

Câu 1. (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$ (C_m)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.
- Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có cực trị đồng thời hoành độ cực tiểu nhỏ hơn 1.

Câu 2. (1 điểm) Giải phương trình: $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$

Câu 3. (1 điểm) Giải phương trình: $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$

Câu 4. (1 điểm)

a) Giải phương trình $\log_2 (2x - 3)^2 - 2\log_2 x = 4$

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3.

Câu 5. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5, 1)$ biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Câu 6. (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB . Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ($ABCD$), biết $SD = 2a\sqrt{5}$, SC tạo với mặt đáy ($ABCD$) một góc 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SA .

Câu 7. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $d_1: x - y - 3 = 0$ và $d_2: x + y - 6 = 0$. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của d_1 với trục Ox . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Câu 8. (1 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 9. (1 điểm) Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn $5^{-x} + 5^{-y} + 5^{-z} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{25^x}{5^x + 5^{y+z}} + \frac{25^y}{5^y + 5^{z+x}} + \frac{25^z}{5^z + 5^{x+y}} \geq \frac{5^x + 5^y + 5^z}{4}$$

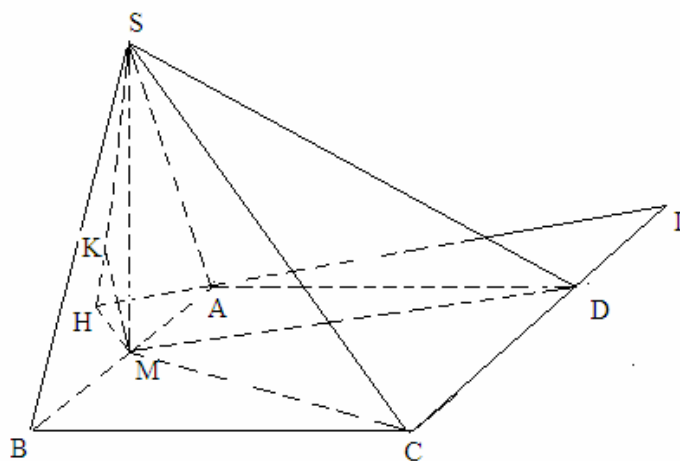
-----Hết-----

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

Câu	Ý	Nội dung	Điểm																					
1.		Cho hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$ (C_m)	200																					
	a.	.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.	1,00																					
		Với $m = 2$ ta được $y = x^3 - 3x^2 + 4$ Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$	0,25																					
		Có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$ BBT	0,5																					
		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>0</td><td></td></tr></table> Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ $y_{CD} = 4$ tại $x = 0$; $y_{CT} = 0$ tại $x = 2$	x	$-\infty$	0		2		$+\infty$	y'		+	0	-	0	+	y			4		0		
x	$-\infty$	0		2		$+\infty$																		
y'		+	0	-	0	+																		
y			4		0																			
		Đồ thị : + Lấy thêm điểm . + Vẽ đúng hướng lõm và vẽ bằng mực cùng màu mực với phần trình bày																						
			0,25																					
	b.	Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có cực trị đồng thời hoành độ cực tiểu nhỏ hơn 1.	1,00																					
		Có $y' = 3x^2 + 2(1 - 2m)x + (2 - m)$ Để hàm số có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua hai nghiệm đó $\Leftrightarrow 3x^2 + 2(1 - 2m)x + (2 - m) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{4}$ (1)	0,25																					
			0,25																					

		Khi đó giả sử $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ thì x_2 là điểm cực tiểu. Theo đề bài có $x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow m < \frac{7}{5}$ (2)	0,25
		Kết hợp (1) và (2) ta được... Đáp số $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{4}; \frac{7}{5}\right)$	0,25
2.		Giải phương trình: $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$.	1,00
		Đặt $\sin x + \cos x = t$ ($ t \leq \sqrt{2}$). $\Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$	0,25
		$\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{2}$ (t/m)	0,25
		+Giải được phương trình $\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \dots \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -1$ + Lấy nghiệm	0,25
		Kết luận : $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) hoặc dưới dạng đúng khác .	0,25
3.		Giải phương trình: $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$	1,00
		Pt $\Leftrightarrow 5 \cdot 5^{x^2} - \frac{5}{5^{x^2}} - 24 = 0$	0,5
		Đặt $5^{x^2} = t$, ($t \geq 1$), pt trở thành: $5t - \frac{5}{t} - 24 = 0$	
		$\Leftrightarrow 5t^2 - 24t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 & (t/m) \\ t = -\frac{1}{5} & (\text{loại}) \end{cases}$	0,25
		Với $t = 5$ ta có $5^{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$	0,25
4.			1,00
	a.	Đk: $0 < x \neq \frac{3}{2}$ $pt \Leftrightarrow 2\log_2 2x-3 - 2\log_2 x = 4$ $\Leftrightarrow \log_2 \frac{ 2x-3 }{x} = 2$ $\Leftrightarrow \frac{ 2x-3 }{x} = 4$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 2x-3 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{3}{2} \\ -2x+3 = 4x \end{cases}$	0,25
			0,25

	b <u>TH₁: Số phải tìm chứa bộ 123:</u> Lấy 4 chữ số $\in \{0;4;5;6;7;8;9\}$: có A_7^4 cách Cài bộ 123 vào vị trí đầu, hoặc cuối, hoặc giữa hai chữ số liền nhau trong 4 chữ số vừa lấy: có 5 cách $\rightarrow$ có $5 A_7^4 = 5.840 = 4200$ số gồm 7 chữ số khác nhau trong đó chứa bộ 123 Trong các số trên, có $4 A_6^3 = 4.120 = 480$ số có chữ số 0 đứng đầu $\rightarrow$ Có $5 A_7^4 - 4 A_6^3 = 3720$ số phải tìm trong đó có mặt bộ 123 <u>TH₂ : Số phải tìm có mặt bộ 321</u> (lập luận tương tự) Có 3720 số gồm 7 chữ số khác nhau, có mặt 321 Kết luận: có $3720.2 = 7440$ số gồm 7 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3	0,25 0,25
5.	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm M(5, 1) biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.	1,00
	Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ có tâm I(1, -2) $R = \sqrt{3}$ Có IM = 5. Đường tròn (C') tâm M cắt đường tròn (C) tại A, B nên $AB \perp IM$ tại trung điểm H của đoạn AB. Ta có $AB = IA = IB = \sqrt{3}$ nên $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow IH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ TH1: I và M nằm khác phía với AB thì $HM = IM - IH = \frac{7}{2}$ $\Rightarrow AM^2 = HM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 13 \Rightarrow (C'): (x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$ TH2: I và M nằm cùng phía với AB thì $HM = IM + IH = \frac{13}{2}$ $AM^2 = HM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 43 \Rightarrow (C'): (x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$	0,25 0,25 0,25 0,25
6.	Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD), biết $SD = 2a\sqrt{5}$, SC tạo với mặt đáy (ABCD) một góc 60°. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SA.	1,00



Theo giả thiết ta có $SM \perp (ABCD)$

MC là hình chiếu của SC trên (ABCD) nên góc giữa SC với mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{SCM} = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SMC và SMD ta có :

$$SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = MC \cdot \tan 60^\circ \text{ mà } ABCD \text{ là hình vuông nên } MC = MD \\ \Rightarrow SD^2 - MC^2 = 3MC^2 \Rightarrow MC = a\sqrt{5} \Rightarrow SM = a\sqrt{15}$$

$$\text{Lại có } MC^2 = BC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{5BC^2}{4} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow S_{ABCD} = 4a^2$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SM \cdot S_{ABCD} = \frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$$

*) Dựng hhh AMDI ta có $AI \parallel MD$ nên $d_{(DM,SA)} = d_{(DM,(SAI))} = d_{(M,(SAI))}$

Kẻ $MH \perp AI$ và $MK \perp SH$. Chứng minh $d_{(M,(SAI))} = MK$

$$\text{Tính được } MH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow MK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}.KL...$$

0,25

0,25

0,25

0,25

7.

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $d_1 : x - y - 3 = 0$ và $d_2 : x + y - 6 = 0$. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của d_1 với trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

1,00

	Ta có: $d_1 \cap d_2 = I$. Toạ độ của I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9/2 \\ y = 3/2 \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ Do vai trò A, B, C, D nên giả sử M là trung điểm cạnh AD $\Rightarrow M = d_1 \cap Ox$ Suy ra M(3; 0) Ta có: $AB = 2IM = 2\sqrt{\left(3 - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$ Theo giả thiết: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 12 \Leftrightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ Vì I và M cùng thuộc đường thẳng $d_1 \Rightarrow d_1 \perp AD$ Đường thẳng AD đi qua M (3; 0) và vuông góc với d_1 nhận $\vec{n}(1;1)$ làm VTPT nên có PT: $1(x - 3) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$. Lại có: $MA = MD = \sqrt{2}$ Toạ độ A, D là nghiệm của hệ PT: $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = \sqrt{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ (x - 3)^2 + (3 - x)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x - 3 = \pm 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } A(2; 1), D(4; -1)$ Do $I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AC suy ra: $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 9 - 2 = 7 \\ y_C = 2y_I - y_A = 3 - 1 = 2 \end{cases}$ Tương tự I cũng là trung điểm của BD nên ta có B(5; 4) Vậy toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật là: (2; 1), (5; 4), (7; 2), (4; -1)	0,25 0,25 0,25 0,25
8.	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + 2 = 0 & (2) \end{cases}$	1,00
	Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$	0,25
	Đặt $t = x + 1 \Rightarrow t \in [0; 2]$; ta có (1) $\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2$. Hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ nghịch biến trên đoạn $[0; 2]$ nên: (1) $\Leftrightarrow y = t \Leftrightarrow y = x + 1$	0,25
	$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} + 2 = 0$ Đặt $v = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow v \in [0; 1] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = 2$ $\Leftrightarrow v^2 + 2v - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 & (t/m) \\ v = -3 & (\text{loại}) \end{cases}$	0,25
	Với $v = 1$ ta có $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$	0,25
9.	Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn $5^{-x} + 5^{-y} + 5^{-z} = 1$. Chứng minh rằng : $\frac{25^x}{5^x + 5^{y+z}} + \frac{25^y}{5^y + 5^{z+x}} + \frac{25^z}{5^z + 5^{x+y}} \geq \frac{5^x + 5^y + 5^z}{4}$	1,00

	Đặt $5^x = a$, $5^y = b$, $5^z = c$. Từ giả thiết ta có: $ab + bc + ca = abc$ Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $\frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} \geq \frac{a+b+c}{4}$ (*) (*) $\Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2+abc} + \frac{b^3}{b^2+abc} + \frac{c^3}{c^2+abc} \geq \frac{a+b+c}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{a+b+c}{4}$ Ta có $\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{a+c}{8} \geq \frac{3}{4}a$ (1) (Bất đẳng thức Cô si) Tương tự $\frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{b+a}{8} \geq \frac{3}{4}b$ (2) $\frac{c^3}{(c+a)(c+b)} + \frac{c+a}{8} + \frac{c+b}{8} \geq \frac{3}{4}c$ (3). Cộng vế với vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh	0,25
		0,25
		0,25
		0,25
Tổng :		10,00

Lưu ý: Các cách giải khác đúng cho điểm tương đương từng phần.