > b > c > 0$  và  $b + c > a$

Tóm lại chỉ có 3 bộ  $(a, b, c)$  thỏa mãn  $a > b > c > 0$  và  $b + c > a$  Hay chỉ có 3 cách lấy 3 đoạn thẳng từ 5 đoạn thẳng để lập thành một tam giác

Số cách lấy 3 đoạn thẳng từ 5 đoạn thẳng là :  $C_5^3 = 10$  cách.

Vậy xác suất lấy 3 đoạn thẳng từ 5 đoạn thẳng để lập thành một tam giác là :  $P = \frac{3}{10}$

**Câu 3**

Tính tích phân  $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \frac{\ln x}{x} dx$ .

**Lời giải :**

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$\text{a) Tính } I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) Tính } I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx \text{ Gọi } u = \ln x \text{ và } dv = \frac{dx}{x^3} \text{ Suy ra } du = \frac{dx}{x} \text{ và } v = \frac{-1}{2x^2}$$

$$\text{Vậy } I_2 = \frac{-\ln x}{2x^2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{-1}{2x^3} dx = -\frac{1}{e^2} + \frac{-1}{4x^2} \Big|_1^e = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$$

$$\text{Tóm lại } \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \frac{\ln x}{x} dx = \frac{3}{4} - \frac{3}{4e^2}$$

**Câu 4**

- a. Giải bất phương trình  $\log_2(x^2 - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$
- b. Tìm số phức  $z$  thỏa mãn đẳng thức sau  $(1 + i)z^2 + 2 + 11i = 0$ .

**Lời giải :**

a.  
 ĐK:  $x > 1$   
 BPT  $\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) + \log_2(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2((x^2 - 1)(x - 1)) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 1) \geq 1$   
 $\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (do  $x > 1$ )

Vậy tập nghiệm của BPT là  $S = \left[ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$

b.  
 Đặt  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ .

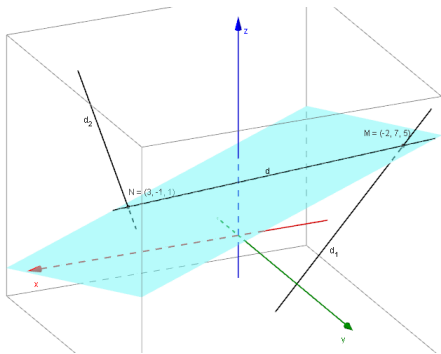
Khi đó  $(1 + i)z^2 + 2 + 11i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\frac{2 + 11i}{1 + i} \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -\frac{13}{2} - \frac{9}{2}i$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{13}{2} \\ 2ab = -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{9}{4a}; a \neq 0 \\ a^2 - \frac{81}{16a^2} = -\frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{9}{4a}; a \neq 0 \\ 16a^4 + 104a^2 - 81 = 0 \end{cases}$

Vì  $a \in \mathbb{R}$  nên  $a = \pm \sqrt{\frac{-13 + 5\sqrt{10}}{4}}$  và  $b = -\frac{9}{4a} = \mp \frac{9}{2\sqrt{-13 + 5\sqrt{10}}}$  (thỏa mãn)

Tóm lại :  $z = \pm \sqrt{\frac{-13 + 5\sqrt{10}}{4}} \mp \frac{9}{2\sqrt{-13 + 5\sqrt{10}}}i$

**Câu 5**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) :  $4x - 3y + 11z - 26 = 0$  và hai đường thẳng  $d_1 : \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$  và  $d_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$ . Xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng  $d_1$  với mặt phẳng (P). Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng (P) sao cho  $\Delta$  cắt  $d_1$  và  $d_2$ .

**Lời giải :**

a) Gọi  $M(-t, 2t + 3, 3t - 1)$  là một điểm thuộc  $d_1$ .

Vậy  $M$  thuộc (P) khi và chỉ khi tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) hay :  $-4t - 3(2t + 3) + 11(3t - 1) - 26 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Vậy giao điểm của (P) và  $d_1$  là  $M(-2, 7, 5)$

b) Gọi  $N(t' + 4, t', 2t' + 3)$  là một điểm thuộc  $d_2$ .

Vậy  $N$  thuộc (P) khi và chỉ khi tọa độ điểm  $N$  thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) hay :  $4(t' + 4) - 3t' + 11(2t' + 3) - 26 = 0 \Leftrightarrow t' = -1$

Vậy giao điểm của (P) và  $d_2$  là  $N(3, -1, 1)$

Suy ra  $\overrightarrow{MN} = (5, -8, -4)$  là một VTCP của đường thẳng MN

Suy ra phương trình đường thẳng MN là  $\frac{x+2}{5} = \frac{y-7}{-8} = \frac{z-5}{-4}$

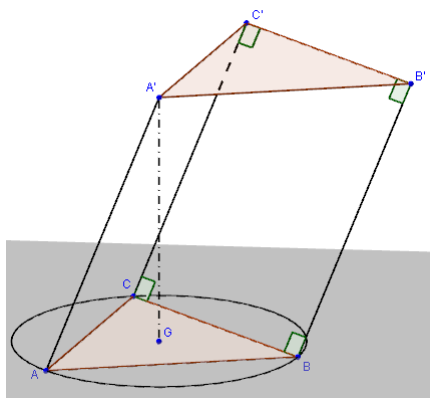
Vậy để  $\Delta$  thuộc (P) và cắt  $d_1$  và  $d_2$  khi và chỉ khi  $M$  và  $N$  thuộc  $\Delta$  hay  $\Delta$  là đường thẳng MN

Vậy phương trình đường thẳng  $\Delta$  là  $\frac{x+2}{5} = \frac{y-7}{-8} = \frac{z-5}{-4}$

**Câu 6**

Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu vuông góc của  $A'$  xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ . Biết đường thẳng  $AA'$  hợp với đáy (ABC) một góc  $60^\circ$ . Chứng minh  $BB'C'C$  là hình chữ nhật và tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

**Lời giải:**



$A'G \perp (ABC)$  nên  $\triangle A'GA$  vuông tại G  $\Rightarrow \widehat{A'AG}$  nhọn,  
nên  $\widehat{A'AG} = 60^\circ \Rightarrow A'G = AG \tan 30^\circ = \frac{AG}{\sqrt{3}}$

Gọi AM cắt BC tại M thì M là trung điểm của BC và  $AM \perp BC$   
Lại có  $A'G \perp BC$  nên  $BC \perp (A'AG)$  suy ra  $AA' \perp BC$ .

Mà  $AA' \parallel B'B$  nên  $B'B \perp BC$

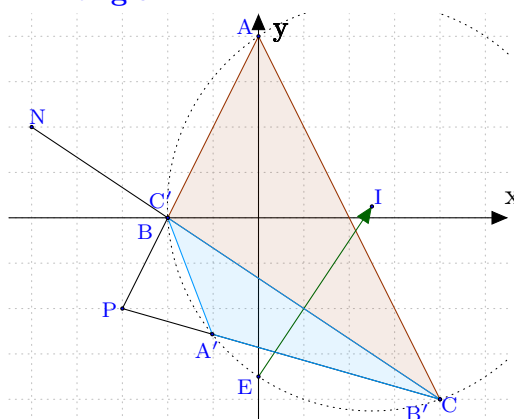
Lại có  $B'B \parallel C'C$  và  $B'B = C'C$  nên  $B'BCC'$  là hình chữ nhật

Ta có  $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}AC \cos 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$V_{A'B'C'.ABC} = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{AG}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3$$

**Câu 7** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) :  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16}$ . Đường phân giác trong góc BAC cắt (C) tại E  $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$ . Xác định tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết đường thẳng BC đi qua điểm N(-5; 2) và đường thẳng AB đi qua điểm P(-3; -2).

**Lời giải:**



Tâm của (C) là I  $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$ . Vì AE là phân giác  $\widehat{BAC}$  nên E là điểm nằm chính giữa cung BC hay IE vuông góc với BC.

Suy ra  $\vec{EI} = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$  là một VTPT của đường thẳng BC.

Suy ra phương trình đường thẳng BC là :

$$\frac{5}{2}(x + 5) + \frac{15}{4}(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 4 = 0$$

Vậy hoành độ giao điểm của (C) và BC là nghiệm của phương

$$\text{trình : } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4 - 2x}{3} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hay } x = 4$$

TH1 : B(-2, 0) và C(4, -4) Ta có  $\vec{PB} = (1, 2)$  là một VTCP của AB

Suy ra phương trình đường thẳng AB :  $2x - y + 4 = 0$

Khi đó hoành độ giao điểm của AB và (C) là nghiệm của phương trình:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 + 2x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16} \Leftrightarrow (x + 2)x = 0$$

Vì B có hoành độ là -2 nên tọa độ điểm A là (0, 4)

TH2 : B(4, -4) và C(-2, 0) Ta có  $\vec{PB} = (7, -2)$  là một VTCP của AB

Suy ra phương trình đường thẳng AB :  $2x + 7y + 20 = 0$

Khi đó hoành độ giao điểm của AB và (C) là nghiệm của phương trình:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x + 20}{-7} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16} \Leftrightarrow (x - 4)\left(x + \frac{54}{53}\right) = 0$$

Vì B có hoành độ là 4 nên tọa độ điểm A là  $\left(-\frac{54}{53}, -\frac{136}{53}\right)$  (không thỏa AE là phân giác trong của  $\widehat{BAC}$ )

Tóm lại : A(0, 4); B(-2, 0) và C(4, -4)

**Câu 8** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ 4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(y - 1)\sqrt{2x - 2} \end{cases}$$

**Lời giải :**

ĐKXD:  $x \geq 1$

Từ PT(2) ta có  $y - 1 \geq 0$  hay  $y \geq 1$  Suy ra  $x^3 + y^3 > 0$

Vậy PT(1)  $\Leftrightarrow (x^3 + y^3)^2 = 2x^2y^2(x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - xy)^2 = 2x^2y^2(x^2 + y^2) \\
&\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2)x^2y^2 + 2x^3y^3 = 2x^2y^2(x^2 + y^2) \\
&\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy)((x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)xy - x^2y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \text{ (vì } (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)xy - x^2y^2 = x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2(x^2 + y^2)xy > 0) \\
&\Leftrightarrow x = y
\end{aligned}$$

Thế vào PT(2) ta có :  $4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(x - 1)\sqrt{2x - 2}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 16(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 162(x - 1)^4 \\
&\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{x^2 - 1} - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3}(3x - 5)\left(27x^2 - 36x + \frac{55}{3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{24x + 40}{9\sqrt{x^2 - 1} + 12} - 27x^2 + 36x - \frac{55}{3}\right)(3x - 5) = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Ta có  $\frac{24x + 40}{9\sqrt{x^2 - 1} + 12} \leq \frac{24x + 40}{12}$  với mọi  $x \geq 1$

$$\text{Suy ra } \frac{24x + 40}{9\sqrt{x^2 - 1} + 12} - 27x^2 + 36x - \frac{55}{3} \leq -27x^2 + 38x - 15 = -27\left(x - \frac{19}{27}\right)^2 - \frac{44}{27} < 0$$

Vậy (1) tương đương với  $x = \frac{5}{3}$  (thỏa mãn). Tóm lại  $(x, y) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

**Câu 9** Cho  $x, y, z \in [0; 1]$  thỏa mãn  $\frac{1}{4x + 5} + \frac{2}{4y + 5} + \frac{3}{4z + 5} = 1$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = xy^2z^3$

**Lời giải :**

Bổ đề :  $f(t) = \ln t + \frac{36}{4t + 5} \leq 6 - 2 \ln 2$  với mọi  $t \in (0, 1]$

Chứng minh :  $f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{144}{(4t + 5)^2}$ ,  $f''(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1152}{(4t + 5)^3}$ ,  $f(t)$  liên tục trên  $(0, 1]$

và  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 144t = (4t + 5)^2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$  (vì  $t \in (0, 1]$ ) Khi đó  $f''\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{32}{3} < 0$

Tóm lại  $f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = 6 - 2 \ln 2$  Suy ra đpcm

Trở lại bài toán :

★ Xét  $x = 0$  hoặc  $y = 0$  hoặc  $z = 0$  thì  $P = 0$

★ Xét  $xyz \neq 0$  thì

$$\ln P = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z \leq \left(6 - 2 \ln 2 - \frac{36}{4x + 5}\right) + 2\left(6 - 2 \ln 2 - \frac{36}{4y + 5}\right) + 3\left(6 - 2 \ln 2 - \frac{36}{4z + 5}\right) = -12 \ln 2$$

Nên  $P \leq \frac{1}{4096}$ . Vậy  $P_{\max} = \frac{1}{4096}$  khi chẳng hạn  $(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

-Hết-

Lời giải được thực hiện bởi các thành viên diễn đàn toán THPT [www.k2pi.net.vn](http://www.k2pi.net.vn)