

KHỞI ĐỘNG TRƯỚC KỲ THI QUỐC GIA NĂM 2015

Môn thi: Toán – THPT. ĐỀ SỐ 04

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + 1$ (1).

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.
- Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $\sqrt{2}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\cos 2x(4\sin x + 1) - \sqrt{3}\sin 2x = 1$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1+x\ln^2 x}{x^2} dx$.

Câu 4 (1,0 điểm).

- Một hộp đựng chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi, tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ ba màu và số bi đỏ nhiều nhất.
- Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $iz + 2\bar{z} = 1 - i$. Tìm phần ảo của số phức iz .

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 11$, hai điểm $A(2;2;4)$, $B(-2;0;2)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) . Tìm điểm M trên đường tròn (C) sao cho tam giác ABM cân ở M .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh OC , biết góc giữa SB với mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $BD = \frac{\sqrt{10}}{5}AC$. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm D lên các đường thẳng AB, BC lần lượt là $M(-2;-1)$ và $N(2;-1)$, biết AC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 7y = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, C .

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y} + y = \sqrt{x^4 + x^3} + x \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(x-1)} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{32a^2b^2c^2} - \frac{27}{(2a^2 + 2b^2 + c + 1)^3}.$$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ QG NĂM 2015
Đề 4 - Ngày thi : 08-11-2014

Câu 1 Cho hàm số : $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + 1$ (1)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.

b. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải :

a.

Khi $m = 0$ hàm số là $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập XD: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 6x^2 - 6x$.

$y' = 0 \iff x = 0$ hay $x = 1$ nên $y(0) = 1$ hay $y(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

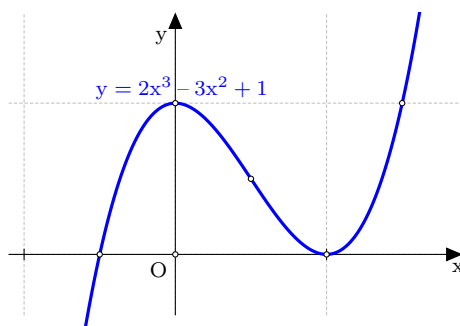
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			1		0		$+\infty$
	$-\infty$						

Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng (0; 1)

Hàm số (1) đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 0)$, $(1; +\infty)$

Điểm cực đại (0; 1). Điểm cực tiểu (1; 0)

Đồ thị



b.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m$. $y' = 0 \iff \begin{cases} x = m \\ x = 1 \end{cases}$

Để hàm số có hai cực trị ta cần có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $m \neq 1$.

$x = 1 \Rightarrow y = 3m$; $x = m \Rightarrow y = -m^3 + 3m^2 + 1$.

Để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $\sqrt{2}$ ta cần có

$(m-1)^2 + ((m-1)^3)^2 = 2 \Rightarrow (m-1)^2 = 1 \iff \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ (TMĐK).

Vậy $m = 0$; $m = 2$

Câu 2

Giải phương trình $\cos 2x (4 \sin x + 1) - \sqrt{3} \sin 2x = 1$

Lời giải:

PT $\iff 4 \sin x \cos 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 2 \sin^2 x$. $\iff \sin x (2 \cos 2x - \sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0$

$\begin{cases} \sin x = 0 \iff x = k\pi \end{cases}$

$\begin{cases} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \iff \cos 2x = \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k.2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Vậy các nghiệm PT là $x = k\pi$; $x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi$; $x = \frac{\pi}{18} + k.2\pi$

Câu 3 Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1+x \ln^2 x}{x^2} dx$.

Lời giải :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{1+x \ln^2 x}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx. \\ I_1 &= \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^e = 1 - \frac{1}{e}. \\ I_2 &= \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 \Big|_1^e = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{4}{3} - \frac{1}{e}$.

Câu 4

- a. Một hộp chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi , tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất.
b. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $iz + 2\bar{z} = 1 - i$. Tìm phần ảo của $i\bar{z}$.

Lời giải :

a.
Gọi Ω là không gian mẫu, để chọn ra 4 viên bi trong số 15 viên bi gồm 4 trắng, 5 đỏ, 6 xanh thì ta có $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$

Gọi A là biến cố để chọn ra 4 viên bi mà có đủ cả 3 màu và số bi đỏ là nhiều nhất thì ta có 4 cách chọn 1 viên bi trắng, 6 cách chọn 1 viên bi xanh, $C_5^2 = 10$ cách chọn ra 2 viên bi đỏ, từ đó suy ra $n(A) = 4.6.10 = 240$ cách.

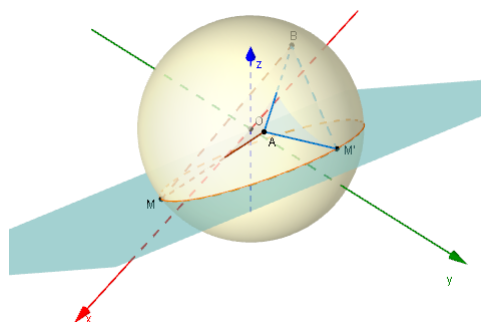
Nên ta có xác suất để biến cố A xảy ra là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{240}{1365} = \frac{16}{91}$

b.
Đặt $z = a + bi$ ta có

$$\begin{aligned} i(a + bi) + 2(a - bi) &= 1 - i \iff 2a - b + (a - 2b)i = 1 - i \iff \begin{cases} 2a - b = 1 \\ a - 2b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \implies z &= 1 + i \text{ ta có } i\bar{z} = i(1 - i) = 1 + i \text{ nên phần ảo của } i\bar{z} \text{ bằng } 1 \end{aligned}$$

Câu 5 Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 = 11$, hai điểm A(2;2;4), B(-2;0;2) và mặt phẳng (P) : $x + 2y - 2z - 3 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C). Tìm điểm M trên đường tròn (C) sao cho tam giác ABM cân ở M.

Lời giải :



Mặt cầu (S) có tâm O(0;0;0) và bán kính $R = \sqrt{11}$ nên khoảng cách từ O đến (P) là $d[O, (P)] = \frac{|-3|}{\sqrt{1+4+4}} = 1 < R$

Do đó (P) cắt (S) theo đường tròn (C).

$M \in (C)$ và $\triangle ABM$ cân tại M nên tọa độ M là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 11 \\ x + 2y - 2z - 3 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = (x+2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 11 & (1) \\ x + 2y - 2z - 3 = 0 & (2) \\ 2x + y + z - 4 = 0 & (3) \end{cases}$$

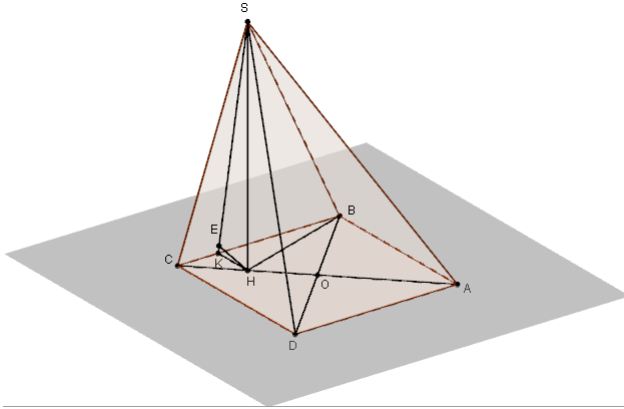
Mà hệ $\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{5-4z}{3} \\ y = \frac{5z+2}{3} \end{cases}$. thế vào PT(1) ta được $\left(\frac{5-4z}{3}\right)^2 + \left(\frac{5z+2}{3}\right)^2 + z^2 = 11$

$$\iff 5z^2 - 2z - 7 = 0 \iff \begin{cases} z = -1 \implies x = 3, & y = -1 \\ z = \frac{7}{5} \implies x = -\frac{1}{5}, & y = 3 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm M thỏa đề bài là $(3; -1; -1)$, $\left(-\frac{1}{5}; 3; \frac{7}{5}\right)$

Câu 6 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) trung điểm của cạnh OC, biết góc giữa SB với mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải:



Câu 6

- Tính thể tích khối chóp

Gọi H là trung điểm của OC, suy ra $SH \perp (ABCD)$

Vậy $\widehat{SBH} = 60^\circ$ là góc giữa cạnh bên SB và mp(ABCD).

Do ABCD là hình vuông tâm O cạnh a nên $AC = BD = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = BO = CO = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và

$$OH = OC = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Tam giác } BOH \text{ vuông tại } O \text{ nên } BH = \sqrt{BO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Tam giác } SHB \text{ vuông tại } H \text{ nên } SH = BH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{30}}{4}.$$

Diện tích hình vuông ABCD cạnh a là $S_{ABCD} = a^2$.

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{30}}{4} = \frac{a^3\sqrt{30}}{12} \text{ (đvtt)}.$$

- Tính khoảng cách từ D đến mp(SBC)

Do $AD \parallel BC$ nên $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$

Ta lại có $AC = 4HC$ suy ra $d(A, (SBC)) = 4d(H, (SBC))$. Vậy $d(D, (SBC)) = 4d(H, (SBC))$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên BC và E là hình chiếu vuông góc của H trên SK.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp HE. \text{ Mà } HE \perp SK, \text{ do đó } HE \perp (SBC).$$

$$\text{Xét tam giác } CAB \text{ có } HK \parallel AB \text{ nên } \frac{HK}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow HK = \frac{1}{4} AB = \frac{a}{4}.$$

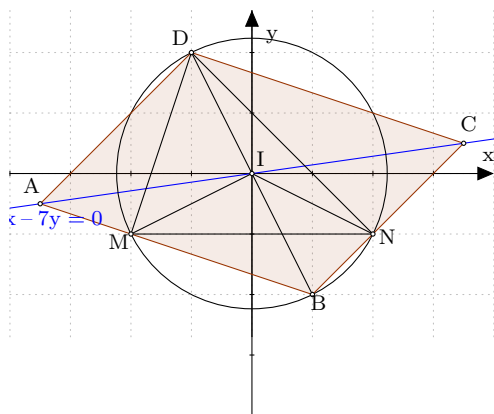
Tam giác SHK vuông tại H và có đường cao HE nên,

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{16}{30a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{496}{30a^2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{30}}{4\sqrt{31}}.$$

$$\text{Vậy } d(D, (SBC)) = 4d(H, (SBC)) = 4HE = \frac{a\sqrt{930}}{31}.$$

Câu 7 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $BD = \frac{\sqrt{10}}{5}AC$.

Gọi hình chiếu vuông góc của điểm D lên các đường thẳng AB, BC lần lượt là M(-2; -1), và N(2; -1), biết AC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 7y = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, C.

Lời giải:

Gọi I là trung điểm BD $\Rightarrow IM = IN = \frac{BD}{2}$
 $\Rightarrow I$ là giao điểm của AC và trung trực đoạn MN.
 Mà trung trực đoạn MN là trục Oy nên $I(0;0)$
 Trong tam giác vuông BMD có $\sqrt{5} = IM = \frac{BD}{2}$
 $\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} AC \Rightarrow IA = IC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
 tọa độ điểm A, C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 7y = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{25}{2} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2}; y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{2}; y = \frac{1}{2} \end{cases}$ Nên A $\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, C $\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Câu 8 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y} + y = \sqrt{x^4+x^3+x} \\ x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(x-1)} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Lời giải 1:

Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} & x\sqrt{x^2+y} + y = \sqrt{x^4+x^3+x} \\ \Leftrightarrow & x\sqrt{x^2+y} + y = x\sqrt{x^2+x} + x \\ \Leftrightarrow & x(\sqrt{x^2+y} - \sqrt{x^2+x}) = x - y \\ \Leftrightarrow & \frac{x(y-x)}{\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x}} + y - x = 0 \\ \Leftrightarrow & y - x = 0 \quad \text{vì } \frac{x}{\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2}} + 1 > 0 \end{aligned}$$

Với $x = y$ thay xuống phương trình dưới ta được:

$$\begin{aligned} & x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x(x-1)} = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow & (x + \sqrt{x-1})^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow & x + \sqrt{x-1} = 2 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = \left(\frac{25}{6}; \frac{25}{6}\right)$

Lời giải 2:

Điều kiện $x \geq 1, y \geq 0$ pt đầu tương đương với $x(\sqrt{x^2+y} - \sqrt{x^2+x}) + y - x = 0$

$$\Leftrightarrow x \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x}} + y - x = 0 \Leftrightarrow y - x = 0 \text{ vì } \frac{x}{\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x}} + 1 > 0 \quad (x \geq 1, y \geq 0)$$

thế $y = x$ vào pt sau ta có $x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-x} = \frac{9}{2}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \text{ với } t > 0 \text{ ta có } t^2 = 2x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)} \Leftrightarrow x + \sqrt{x(x-1)} = \frac{t^2 + 1}{2}$$

$$\text{suy ra pt ẩn } t \text{ là } t + \frac{t^2 + 1}{2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \quad (t > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{x} \geq 0 \\ x - 1 = 4 + x - 4\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 5 - 4\sqrt{x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{25}{16} \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow y = x = \frac{25}{16}$$

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{25}{16}; \frac{25}{16}\right)$

Lời giải 3:

Điều kiện $x \geq 1, y \geq 0$.

Chia cả 2 vế phương trình trên cho x^2 ta được:

$$\sqrt{1 + \frac{y}{x^2}} + \frac{y}{x^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x}$$

xét hàm số $f(t) = \sqrt{1+t} + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} + 1 > 0$

nên hs đồng biến trên $(0; +\infty)$ suy ra $\frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = y$

thay xuống phương trình dưới ta được: $x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x(x-1)} = \frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) - 8 = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{25}{6}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = \left(\frac{25}{6}; \frac{25}{6}\right)$

Câu 9 Cho ba số thực a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{32a^2b^2c^2} - \frac{27}{(2a^2 + 2b^2 + c + 1)^3}$$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có :

$$4ab \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow 16a^2b^2 \leq (2a^2 + 2b^2)^2 \Leftrightarrow 32a^2b^2c^2 \leq 2c^2 (2a^2 + 2b^2)^2$$

Mặt khác :

$$c(2a^2 + 2b^2) \leq \frac{(2a^2 + 2b^2 + c)^2}{4} \Rightarrow 32a^2b^2c^2 \leq \frac{(2a^2 + 2b^2 + c)^4}{8}$$

Từ đó chúng ta có :

$$P \geq \frac{8}{(2a^2 + 2b^2 + c)^4} - \frac{27}{(2a^2 + 2b^2 + c + 1)^3} = f(t) = \frac{8}{t^4} - \frac{27}{(t+1)^3}$$

Với $t = 2a^2 + 2b^2 + c > 0$, xét hàm số $f(t)$ ta có : $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 81t^5 = 32(t+1)^4 \Leftrightarrow t = 2$
nên dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f(2) = -\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của hàm số đã cho bằng $-\frac{1}{2}$.

$$\text{Dấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 2b^2 + c = 2 \\ 2a^2 + 2b^2 = c \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}; c = 1.$$

-Hết-

Lời giải được thực hiện bởi các thành viên diễn đàn toán THPT www.k2pi.net.vn