

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay, cuộc thi Olympic toán học toàn quốc diễn ra hằng năm giữa tất cả các trường đại học và cao đẳng trong cả nước nhằm cổ động và phát huy tính tích cực tự giác, sáng tạo và ham học hỏi của các bạn sinh viên, nhằm tạo động lực học tập chung giữa tất cả các trường ĐH-CĐ. Thi Olympic có nghĩa là thi đua là yêu nước, yêu tổ tông giống nòi của mình, phát huy truyền thống hiếu học của các bạn sinh viên, khích lệ tính tự chủ và chuyên nghiệp sau này. Thi toán là để phát huy tài năng và tố chất của một con người nhằm tạo một sức hút và niềm tin của các sv khi ra trường và tạo nên sự tự tin vững chắc trong công việc của các bạn sinh viên sau này, mặc khác thi toán là thi đua và tạo điều kiện cho các đồng nghiệp dạy học bộ môn toán tích cực tìm tòi và phát huy tính sáng tạo của người thầy để được hoàn thiện kỹ năng, phương pháp trong công tác. Sau đây tôi sẽ giới thiệu một số dạng bài tập thi Olympic ở các mức độ khác nhau và ra các đề thi mẫu mang tính hình thức cho các bạn sinh viên. Với mục tiêu học để biết cái hay cái đẹp của toán học, học là phải tự giác, luôn luôn phấn đấu và thường xuyên rèn luyện kỹ năng, vì vậy, tôi hy vọng một điều là các bạn sinh viên của chúng ta làm việc năng nổ và nhiệt tình để đạt được một kết quả tốt, và đó cũng là hy vọng của tôi để các bạn sinh viên của trường Đại học Quảng Nam có một định hướng đúng và tự tin trong các kỳ thi olympic toán toàn quốc.

Nội dung của cuốn sách nhỏ này gồm 2 phần

Phần một là các bài tập dành cho môn Giải tích, Phần hai là các bài tập dành cho môn Đại Số, cuối cùng là các đề thi tự ôn của sinh viên và giới thiệu một số đề thi chọn đội tuyển Olympic toán năm 2013 của khoa toán trường ĐHQN. Mỗi phần chúng tôi phân theo từng chủ đề để các bạn tiện nghiên cứu và tìm tài liệu phù hợp, riêng phần hai tôi chia làm hai phần căn bản là chuyên đề ma trận, định thức, trị riêng và vector riêng của ma trận số và chuyên đề đa thức. Chúc các bạn sinh viên thành công với cuốn sách nhỏ này.

Tác Giả

Trần Văn Sự

Bài tập ôn luyện thi Olympic toán Giải tích **Tóm tắt Lý thuyết:**

Các bài toán về dãy số có nội dung khá đa dạng. Ở đây ta quan tâm đến 2 dạng chính:

Dạng 1) Các bài toán tìm công thức tổng quát của một dãy số, tính tổng các số hạng của một dãy số (bản chất đại số)

Dạng 2) Các bài toán tìm giới hạn dãy số (bản chất giải tích)

Với loại toán thứ nhất, chúng ta có một số kiến thức cơ bản làm nền tảng như:

1) Các công thức về cấp số cộng, cấp số nhân

2) Phương pháp phương trình đặc trưng để giải các phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng (thuần nhất và không thuần nhất)

Các phương pháp cơ bản để giải các bài toán dãy số ở loại thứ nhất là bằng các biến đổi đại số, đưa bài toán về các bài toán quen thuộc, tính toán và đưa ra các dự đoán rồi chứng minh bằng quy nạp toán học. Trong một số bài toán, phép thế lượng giác sẽ rất có ích.

Với các bài toán tính tổng hoặc đánh giá tổng, ta dùng phương pháp sai phân. Cụ thể để tính tổng $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

ta đi tìm hàm số $F(k)$ sao cho $f(k) = F(k+1) - F(k)$. Khi đó

$$S_n = F(2) - F(1) + F(3) - F(2) + \dots + F(n+1) - F(n) = F(n+1) - F(1)$$

Với loại toán thứ hai, ta cần nắm vững định nghĩa của giới hạn dãy số và các định lý cơ bản về giới hạn dãy số, bao gồm:

1. Tập Q trù mật trong tập R , nghĩa là với mọi số thực x , tồn tại dãy hữu tỉ (r_n) sao cho $\lim_n r_n = x$.

2. Cho A là tập con của R . Khi đó A bị chặn trên kéo theo tồn tại cận trên bé nhất của A và A bị chặn dưới kéo theo tồn tại cận dưới lớn nhất của A .

3. Tiên đề ACsimet

Cho $\varepsilon > 0, \exists \delta \in R \quad n: n \geq \delta \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

4. Nếu (x_n) thỏa mãn $x_n \in [m, M], \forall n$ khi đó

tồn tại (x_{k_n}) sao cho $x_{k_n} \rightarrow x_0 \in [m, M]$.

5. Cho dãy (x_n) , khi đó

i. (x_n) tăng và bị chặn trên thì tồn tại giới hạn bằng $a < +\infty$.

ii. (x_n) giảm và bị chặn dưới thì tồn tại giới hạn bằng $b > -\infty$.

6. Cho dãy (x_n) , khi đó

Theo côsi: (x_n) hội tụ khi và chỉ khi

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0: \forall m, n \geq n_0, |x_m - x_n| < \varepsilon).$$

7. Cho dãy (x_n) , khi đó (x_n) hội tụ khi và chỉ khi $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ cùng hội tụ

Đặc biệt sv lưu ý định lý (Cesaro). Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = a$.

8. Nguyên lý kẹp: Cho 3 dãy $(x_n), (y_n), (z_n)$ với

$$x_n \leq y_n \leq z_n, (\forall n \geq n_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

9. Giới hạn của dãy (x_n) (nếu có) là duy nhất.

Chúng ta lưu ý: Nếu với mọi x, y ta có $|f(x) - f(y)| \leq q|x-y|$ với q là hằng số $0 < q < 1$ và $\{x_n\}$ bị chặn thì $\{x_n\}$ hội tụ. Đặc biệt nếu $|f'(x)| \leq q < 1$ thì ta luôn có điều này.

Một trường hợp đặc biệt của dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$ là dãy số dạng $x_{n+1} = x_n + a(x_n)^\alpha$. Với dãy số dạng này thì giới hạn của $\{x_n\}$ thường bằng 0 hoặc bằng ∞ (một cách hiển nhiên).

10. Các dãy thường hay dùng:

- dãy truy hồi tuyến tính cấp 1: $x_{n+1} = a.x_n + b$ ($a, b = \text{const}$).

- dãy truy hồi tuyến tính cấp 2: $x_{n+2} = a.x_{n+1} + b.x_n$ ($a, b = \text{const}$).

Phương pháp tìm dãy truy hồi tuyến tính cấp hai là đưa về phương trình đặc trưng dạng $\lambda^2 = a\lambda + b$.

Sau khi giải tìm được nghiệm chúng ta sử dụng các kết quả sau

+ A, B là 2 nghiệm phân biệt thì $x_n = mA^n + m'B^n$.

+ A, B là 2 nghiệm trùng nhau $x_n = (mn + m')A^n$.

+ $\lambda = x + iy$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg \tan(\frac{y}{x})$ ($-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$). Thì

$$x_n = r^n (A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)).$$

11. Định lý Rolle, ĐL côsi, ĐL giá trị trung bình, định lý Rolle mở rộng, nghiệm, nghiệm bội của hàm số xem đây là mảng kiến thức quen thuộc các bạn sinh viên phải biết.

12. Khai triển Taylor tại x_0 , khai triển Maclourent trong lân cận x_0 của hàm số như 11.

Lưu ý: khi làm bài tập về dãy chúng ta nên chú ý đến tính đơn điệu, đặc biệt một dãy không có tính đơn điệu chúng ta phải xét đến tính đơn điệu của các dãy chặn dãy lẻ và thường hai dãy đó cùng tiến về một giới hạn và giới hạn đó chính là giới hạn của dãy cần tìm. Người ta còn tính giới hạn bằng cách dùng “sup” và “inf” Khi nói đến đạo hàm cấp 1 và 2 của một hàm khả vi tại a nào đó chúng ta phải sử dụng khai triển Taylor vài số hạng đầu tiên sau đó dùng khai triển mà áp đặt cho bài toán của mình.

Các bài tập dãy số

Câu 1. Cho dãy $(x_n)_n$ xác định bởi $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2804}{x_n})$, $n > 0$, $x_1 > 0$.

a. Chứng minh rằng dãy $(x_n)_n$ có giới hạn.

b. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

HD: Chứng minh dãy giảm bằng cách sử dụng định lý Cauchy.

Câu 2. Cho dãy $(a_n)_n$ với các tính chất $0 < x_n < 1$, $4a_{n+1}(1-a_n) - 1 \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

HD: Chứng minh dãy đơn điệu.

Câu 3. Cho dãy $(b_n)_n$ với

$$b_n = b(n), b(1) = b(2) = 1, 2b\left(\frac{m+n}{2}\right) = b(n) + b(m), \quad \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}.$$

Xác định $b(2010)$, $b(2011)$, $b(2012)$, $b(2014)$, $b(2015)$.

HD: Cho một giá trị $m=0$, tính số hạng tổng quát theo n .

Câu 4. Cho dãy $(x_n)_n$ được xác định như sau: $x_1 = 1$; $x_{n+1} = 3 + \frac{7}{x_n + 3}$; $n = 1, 2, \dots$

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

HD: Dùng dãy chặn lẻ hoặc kẹp số 4 vào giữa.

Câu 5. Cho dãy số thực $(x_n)_n$ xác định bởi $x_{n+1}^2 = \frac{2}{x_n + 1}$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Câu 6. Cho dãy số $(x_n)_n$ với các tính chất $x_0 = 0$, $4x_n - 3 = x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

HD: Quy nạp

Câu 7. Cho dãy số $(x_n)_n$ với tính chất $x_{n+1} + 9x_n + 20x_{n-1} = 0$. Tìm x_{2010} .

HD: Đa thức đặc trưng.

Câu 8. Cho dãy $(z_n)_n$ với $y_1 = 1$, $y_{2011} = 2011$, $y_n^2 = y_{n-1}y_{n+1}$, $y_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a_k^{2010}}{a_{k+1}^{2010}}$.

HD: Đưa giả thiết về dạng $a/b = b/c$.

Câu 9. Cho $a_1, \dots, a_{2011}$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 + \dots + a_{2011} = 2011$. Xét tính đơn điệu của dãy $\{u_n\}_n$ với $u_n := a_1^n + a_2^n + \dots + a_{2011}^n, n = 1, 2, \dots$

Câu 10. Cho dãy $\{u_n\}_n$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$u_1 = 1, u_2 = 0, u_{n+1} + u_{n-1} = u_n, \forall n \geq 2.$$

Xác định $u_{2010}, u_{2011}, u_{2012}, u_{2013}, u_{2014}, u_{2015}$.

Câu 11. Cho dãy $\{a_n\}_n$ với các tính chất $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, a_n^2 = \frac{1}{2}(a_{n+1} + 1), n = 2, 3, \dots$

Xác định số hạng tổng quát của dãy trên.

HD: Đưa sang hàm lượng giác.

Câu 12. Chứng minh công thức sau:

$$\sum_{k=1}^n k^i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad i=2$$

$$\sum_{k=1}^n k^i = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad i=3$$

$$\sum_{k=1}^n k^i = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}, \quad i=4$$

HD: Quy nạp hoặc biểu diễn đa thức suy ra

Câu 13. Cho $a \in \mathbb{R}, f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[a, +\infty)$, f có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$. Chứng minh tồn tại $c \in (a, +\infty)$ mà $f'(c) = 0$.

HD: Định lý Rolle

Câu 14. Chứng minh rằng phương trình $(x^{2010} e^{-x})^{(2010)} = 0$ có đúng 2010 nghiệm phân biệt.

HD: Dùng quy nạp và áp dụng bài 13.

Câu 15. a. Cho $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Đặt $G(x) = \int_a^x g(t) dt, x \in [a, b], g$ là hàm liên tục trên đoạn

$[a, b]$. Chứng minh rằng G liên tục trên đoạn $[a, b]$.

b. Cho hàm số $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Giả sử tồn tại số thực $L > 0$ sao cho $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [0, 1]$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trong đoạn $[0, 1]$.

HD: Chứng minh bằng định nghĩa, chứng minh f liên tục.

Câu 16. Cho f là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $\int_a^b f(x) dx > 0$. Chứng minh tồn tại

$[a, b] \ni [0, 1]$ mà trên đó $f(x) > 0$.

HD: Phản chứng

Câu 17. Cho ánh xạ liên tục $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Chứng minh rằng tồn tại số thực c thuộc đoạn $[0, 1]$ sao cho pt $f(x) - x = 0$ nhận $x=c$ làm nghiệm.

HD: Xem sách lớp 11 chuyên nâng cao

Câu 18. Cho f, g là các hàm số thực xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$ ($a < b$). Giả sử $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 0$. Chứng minh rằng $f = g$.

HD: Dùng kết quả liên tục tại điểm và đạt kết quả trong lân cận.

Câu 19. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ đều nguyên.

Lời giải. Chuyển vế và bình phương công thức truy hồi, ta được

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+1} + 4a_n^2 &= 3a_n^2 - 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+1} + a_n^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Thay n bằng $n-1$, ta được

$$a_n^2 - 4a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 + 2 = 0$$

Từ đây suy ra a_{n-1} và a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4a_n x + a_n^2 + 2 = 0$. Suy ra $a_{n+1} + a_{n-1} = 4a_n$ hay $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$. Từ đây suy ra tất cả các số hạng trong dãy đều nguyên, vì $a_0 = 1$ và $a_1 = 3$ nguyên.

Câu 20. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_n}}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta xác định dãy $\{y_n\}$ bởi công thức $y_n = \sum_{i=1}^n x_i 2^i$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức tổng quát của dãy $\{y_n\}$.

Lời giải. Ta có

$$x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_n}} = (\sqrt{1 + \sqrt{x_n}} - 1)^2$$

Từ đó tính được

$$x_1 = (\sqrt{2} - 1)^2, x_2 = (\sqrt{\sqrt{2}} - 1)^2, \dots, x_n = (2^{1/2^n} - 1)^2$$

Ta viết

$$x_1 = 1 + 2 - 2\sqrt{2}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2} - 2.2^{1/4}, \quad x_3 = 1 + 2^{1/4} - 2.2^{1/8} \quad \dots \quad x_n = 1 + 2^{1/2^{n-1}} - 2.2^{1/2^n}$$

Nhân đẳng thức đầu với 2, đẳng thức thứ hai với 2^2 , đẳng thức thứ ba với $2^3 \dots$ đẳng thức thứ n với 2^n rồi cộng vế theo vế, chú ý đến những sự giản ước, ta được.

$$y_n = 2 + 4 + \dots + 2^n + 4 - 2^{n+1}.2^{1/2^n} = 2^{n+1}(1 - 2^{1/2^n}) + 2.$$

Câu 21. Cho dãy số u_n xác định bởi

$$u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{2 + u_n}{1 - 2u_n}.$$

a) Chứng minh rằng $u_n \neq 0$ với mọi n nguyên dương

b) Chứng minh dãy không tuần hoàn

Lời giải.

Gọi φ là góc sao cho $\operatorname{tg}(\varphi) = 2$ thì $u_1 = \operatorname{tg}(\varphi)$, $u_2 = 2\operatorname{tg}(\varphi)/(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) = \operatorname{tg}(2\varphi)$, $\dots$, $u_n = \operatorname{tg}(n\varphi)$.

a) Từ công thức tính u_n ta suy ra $u_{2n} = 2u_n/(1-u_n^2)$. Từ đó suy ra nếu tồn tại n để $u_n = 0$ thì sẽ tồn tại n lẻ để $u_n = 0$. Giả sử $u_{2k+1} = 0$. Khi đó $u_{2k} = -2$ và ta có

$-2 = u_{2k} = 2u_k/(1-u_k^2) \Rightarrow u_k^2 + u_k - 1 = 0 \Rightarrow$ mâu thuẫn vì lúc đó u_k vô tỷ, trong khi đó theo công thức truy hồi thì u_k luôn hữu tỷ.

b) Dãy tuần hoàn thì phải tồn tại n và k sao cho $\operatorname{tg}(n\varphi) = \operatorname{tg}(k\varphi) \Leftrightarrow (n-k)\varphi = m\pi \Leftrightarrow u_{n-k} = 0$. Điều này không xảy ra do kết quả câu a).

Câu 22. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$ với $n=0, 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Đặt $f(x) = (\sqrt{2})^x$ thì dãy số có dạng $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = f(x_n)$. Ta thấy $f(x)$ là hàm số tăng và $x_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$. Từ đó, do $f(x)$ là hàm số tăng nên ta có

$x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1$, $x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2, \dots$ Suy ra $\{x_n\}$ là dãy số tăng. Tiếp theo, ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n < 2$ với mọi n . Điều này đúng với $n = 0$. Giả sử ra đã có $x_k < 2$ thì rõ ràng $x_{k+1} = \sqrt{2}^{x_k} < \sqrt{2}^2 = 2$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $x_n < 2$ với mọi n .

Vậy dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 2 nên dãy có giới hạn hữu hạn. Gọi a là giới hạn đó thì chuyển đẳng thức $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$ sang giới hạn, ta được $a = \sqrt{2}^a$. Ngoài ra ta cũng có $a \leq 2$.

Xét phương trình $x = \sqrt{2}^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln(\sqrt{2})$. Khảo sát hàm số $\ln x/x$ ta thấy rằng phương trình trên chỉ có 1 nghiệm $< e$ và một nghiệm lớn hơn e . Vì 2 là một nghiệm của phương trình nên rõ ràng chỉ có 1 nghiệm duy nhất của phương trình thoả mãn điều kiện ≤ 2 . Từ đó suy ra $a = 2$.

Vậy giới hạn của x_n khi n dần đến vô cùng là 2.

Câu 23. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 \in (1, 2)$ và $x_{n+1} = 1 + x_n - x_n^2/2$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Giả sử x_n có giới hạn là a thì $a = 1 + a - a^2/2$ từ đó suy ra $a = \sqrt{2}$. Ta sẽ dùng định nghĩa để chứng minh $\lim x_n = \sqrt{2}$.

Ta có $|x_{n+1} - \sqrt{2}| = |1 + x_n - \frac{x_n^2}{2} - \sqrt{2}| = |x_n - \sqrt{2}| \cdot \left| \frac{\sqrt{2} + x_n - 1}{2} \right|$.

Tiếp theo ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng $1 < x_n < 3/2$ với mọi $n = 2, 3, \dots$ Từ đó, do $\sqrt{2} + 1/2 < 2$ nên suy ra $\lim x_n = 2$.

Câu 24. Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Lời giải. Đặt $f(x) = \ln(3 + \sin x + \cos x) - 2008$ thì

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}$$

Từ đó, sử dụng đánh giá $|\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}$, $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ ta suy ra

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = q < 1.$$

Áp dụng định lý Lagrange cho x, y thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$$

Từ đó suy ra $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Áp dụng tính chất này với $m > n \geq N$, ta có

$$|x_m - x_n| = |f(x_{m-1}) - f(x_{n-1})| \leq q|x_{m-1} - x_{n-1}| \leq \dots \leq q^{n-1}|x_{m-n+1} - x_1| \leq q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1|.$$

Do dãy $\{x_n\}$ bị chặn và $q < 1$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N đủ lớn để $q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1| < \varepsilon$. Như vậy dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện Cauchy do đó hội tụ.

Nhận xét.

1) Thực chất trong lời giải trên, ta đã chứng minh lại các tính chất đã nêu trong phần lý thuyết (chỉ sử dụng tiêu chuẩn Cauchy).

2) Nếu đánh giá chặt chẽ thì ta có thể chứng minh được $|f'(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{7}}$. Tuy nhiên, với

bài toán của chúng ta, đánh giá như trong bài giải là đủ.

Câu 25. Với $n \geq 2$ gọi x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

Tính các giới hạn: $\lim x_n$ và $\lim (2 - x_n)^{1/n}$

Lời giải.

Sử dụng hằng đẳng thức $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ ta viết phương trình lại dưới dạng $x^n(x-2) + 1 = 0$. Từ đó suy ra $2 - x_n = 1/x_n^n$.

Đặt $P_n(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1$ thì $P_{n+1}(2) = 1 > 0$ và $P_{n+1}(x_n) = x_n P_n(x_n) - 1 = -1$, suy ra $2 > x_{n+1} > x_n$. Như thế, ta luôn có $2 - x_n = 1/x_n^n < 1/x_1^n \rightarrow 0$, suy ra $\lim x_n = 2$.

Và cũng từ đây

$$(2 - x_n)^{1/n} = 1/x_n \rightarrow 1/2.$$

Câu 26. Cho $a \in (0, 1)$ và dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = a$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n^2)$ với mọi $n=0, 1, \dots$ Hãy tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n$.

Phân tích. Dạng $\sqrt{n}x_n$ gợi cho chúng ta nhớ đến định lý trung bình Cesaro. Tuy nhiên để dãy thực sự có dạng này (x_n/n) ta phải xét bình phương của dãy và nghịch đảo lại, tức là $1/nx_n^2$. Từ đó dẫn đến việc xét hiệu $1/x_{n+2}^2 - 1/x_n^2$.

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được rằng dãy x_n giảm và bị chặn dưới bởi 0. Từ đó dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Chuyển hệ thức truy hồi sang giới hạn, ta dễ dàng tính được $\lim x_n = 0$.

Xét hiệu số sau:

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - x_n^2(1-x_n^2)^2}{x_n^2(1-x_n^2)^2 x_n^2} = \frac{2-x_n^2}{(1-x_n^2)^2} \rightarrow 2$$

Từ đó, theo định lý trung bình Cesaro (xem bài tập 6 dưới đây) ta suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n^2} = 2$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 27. (Cần Thơ 2009) Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$. Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$ với mọi số nguyên dương n .

Câu 28. (Moldova 2007) Cho dãy $\{x_n\}$ xác định bởi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+x_n} = e$.

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 29. (Hà Tĩnh 2009) Cho dãy $\{x_n\}$ biết $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 1}{2}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Tìm giới hạn của dãy $\{x_n\}$ khi n dần tới vô cùng.

Câu 30. (Bà Rịa Vũng Tàu 2009) Cho dãy số xác định bởi $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2(x_n^2 + 1)} - 2008$

. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

Câu 31. (Hải Phòng 2009) Cho dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn: $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2010}$.

Hãy tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{u_{i+1}}$.

Câu 32. Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện $\lim (x_{n+1} - x_n) = 0$. Chứng minh rằng $\lim x_n/n = 0$. Từ đây suy ra định lý Cesaro và định lý trung bình Cesaro: Nếu $\lim x_n = a$ thì $\lim (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n = a$.

Câu 33. (PTNK 1999) Cho $a > 1$ và dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_1 = a$, $x_{n+1} = a^{x_n}$ với mọi $n \geq 1$. Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Câu 34. . Cho dãy (u_n) xác định bởi

$$u_1 = u_2 = 1$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u_{n-1}, \forall n > 1. \quad \text{Xác định } u_{2010}, u_{2011}, u_{2012}.$$

Câu 35. Cho dãy (u_n) với $u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + \frac{1}{u_n^2})$, $u_1 > 0$, $n > 0$. Tính $\lim(u_n)$.

Câu 36. Cho dãy (u_n) với $0 < u_{n+m} < u_n + u_m$, ($\forall n, m \in \{1, 2, \dots\}$).

Chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$ tồn tại.

Câu 37. Cho a, b là các số thực với $a < b$. Xét các dãy xác định như sau

$$x_0 = a, y_0 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}, y_n = \frac{x_{n-1} + 2y_{n-1}}{3}, n > 0.$$

Chứng minh rằng các dãy $(x_n), (y_n)$ hội tụ và tìm các giới hạn đó.

Câu 38. Cho dãy (u_n) với $u_0 = \sqrt{2}$, $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 39. Dãy (t_n) có tính chất $|t_n - t_m| > \frac{1}{n}$, $\forall m > n$. Chứng minh rằng dãy (t_n) không bị chặn.

HD: Phản chứng

Câu 40. Cho dãy (t_n) xác định bởi $t_0 = 2010$, $t_n = \frac{1}{4 - 3t_{n-1}}$, $n \geq 1$. Tìm $\lim(t_n)$.

Câu 41. Dãy (t_n) xác định bởi $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $t_{n+1} = \frac{2}{t_n + t_{n-1}}$, $n \geq 2$.

Chứng minh rằng dãy (t_n) hội tụ.

Câu 42. Cho dãy (t_n) các số tự nhiên bị chặn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_1 t_2 \dots t_n)^{\frac{1}{n}} = 1$. Tìm

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}.$$

Câu 43. Cho dãy số $(u_n(t))$ các đa thức thực xác định như sau:

$$u_1(t) = 0, u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - (u_n(t))^2), n > 0, \forall t \in [0, 1].$$

Chứng minh rằng dãy số $(u_n(t))$ hội tụ và tìm $\lim(u_n(t))$, $t \in [0, 1]$.

(Hướng dẫn: Chứng minh dãy $(u_n(t))$, $t \in [0, 1]$ đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $\sqrt{t}$, $t \in [0, 1]$. Chứng minh bằng quy nạp)

Câu 44. Xét dãy số (t_n) với $t_0 \in [0, 1/2]$, $t_{n+1} = t_n^2 + \frac{1}{4}$, $n = 0, 1, \dots$. Tìm $\lim(t_n)$.

HD: Dùng côsys

Câu 45. Cho dãy (t_n) với $t_0 \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, $t_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - t_n^2}}{t_n}$, $n = 0, 1, \dots$. Chứng minh dãy (t_n) đơn điệu và xác định $\lim(t_n)$.

Câu 46. Cho $S_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} \right)$. Chứng minh dãy (S_n) đơn điệu giảm.

Câu 47. Cho dãy (t_n) thỏa mãn $t_1 = 2010$, $t_n^2 = t_{n-1}t_{n+1}$, $t_n > 0$, $\forall n$. Tính tỉ số sau

$$\frac{t_1^{2010} + t_2^{2010} + \dots + t_{2010}^{2010}}{t_2^{2010} + t_3^{2010} + \dots + t_{2011}^{2010}}.$$

Câu 48. Cho dãy (t_n) xác định theo công thức sau

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_{n+1} = 2t_n - t_{n-1} + 1, n \geq 2.$$

Chứng minh rằng $4t_n t_{n+2} + 1$ là một số chính phương. Suy ra $t_{2010} t_{2012}$.

Câu 49. cho dãy (y_n) : $y_0 > 0$, $y_{n+1} = y_n \left(\frac{1 + 3a/y_n^2}{3 + a/y_n^2} \right)$, $(a > 0)$. Chứng minh dãy (y_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

Câu 50. Dãy số $\{x_n\}$ với $n = 1, 2, 3$, được xác định bởi

$$x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n^2 - x_n + 2, \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Tìm giới hạn của dãy $\{S_n\}$ với $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$.

Câu 51. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số xác định và có giới hạn hữu hạn.

Câu 52. (Canada 1976) Dãy số thực $x_0, x_1, x_2, \dots$ được xác định bởi

$$x_0 = 1, x_1 = 2, n(n+1)x_{n+1} = n(n-1)x_n - (n-2)x_{n-1}.$$

Hãy tìm $x_0/x_1 + x_1/x_2 + \dots + x_{50}/x_{51}$.

Câu 53. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ đều nguyên.

Lời giải. Chuyển vế và bình phương công thức truy hồi, ta được

$$a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+1} + 4a_n^2 = 3a_n^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+1} + a_n^2 + 2 = 0$$

Thay n bằng $n-1$, ta được

$$a_n^2 - 4a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 + 2 = 0$$

Từ đây suy ra a_{n-1} và a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4a_n x + a_n^2 + 2 = 0$. Suy ra $a_{n+1} + a_{n-1} = 4a_n$ hay $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$. Từ đây suy ra tất cả các số hạng trong dãy đều nguyên, vì $a_0 = 1$ và $a_1 = 3$ nguyên.

Câu 54. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_1 = 1, a_2 = 2$ và $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi $m, a_m a_{m+1}$ cũng là một số hạng của dãy số.

Lời giải. Ta có $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$

Thay n bằng $n-1$, ta được $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$

Trừ hai đẳng thức vế theo vế, ta được

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 3a_n - a_{n-1} = 0$$

Phương trình đặc trưng $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm bội 3 $x_{1,2,3} = 1$ nên ta có nghiệm tổng quát a_n có dạng $a_n = an^2 + bn + c$. Thay $n = 1, 2, 3$ ta được

$$a + b + c = 1$$

$$4a + 2b + c = 2$$

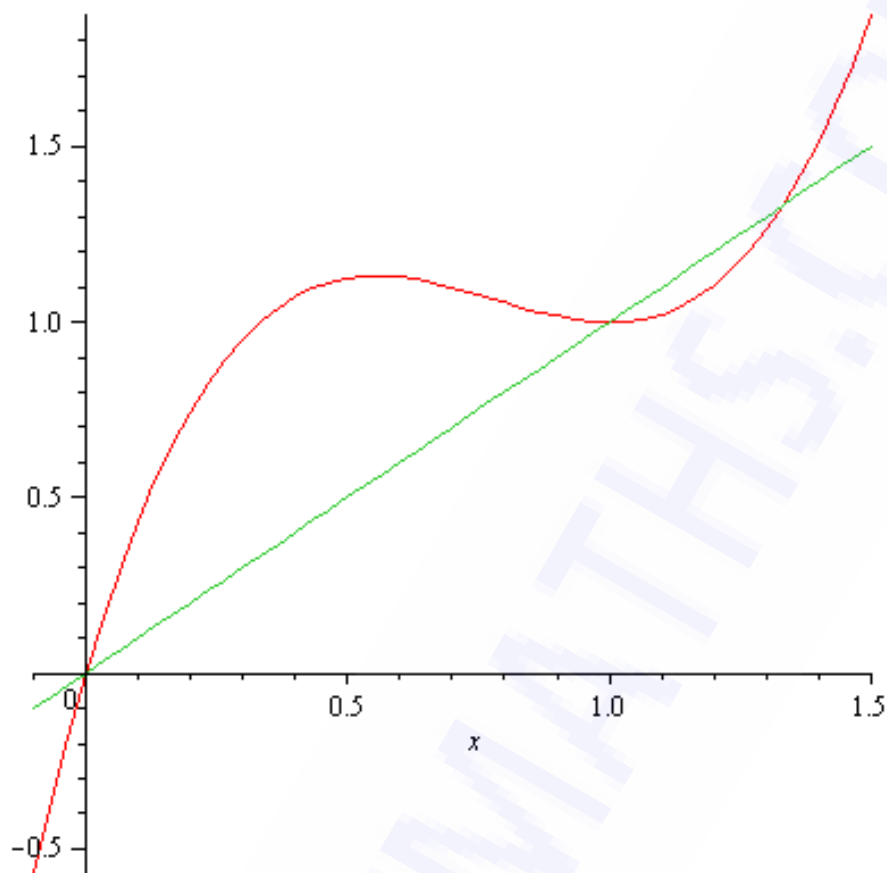
$$9a + 3b + c = 5$$

Từ đó giải ra được $a = 1, b = -2, c = 2$. Vậy $a_n = n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1$. Do đó $a_m a_{m+1} = ((m-1)^2 + 1)(m^2 + 1) = (m^2 - m + 1)^2 + 1 = a_{m^2 - m + 2}$.

Câu 55. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 = a, x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n$. Tìm tất cả các giá trị a để dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Tóm tắt lời giải.

Khảo sát hàm số $y = f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x$ và xét sự tương giao của nó với hàm số $y = x$, ta được đồ thị sau



Từ đồ thị này (và bảng biến thiên), ta thấy

- 1) x tăng trên $(-\infty, 5/9)$, $(1, +\infty)$ và giảm trên $(5/9, 1)$
- 2) $f(5/9) < 4/3$
- 3) $f(x) = x$ khi và chỉ khi $x = 0, 1, 4/3$
- 4) Với $x > 4/3$ hoặc $0 < x < 1$ thì $f(x) > x$. Với $x < 0$ hoặc $1 < x < 4/3$ thì $f(x) < x$.

Tiếp theo, ta có $f((4/3, +\infty)) = (4/3, +\infty)$, $f((1, 4/3)) = (1, 4/3)$, $f((-\infty, 0)) = (-\infty, 0)$. Hơn nữa, trong các khoảng này $f(x)$ là hàm số tăng. Như vậy, nếu a thuộc các khoảng này thì dãy $\{x_n\}$ sẽ đơn điệu. Cụ thể:

- a) Với $a \in (4/3, +\infty)$ thì $x_2 = f(x_1) = f(a) > a$ và f tăng trên khoảng này, do đó $\{x_n\}$ là dãy tăng. Nếu $\{x_n\}$ bị chặn trên thì $\{x_n\}$ phải có giới hạn hữu hạn α và α phải là nghiệm của phương trình $f(x) = x$, suy ra $\alpha \in \{0, 1, 4/3\}$. Điều này mâu thuẫn vì do $x_n > x_1 = a > 4/3$ nên $\alpha = \lim x_n \geq a > 4/3$. Vậy $\{x_n\}$ không bị chặn trên, tức là $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.
- b) Tương tự với $a \in (-\infty, 0)$ thì $\{x_n\}$ giảm và cũng không có giới hạn hữu hạn.
- c) Với $a \in (1, 4/3)$ thì dãy $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới bởi 1, do đó có giới hạn hữu hạn α . α là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ và $1 \leq \alpha \leq a < 4/3$, suy ra $\alpha = 1$.

Tiếp theo, ta nghiên cứu các đoạn còn lại:

- d) Với $a = 0, 1, 4/3$ thì $\{x_n\}$ là các dãy hằng và có giới hạn tương ứng là $0, 1, 4/3$.
 e) Với $a \in [1/3, 1)$ thì $x_2 = f(x_1) = f(a) \in [1, 4/3)$, từ đó, áp dụng phần c, ta có dãy $\{x_n\}_{n=2}$ là dãy giảm và có giới hạn là 1 .
 f) Cuối cùng, với $a \in (0, 1/3)$, ta chứng minh rằng tồn tại n sao cho $x_n > 1/3$. Thật vậy, giả sử ngược lại thì $a_n \leq 1/3$ với mọi n . Chú ý rằng khi đó do f là hàm tăng trên $(0, 1/3)$ và $x_2 = f(x_1) = f(a) > a = x_1$ nên dãy $\{x_n\}$ tăng. Dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi $1/3$ nên có giới hạn hữu hạn α và $0 < a \leq \alpha \leq 1/3$. Điều này mâu thuẫn vì α chỉ có thể là $0, 1, 4/3$! Vậy điều giả sử là sai. Vậy tồn tại n sao cho $x_n > 1/3$. Gọi k là số nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này thì ta có $x_{k-1} < 1/3$, suy ra $x_k = f(x_{k-1}) < 1$ suy ra $x_{k+1} = f(x_k) \in (1, 4/3)$ và như thế, áp dụng c) cho dãy số $\{x_n\}_{n=k+1}$ ta có dãy này giảm và có giới hạn là 1 , vì thế $\{x_n\}$ cũng có giới hạn là 1 .

Câu 56. Cho hàm f khả vi trên đoạn $[0, 1]$, $f(0)=0, f(1)=1$. Chứng minh rằng phương trình $f(x)+2010=f'(x)+x$ có ít nhất một nghiệm thực trong khoảng $(0, 1)$, với $f'(x)$ là đạo hàm của hàm f .

Câu 57. Giả sử f, g là hai hàm số xác định, tuần hoàn trên toàn trục số. Biết rằng

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Chứng minh rằng $f(x)=g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 58. Cho hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

Giả sử tồn tại số nguyên $n > 1$ sao cho $f^n(x) = \underbrace{f_0 f_0 \dots f_0}_{n \text{ lần}}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $f(x)=x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 59. a. Cho dãy số $(x_n)_n$ xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{3}{x_n + 1}, n \geq 1$.

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

b. Cho dãy hàm số thực $(f_n)_n$ và hàm số f từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt

$$f_n(x) := \begin{cases} n+1, & \text{nếu } f(x) \geq n \\ \frac{m}{2^n}, & \text{nếu } \frac{m-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{m}{2^n}, m \in \{1, 2, \dots, n2^n\} \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Chứng minh rằng dãy hàm $(f_n)_n$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 60. Cho hàm f khả vi 3 lần trên đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn với mọi $h \in [-1, 1]$,

$$f(h) + f(-h) = f(0) + h^2 + o(h^3),$$

$$f(h) - f(-h) = f'(0) + h + o(h^3).$$

Xác định $f(0), f'(0), f''(0)$.

HD: Khai triển Taylor tại lân cận $x=0$.

Câu 61. Cho hàm $f(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, +\infty)$. Chứng minh rằng hàm

$$số F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} \text{ đồng biến trên khoảng } [0, +\infty).$$

Lời Giải: Tính được

$$F'(x) = \frac{x f(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}, \quad \frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt} > 0, \quad x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt > 0$$

suy ra $F'(x) > 0$ khi $x > 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 62. Cho dãy số (x_n) xác định như sau $x_0 = 0, x_n = \frac{x_{n-1}}{2011} + (-1)^n, \forall n \geq 1$. Tìm $\lim_n x_n^2$.

$$\text{Lời giải: Đặt } x_n = \frac{h(n)}{2011^n} \quad x_n = \frac{1}{2011^n} \sum_{k=1}^n (-1)^k (2011)^k = \frac{(-1)^n (2011)^n - 1}{2012 (2011)^{n-1}}.$$

$$\text{Kết luận: } \lim_n x_n^2 = \frac{2011^2}{2012^2}$$

Câu 63. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi công thức truy hồi sau:

$$x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2. \text{ Tìm giới hạn } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Lời giải: Theo giả thiết ta có:

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^2(x_n^2 - 4) = x_n^2 x_{n-1}^2(x_{n-1}^2 - 4) = \dots = x_n^2 x_{n-1}^2 \dots x_1^2(x_1^2 - 4) = 21 x_n^2 x_{n-1}^2 \dots x_1^2.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = 21 - \frac{4}{(x_1 x_2 \dots x_n)^2}.$$

Bằng quy nạp chúng ta chứng minh được $x_k > 2, \forall k \geq 1$.

$$\text{Ta kết luận } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{x_1 x_2 \dots x_n} = 21.$$

Câu 63. Cho hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$ ($a < b$) và thỏa mãn điều

kiện $\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$f(x) = 2804 \int_a^x f(t)dt \text{ có nghiệm trong khoảng } (a, b).$$

Lời giải: Xét hàm số $F(t) = e^{-2804t} \int_a^t f(x)dx$. Ta có $F(a) = F(b) = 0$ và

$$F'(t) = -2804e^{-2804t} \int_a^t f(x)dx + e^{-2804t} f(t).$$

Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c)=0$, nghĩa là

$F'(c) = -2804e^{-2804c} \int_a^c f(x)dx + e^{-2804c} f(c) = 0$. Từ đây chúng ta kết luận tính đúng đắn của bài toán.

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực x thì

$$f'(x) - 2804 \leq 0. \text{ Giả sử } 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx < 2804.$$

Chứng minh rằng trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ phương trình $f(x)=0$ có duy nhất nghiệm.

Lời giải: Ta có

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) d \cos x = f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos x dx = f(0) + 2804 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = f(0) + 2804.$$

$$\text{Suy ra } f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx - 2804 < 0.$$

Giả sử $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ và $f'(x) \leq 2804$ trên $[0, \frac{\pi}{2}]$. Khi đó

$$f(x) < 0, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx < 0, \text{ (mâu thuẫn giả thiết)}$$

Vậy $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ và cùng với $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ và $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$. Theo định lý

Lagrange có được kết quả như mong muốn.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 f(t) dt = 1 - x^2, \forall x \in [0, 1].$$

$$\text{Chứng minh: } \int_0^1 [f(t)]^2 dt = 2 \int_0^1 f(t) dt.$$

Chứng minh: Ta có

$$0 = \int_0^1 -f(t)^2 dt = \int_0^1 f(t)^2 dt - 2 \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 1 dt = \int_0^1 f(t)^2 dt - 2 \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(t)^2 dt = 2 \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{3}. \text{ Đặt } S = \int_0^1 f(t) dt = 1 - x^2 \Rightarrow S = \frac{1}{3}.$$

Ngoài ra $S = x \int_0^1 f(t) dt \Big|_0^1 + \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$. Vì vậy

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt. \text{ ĐPCM.}$$

Câu 66. Giả sử $f(x)$ là hàm số có đạo hàm cấp 2 liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = a$. Chứng minh rằng

$$\max_{x \in [0,1]} \{f''(x)\} \geq 8 \frac{a - \min_{x \in [0,1]} \{f(x)\}}{(\alpha - \beta)^2}$$

Cho một mở rộng kết quả trên trên đoạn $[\alpha, \beta] \subset R$.

Lời giải: Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, 1)$, $f'(c) = 0$. Xét khai triển Taylor tại lân cận $x=c$ của hàm $f(x)$ ta có

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\theta(x))}{2!}(x-c)^2.$$

Thay lần lượt $x=0$, $x=1$ và đẳng thức trên ta thu được

$$a = b + \frac{f''(\theta(0))}{2!}c^2, \quad a = b + \frac{f''(\theta(1))}{2!}(1-c)^2, \quad b = \min_{x \in [0,1]} \{f(x)\}. \text{ Hay}$$

$$f''(\theta(0)) \frac{2(a-b)}{c^2} \leq 0, \quad (1) \quad f''(\theta(1)) \frac{2(a-b)}{(1-c)^2} \leq 0. \quad (2)$$

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$f''(\theta(0))f''(\theta(1)) \frac{4(a-b)}{(1-c)^2 \cdot c^2} \leq 64(a-b)^2 \quad (\text{vì } (1-c)^2 \cdot c^2 \leq \frac{1}{16}, c \in [0,1]). \text{ (suy ra ĐPCM)}$$

$$\text{Mở rộng kết quả ta được } \max_{x \in [0,1]} \{f''(x)\} \geq 8 \frac{a-b}{(\alpha-\beta)^2}$$

(Tạm thời chúng ta dừng tại đây chờ các bài tập được in ra lần sau)

Về các dãy số xác định bởi dãy các phương trình

Trong toán học, có rất nhiều trường hợp ta không xác định được giá trị cụ thể đối tượng mà chúng ta đang xét (ví dụ số, hàm số) nhưng vẫn có thể thực hiện các phép toán trên các đối tượng đó. Ví dụ ta có thể không biết giá trị các nghiệm của một phương trình, nhưng vẫn biết được tổng của chúng:

“Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos^5 x - 5\cos^3 x + 3\cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0, 2\pi]$ ”.

hay là tính tích phân của một hàm mà ta không có biểu thức tường minh:

“Chứng minh rằng với mọi $t \geq 0$, phương trình $x^3 + tx - 8 = 0$ luôn có 1 nghiệm dương duy

nhất, ký hiệu là $x(t)$. Tính $\int_0^7 [x(t)]^2 dt$.”

Trong bài viết nhỏ này, chúng ta sẽ đề cập đến một tình huống căn bản khác, đó là khảo sát những dãy số xác định bởi dãy các phương trình:

“Cho dãy các hàm số $f_n(x)$ xác định bởi công thức tường minh hoặc truy hồi thỏa mãn điều kiện: các phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_n \in D$. Cần khảo sát các tính chất của x_n như khảo sát sự hội tụ, tìm giới hạn...”

Chúng ta bắt đầu từ một bài toán thi tuyển sinh vào khoa Toán trường Đại học Độc lập Matxcơva năm 2000

Bài toán 1. Ký hiệu x_n là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n} = 0$$

thuộc khoảng $(0, 1)$

a) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ;

b) Hãy tìm giới hạn đó.

Bình luận: x_n được xác định duy nhất vì hàm số $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$ liên tục và

đơn điệu trên $(0, 1)$. Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể của x_n . Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của x_n , ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Với tính bị chặn, mọi thứ đều ổn vì $0 < x_n < 1$. Với tính đơn điệu, ta chú ý một chút đến mối liên hệ giữa $f_n(x)$ và $f_{n+1}(x)$: $f_{n+1}(x) = f_n(x) +$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{x-n-1}. \text{ Đây chính là chìa khoá để chứng minh tính đơn điệu của } x_n.$$

Lời giải: Rõ ràng x_n được xác định 1 cách duy nhất, $0 < x_n < 1$. Ta có $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + 1/(x_n - n - 1) = 1/(x_n - n - 1) < 0$, trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0, x_n)$ có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1} . Như thế ta đã chứng minh được $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số $\{x_n\}$ giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$$1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n > \ln(n)$$

(Có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng đánh giá $\ln(1+1/n) < 1/n$)

Thật vậy, giả sử $\lim x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy số giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n .

Do $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$ nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có

$$1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n > 1/a.$$

Khi đó với $n \geq N$ ta có

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n-1} + \dots + \frac{1}{x_n-n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \dots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

Mâu thuẫn. Vậy ta phải có $\lim x_n = 0$.

Bài toán 2. Cho n là một số nguyên dương > 1 . Chứng minh rằng phương trình $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n . Chứng minh rằng x_n dần về 1 khi n dần đến vô cùng và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$.

Bài tập ôn thi Olympic toán Giải Tích-Đại số (Biên soạn: Th.s Trần Văn Sự)

Lời giải: Rõ ràng $x_n > 1$. Đặt $f_n(x) = x_n - x - 1$. Khi đó $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và $f_{n+1}(x_n) = x_{n+1} - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1 = f_n(x_n) = 0$. Từ đó ta suy ra $1 < x_{n+1} < x_n$. Suy ra dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn

a. Ta chứng minh $a = 1$. Thật vậy, giả sử $a > 1$. Khi đó $x_n \geq a$ với mọi n và ta tìm được n đủ lớn sao cho: $x_n^n \geq a^n > 3$ và $x_n + 1 < 3$, mâu thuẫn vì $f_n(x_n) = 0$.

Để giải phần cuối của bài toán, ta đặt $x_n = 1 + y_n$ với $\lim y_n = 0$. Thay vào phương trình $f_n(x_n) = 0$, ta được $(1+y_n)^n = 2 + y_n$. Lấy logarith hai vế, ta được

$$\ln(1+y_n) = \ln(2+y_n)$$

Từ đó suy ra $\lim \ln(1+y_n) = \ln 2$

Nhưng $\lim \ln(1+y_n)/y_n = 1$ nên từ đây ta suy ra $\lim ny_n = \ln 2$, tức là

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = \ln 2.$$

Bài toán 3. (VMO 2007) Cho số thực $a > 2$ và $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b) Gọi nghiệm đó là x_n , chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$.

Lời giải. Kết quả của câu a) là hiển nhiên vì hàm $f_n(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$.

Để dàng nhận thấy $0 < x_n < 1$. Ta sẽ chứng minh dãy x_n tăng, tức là $x_{n+1} > x_n$.

Tương tự như ở những lời giải trên, ta xét

$$f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^n + \dots + x_n + 1 = x_n f_n(x_n) + 1 = ax_n + 1$$

Vì ta đã có $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 1 > a$ nên ta chỉ cần chứng minh $ax_n + 1 < a$ là sẽ suy ra $x_n < x_{n+1} < 1$. Như vậy, cần chứng minh $x_n < (a-1)/a$. Thật vậy, nếu $x_n \geq (a-1)/a$ thì

$$f_n(x_n) \geq a^{10} \left(\frac{a-1}{a} \right)^{n+10} + \frac{1 - \left(\frac{a-1}{a} \right)^{n+1}}{1 - \frac{a-1}{a}} = (a-1)^{10} \left(\frac{a-1}{a} \right)^n + a - (a-1) \left(\frac{a-1}{a} \right)^n > a$$

(do $a-1 > 1$). Vậy dãy số tăng $\{x_n\}$ tăng và bị chặn bởi 1 nên hội tụ.

Nhận xét: Một lần nữa mối liên hệ $f_{n+1}(x) = xf_n(x) + 1$ lại giúp chúng ta tìm được mối quan hệ giữa x_n và x_{n+1} . Từ lời giải trên, ta có thể chứng minh được rằng

$\lim x_n = (a-1)/a$. Thật vậy, đặt $c = (a-1)/a < 1$, theo tính toán ở trên thì

$$f_n(c) - f_n(x_n) = kc^n \quad (\text{với } k = (a-1)((a-1)^9 - 1) > 0)$$

Theo định lý Lagrange thì

$$f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\xi)(c - x_n) \quad \text{với } \xi \text{ thuộc } (x_n, c)$$

Nhưng $f'(\xi) = (n+10)a^{10}\xi^{n+9} + n\xi^{n-1} + \dots + 1 > 1$ nên từ đây suy ra

$$kc^n > c - x_n$$

Từ đó ta có

$$c - kc^n < x_n < c$$

Và có nghĩa là $\lim x_n = c$.

Bài toán 4. (VMO 2002) Cho n là một số nguyên dương. a. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2} \text{ có một nghiệm duy nhất } x_n > 1.$$

c. Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng, x_n dần đến 4.

d.

Bình luận: Việc chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất $x_n > 1$ là hiển nhiên. Mỗi liên hệ $f_{n+1}(x) = f_n(x) + 1/((n+1)^2x-1)$ cho thấy x_n là dãy số tăng (ở đây $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$). Đề bài cho sẵn giới hạn của x_n là 4 đã làm cho bài toán trở nên dễ hơn nhiều. Tương tự như cách chứng minh $\lim x_n = c$ ở nhận xét trên, ta sẽ dùng định lý Lagrange để đánh giá khoảng cách giữa x_n và 4. Để làm điều này, ta cần tính $f_n(4)$, với $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$. Rất may mắn, bài tính $f_n(4)$ này liên quan đến 1 dạng tổng quen thuộc.

Lời giải: Đặt $f_n(x)$ như trên và gọi x_n là nghiệm > 1 duy nhất của phương trình $f_n(x) = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} f_n(4) &= \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n} \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$1/4n = |f_n(x_n) - f(4)| = |f'(c)||x_n - 4|$$

với c thuộc $(x_n, 4)$

$$\text{Nhưng do } |f'_n(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + \dots > \frac{1}{9}$$

Nên từ đây $|x_n - 4| < 9/4n$, suy ra $\lim x_n = 4$.

Trong ví dụ trên (và trong phần nhận xét ở bài toán 3) chúng ta đã sử dụng định lý Lagrange để đánh giá hiệu số giữa x_n và giá trị giới hạn. Ở ví dụ cuối cùng của bài viết này, ta tiếp tục nếu ra ứng dụng định lý này trong một tình huống phức tạp hơn.

Bài toán 5. Cho n là một số nguyên dương > 1 . Chứng minh rằng phương trình $x^n = x^2 + x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n . Hãy tìm số thực a sao cho giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a (x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn và khác 0.

Bình luận. Để thấy giá trị a , nếu tồn tại, là duy nhất. Tương tự như ở bài toán 2, có thể chứng minh được rằng $x_n \sim 1 + \ln(3)/n$. Từ đó có dự đoán là $a = 2$. Định lý Lagrange sẽ giúp chúng ta đánh giá hiệu $x_n - x_{n+1}$ và chứng minh dự đoán này.

Lời giải. Đặt $P_n(x) = x^n - x^2 - x - 1$.

Ta có $P_{n+1}(x) = x^{n+1} - x^2 - x - 1 = x^{n+1} - x^n + P_n(x) = x^n(x-1) + P_n(x)$.

Từ đó $P_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n-1) + P_n(x_n) = (x_n^2+x_n+1)(x_n-1) = x_n^3 - 1$.

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$(x_n^2+x_n+1)(x_n-1) = P_{n+1}(x_n) - P_{n+1}(x_{n+1}) = (x_n - x_{n+1})P'_{n+1}(c)$$

với c thuộc (x_{n+1}, x_n) , $P_{n+1}'(x) = (n+1)x^n - 2x - 1$.

Từ đó

$$(n+1)(x_{n+1} + 1 + 1/x_{n+1}) - 2x_{n+1} - 1 = P_{n+1}'(x_{n+1}) < P_{n+1}'(c) < P_{n+1}'(x_n) = (n+1)(x_n^2 + x_n + 1) - 2x_n - 1.$$

Từ đây, với lưu ý $\lim x_n = 1$, ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}'(c)}{n} = 3$$

Tiếp tục sử dụng $\lim n(x_n - 1) = 3$, ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P_{n+1}'(c)(x_n - x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = 3 \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+1}) \cdot \frac{P_{n+1}'(c)}{n} = 3 \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}'(c)}{n} = 3 \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+1}) 3 = 3 \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+1}) = \ln(3)$$

Vậy với $c = 2$ thì giới hạn đã cho tồn tại, hữu hạn và khác 0. Để thấy với $c > 2$ thì giới hạn đã cho bằng vô cùng và với $c < 2$ thì giới hạn đã cho bằng 0. Vậy $c = 2$ là đáp số duy nhất của bài toán.

Qua các ví dụ trên, chúng ta thấy công cụ cơ bản để khảo sát các dãy số cho bởi dãy các phương trình là các định lý cơ bản của giải tích (về hàm liên tục, hàm đơn điệu, định lý về sự hội tụ của dãy số đơn điệu và bị chặn, định lý Lagrange) và mối liên hệ mang tính truy hồi giữa các phương trình. Hy vọng rằng việc phân tích các tình huống ở 5 ví dụ trên đây sẽ giúp chúng ta có một cách nhìn tổng quát cho các bài toán ở dạng này.

Các bài tập về phương trình hàm

Câu 1. Xác định hàm $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn các tính chất sau

$$f(1)=2, f(xy) + f(x+y) = f(x)f(y)+1.$$

Câu 2. cho hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn phương trình

$$f(2010x) + 2009f(\sqrt{2010}x) = 2010f(x).$$

Chứng minh rằng $f(x) = f(2010^{n/2}x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^+$.

Câu 3. Cho hai hàm số liên tục $f(x), g(x)$ xác định từ đoạn $[0,1]$ vào đoạn $[0,1]$ trong $\mathbb{R}$. Chứng minh phương trình

$$g(f(x))=f(g(x))$$

có ít nhất 1 nghiệm thực trong đoạn $[0, 1]$.

Câu 4. Giả sử $g(x)$ liên tục với mọi $x \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c$. Chứng minh hàm $g(x)$ không bị chặn trên đoạn $[0, +\infty)$.

Câu 5. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Chứng minh rằng, nếu $f(f(f(0))) = 0$ thì $f(0) = 0$.

Câu 6. Tìm các hàm số f biết rằng: f khả vi và f thỏa mãn

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(f(x)) = x$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) - x = 0$ có nghiệm thực.

Câu 8. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và khả vi 2 lần trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f'(x)f''(x) = 0, \quad \text{với mọi } x.$$

Câu 9. Tìm các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(\sin x) = f(x)$, mọi x .

Câu 10. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ không âm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = e^{-x}$, ($\forall x \in \mathbb{R}$).

Câu 11. Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm hàm f biết rằng f thỏa mãn $f(2x) - f(x) = 0$, mọi x .

Câu 12. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 13. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại $x=0$ và thỏa mãn đẳng thức

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 14. Cho hàm số f khả vi trên đoạn $[0, 1]$ và có $f'(0) = f'(1) = 0$. Chứng minh phương trình $f(x) - x = 0$ có nghiệm thực nằm trong khoảng $(0, 1)$.

Câu 15. Cho hàm f liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và khả vi trong khoảng $(0, 1)$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Chứng minh phương trình $f(x) = f'(x)$ có nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Câu 16. Cho hàm f khả vi 3 lần, đồng thời các hàm $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ dương với mọi x . Chứng minh rằng $f(x) > 2009x^2$, $\forall x > 0$ với $f''(0) = 4018$.

Câu 17. Giả sử $f(x)$ là hàm chẵn, khả vi 2 lần và $f''(x)$ khác 0. Chứng minh rằng $f(x)$ nhận $x=0$ làm điểm cực trị.

Câu 18. Giả sử $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0, 1]$ và $f'(0)f'(1) < 0$. Chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Câu 19. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và f, g nhận giá trị trong đoạn $[0, 1]$, thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x))$ mọi $x \in [0, 1]$. Biết rằng f là hàm đồng biến trên đoạn $[0, 1]$. Chứng minh rằng $\exists a \in [0, 1]: f(a) = g(a) = a$.

Câu 20. Cho f là hàm số thỏa mãn $f(0) = 2$, $f(x+y) = x + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Xác định

$f(2010), f(2011), f(2012), f(2013), f(2014), f(2015), f(2016), f(2017), f(2018), f(2019), f(2020)$.

Câu 21. Cho hàm số $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)) + f(x) = 6x, \forall x > 0.$$

Chứng minh rằng $f(x)=2x$ với mọi $x>0$.

Câu 22. Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 23. Cho hàm $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[0, 1]$. Gọi $a \in [0, 1]$. Chứng

minh rằng $\int_0^a f(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx$. Trường hợp hàm $f(x)$ nghịch biến thì ta có bài toán

nào?

Câu 24. Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$, khả vi trong khoảng $(0, 1)$ và thỏa mãn $f(0)=f(1)=1$.

Chứng minh rằng phương trình $f'(x)+1=f(x)$ có nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Câu 25. Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn

$$2010f(x) > 1 > \int_0^1 f(x)dx. \text{ Chứng minh rằng phương trình } f(x) - \frac{1}{2010} = 0 \text{ có}$$

nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Câu 26. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ thỏa mãn $f(0)<0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-f)(x)dx < 1. \text{ Chứng minh pt } f(x)=\sin(-x) \text{ có nghiệm trong khoảng } (0, \frac{\pi}{2}).$$

Câu 27. Giả sử $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn $f(x)=x, x \in \{0, 1\}$,
 $0 < f'(x) < 1, \forall x \in (0, 1)$.

Chứng minh rằng tồn tại các số thực a, b thuộc khoảng $(0, 1)$ mà

$$a < b, f'(a) = \frac{1}{f'(b)}.$$

Câu 28. Giả sử f liên tục, khác hàm hằng và khả vi với mọi $x>0$. Chứng minh pt

$$xf'(x) + 2010f(2009) = f(x) + 2009f(2010)$$

có ít nhất 1 nghiệm dương.

Câu 29. Cho 4020 số thực dương $a_i, b_j, i, j = \overline{1, 2010}$. Chứng minh rằng phương trình

$$\sum_{n=1}^{2010} n(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0 \text{ có nghiệm trong khoảng } (-\pi, \pi).$$

Câu 30. Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ ($a<b$), $f(a)>0$ và $\int_a^b f(x)dx - 1 < 0$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) - x^{2010} = 0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (a, b) .

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0)-1=0$, $f(1)-1=0$, $2010 f'(x) + af(x) - a = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x)=1$ trên đoạn $[0, 1]$.

Câu 32. Chứng minh rằng tồn tại số thực x trong khoảng $(0, 1)$ thỏa mãn pt

$$\frac{\int_0^1 u^{2010} du}{\prod_{x=1}^{2010} (1+u^x)(1+u^{2x}) \dots (1+u^{2^{2010}x})} = \frac{x^{2010}}{\prod_{x=1}^{2010} (1+x^x)(1+x^{2x}) \dots (1+x^{2^{2010}x})}.$$

Câu 33. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ thỏa mãn $xf(x-1)=(x-2010)f(x)$ mọi x .

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f'(x) = x^{2010} + x^{2009} + \dots + x + 1, \quad f(1) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2011}.$$

Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu nghiệm thực.

Câu 35. Cho đa thức bậc 2010 có 2010 nghiệm thực khác nhau $a_k, k=1, 2, \dots, 2010$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{f'(a_1)} + \dots + \frac{1}{f'(a_{2010})} = 0$.

Câu 36. Cho hàm số $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp hai liên tục và $f''(x) > 0$ trên đoạn

$[0, 1]$. Chứng minh rằng $\int_0^1 [f(t) + f(0)] dt \geq 3 \int_0^1 t^2 f(t) dt$.

Câu 37. Cho f, g là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(g(x))=g(f(x))$ mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x)=g(x)$ không có nghiệm thực thì phương trình $f(f(x))=g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Câu 38. Cho $f(x)-x, f(x)-x^3$ là các số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Câu 39. Cho đa thức $f(x)$ bậc n với hệ số thực. Chứng minh rằng phương trình $2^x = f(x)$ có không nhiều hơn $n+1$ nghiệm thực.

Câu 40. Cho $f(x)-x, f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ là các số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Liệu hàm số $f(x)-x^3$ có phải là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ không ?

Các bài tập về giới hạn hàm số

Câu 1. Tính các giới hạn sau

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} e^{-x}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e\right)n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \pi \sqrt{n+n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})^{\frac{1}{n}}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos n; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2 n; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^2 n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \tan(\tan x)}{\sin x - \tan x}.$$

Câu 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right).$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{1.2010}{n} + \sin \frac{2.2010}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)2010}{n} \right).$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right).$

Câu 3. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn $|f(x)| + |f'(x)| > 0, \forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng tập hợp $\{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$ hữu hạn.

Câu 4. cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$ thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Ký hiệu

$$m = \inf \{ f(x) : x \in [0, 1] \}, M = \sup \{ f(x) : x \in [0, 1] \}.$$

Chứng minh rằng $mM + \int_0^1 f^2(x) dx \geq 0$.

Câu 5. Cho ánh xạ liên tục $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 0+} x \int_x^1 \frac{1}{t^2} f(t) dt$.

Câu 6. Cho số thực x , ký hiệu $[x]$ chỉ số nguyên của x và không vượt quá x . Chứng minh rằng $[x + 0,5] + [x] = [2x]$.

Câu 7. Cho f là hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 0$, mọi x . Chứng minh rằng pt $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thực.

Câu 8. Cho f là hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+y) = f(x) + f(y)$, với mọi số thực x, y . Xác định hàm số f .

Câu 9. Cho hàm số f khả vi liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn $f(1) - f(0) = 1$. Chứng minh rằng $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$.

Câu 10. Cho hàm f liên tục trên khoảng $[0, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx$.

Câu 11. Cho $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm thỏa mãn $\forall x \in (a, b), |f'(x)| + |f(x)| > 0, |f'_+(a)| + |f(a)| > 0$ và $|f'_-(b)| + |f(b)| > 0$.

Chứng minh rằng tập hợp $M = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$ là hữu hạn.

Câu 12. Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục, tăng trên đoạn $[a, b]$ và có $f(a) < a, f(b) < b$. Với $x_1 \in [a, b]$ tùy ý chúng ta lập dãy $(x_n)_n$ như sau:

$$\text{Đặt } x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại x^* sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*, f(x^*) = x^*$.

Câu 13. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \frac{\sin(2010x)}{\sin x} dx$.

Câu 14. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arcsin(1 - \frac{1}{n}) \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \dots \cos \frac{\pi}{2^n} = 1$.

Câu 15. Cho dãy (x_n) được xác định theo công thức sau

$$x_1 = 1, x_2 = 1$$

$$x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}), n = 3, 4, \dots$$

Xác định công thức tổng quát cho x_n .

Câu 16. Tìm tất cả các hàm f từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(x) = 2010x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Câu 17. Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định theo công thức

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + x_n^2}, y_{n+1} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, n = 2, 3, \dots$$

a. Chứng minh rằng với mọi $n=2,3,\dots$ thì $x_n y_n \in (2, 3)$.

b. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Câu 18. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1}}, n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

Các bài tập về tích phân

Câu 1. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

b. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > b, b > 0)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \cos x^n dx$

Câu 2. Cho hàm $f(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, 1]$. Giả sử $\int_0^1 \ln f(x) dx = a$. Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f(1/n) f(2/n) \dots f(n/n)}.$$

Câu 3. Cho f là hàm số khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = 0, n = 0, 1, 2, \dots \text{ Chứng minh rằng } f = 0 \text{ trên đoạn } [a, b].$$

Câu 4. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$.

Câu 5.

a. Tính các giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2(\sin x)}{x^2}, \quad J = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{32} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\pi}{2^n}.$$

b. Tính tích phân $K = \int_0^{2\pi} \sin[\sin(2010x) + \sin x] dx$.

c. Tính giá trị của biểu thức $\sum_{k=1}^{2010} \sum_{n=k}^{2010} \frac{1}{n^2 + (3-2k)n + (k^2 - 3k + 2)}$.

Câu 6. Cho $0 < a < b$. Tính tích phân

a. $I(t) = \int_0^1 (x + a(1-x)^2) dx$.

b. $\lim_{t \rightarrow 0} [I(t)]^{\frac{1}{t}}$.

Lời giải:

a. Đặt $t = bx + (1-x)a$, ta có

$$I(t) = \int_0^1 (x + a(1-x)^2) dx = \int_a^b \frac{t_1}{b-a} dt = \frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(t+1)^t (b-a)}.$$

b. $\lim_{t \rightarrow 0} [I(t)]^{\frac{1}{t}} = e^{-1} \frac{b}{a}$.

Các bài tập thêm về tính toán

Câu 1. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ với $s_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

Câu 2. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ với $s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right)$.

Câu 3. Tính tổng $P_n = \sum_{k=1}^n k(\cos(kx) + \sin(kx))$.

Câu 4. Tính tổng $Q_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right) \tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$.

Câu 5. Tính tổng $R_n = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^k}\right)$.

Các bài tập về bất đẳng thức

Câu 1. Giả sử $\alpha = \sqrt[n]{2}$, $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{2^{1-n}}{\prod_{k=0}^{n-1} |p_k|} \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} p_k \alpha^k \right|.$$

Câu 2. Cho a, b là hai số thực không âm và hai số thực dương p, q sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Hướng dẫn: Khi $b=0$ BĐT hiển nhiên đúng, ngược lại xét hàm

$$f(t) = \frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{\frac{1}{p}}, \quad (t > 0).$$

Chứng minh $f(t)$ đạt cực tiểu tại $t=1$. Lấy $t = a^p b^{-q}$ suy ra đpcm, dấu bằng $a^p = b^q$.

Câu 3. Cho $2n$ số thực $a_k, b_k, k = \overline{1, n}$, và hai số thực dương p, q sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Chứng minh rằng

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Câu 4. Cho f, g là các hàm số liên tục trên $[a, b]$ và hai số thực dương p, q sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Câu 5. Cho hai hàm f, g liên tục trên $[a, b]$ với $a < b$ và số thực dương $p \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \int_a^b |f(x)|^p dx + \int_a^b |g(x)|^p dx.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Câu 6. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(a)=f(b)=0$, với $a < b$. C. Đặt

$M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Chứng minh rằng

a. $\int_a^b f'(x)(x-a)(-x+b)dx + 2 \int_a^b f(x)dx = 0$.

b. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$.

Lời giải: Dùng định nghĩa tích phân thường.

Câu b sử dụng kết quả câu a.

Câu 7. Xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a. $f(x) = e^{2804x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

b. $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Đặt $f(x) = e^{2804x} g(x)$.

Từ đk a suy ra $g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đk b suy ra $g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Thay $x=0=y$ ta thu được

$$\frac{g(0) - [g(0)]^2}{g(0) - 1} = g(0) = 1.$$

Suy ra $1 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x) = 1 + g(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta kết luận: $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Các định lý về giá trị trung bình chiếm một địa vị quan trọng trong giải tích toán học và được khai thác thường xuyên trong các cuộc thi Olympic toán sinh viên, học sinh toàn quốc và quốc tế. Đây cũng là một đề tài gây nhiều niềm say mê nghiên cứu khoa học cho những học viên cao học và đối tượng nghiên cứu sinh ngành Toán.

Các định lý về giá trị trung bình là một công cụ rất hiệu lực trong việc khảo sát, chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình và các tính chất định lượng nghiệm của nhiều dạng phương trình không mẫu mực. Trong bài viết này tôi xin giới thiệu những ứng dụng của định lý về giá trị trung bình trong các lĩnh vực: Liên tục, khả vi và khả tích.

1. Ứng dụng trong hàm liên tục

1.1. Các định lý liên quan nghiệm của phương trình:

1.1.1. Định lý 1. Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a; b]$ thỏa mãn $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ để $f(c) = 0$.

1.1.2. Định lý 2. Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) = A; f(b) = B$. Lúc đó nếu λ là một số bất kỳ nằm giữa A và B thì có ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ để $f(c) = \lambda$.

1.1.3. Định lý 3. Nếu hàm f liên tục trên $[a; b]$ thì f nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của nó trên đoạn đó.

1.2. Các bài toán

1.2.1. **Bài toán 1:** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị khác dấu. Chứng minh rằng tìm được cấp số cộng a, b, c sao cho $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Lời giải:

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và nhận giá trị khác dấu nên $\exists \delta > 0$ đủ bé và hai số x_0, x_1 sao cho:

$f(x) < 0$ tại các điểm $x_0 - \delta; x_0; x_0 + \delta$

$f(x) > 0$ tại các điểm $x_1 - \delta; x_1; x_1 + \delta$

Xét hàm số:

$$F(t) = f(x_0 - \delta + t(x_1 - x_0)) + f(x_0 + t(x_1 - x_0)) + f(x_0 + \delta + t(x_1 - x_0)), t \in [0; 1]$$

$F(t)$ là hàm liên tục trên $[0; 1]$ và $F(0) < 0; F(1) > 0$. Do đó $\exists t_0 \in (0; 1)$ sao cho $F(t_0) = 0$.

Đặt $a = x_0 - \delta + t_0(x_1 - x_0); b = x_0 + t_0(x_1 - x_0); c = x_0 + \delta + t_0(x_1 - x_0)$.

Do $\delta > 0$ nên $a < b < c$ và $b - a = c - b = \delta$ nên a, b, c theo thứ tự trên lập thành một cấp số cộng.

1.2.2. **Bài toán 2:** Cho hai hàm số liên tục $f(x)$ và $g(x)$ trên $[a; b]$ thỏa mãn

$0 < g(x) < f(x), \forall x \in [a; b]$. Chứng minh rằng tồn tại $\lambda > 0$ để

$(1 + \lambda)g(x) < f(x), \forall x \in [a; b]$.

Giải:

Xét hàm số: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên $[a; b]$

Vì $0 < g(x) < f(x) \forall x \in [a; b]$ nên $h(x) > 1 \forall x \in [a; b]$

Theo tính chất của hàm số liên tục ta có:

$\exists x_0 \in [a; b]: h(x_0) = \mu = \min_{x \in [a; b]} h(x) = h(x_0) > 1$.

Chọn $\lambda = \frac{\mu-1}{2}$ thì $(1+\lambda)g(x) < \mu g(x) \quad f(x) \quad \forall \quad [a;b]$. Từ đây, ta có điều phải chứng minh.

1.2.3. Bài toán 3: *Tồn tại hay không hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho khi x vô tỉ $f(x)$ nhận giá trị hữu tỉ, còn khi x hữu tỉ $f(x)$ nhận giá trị vô tỉ.*

Giải:

Giả sử có hàm $f(x)$ như bài toán yêu cầu. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm $g(x)$ liên tục và chỉ nhận giá trị vô tỉ. Nếu $g(x)$ nhận ít nhất hai giá trị g_1, g_2 ; $g_1 < g_2$ thì do tính trù mật của $\mathbb{R}$ có số hữu tỉ: $g_0: g_1 < g_0 < g_2$. Theo định lý về giá trị trung gian, $g(x)$ nhận cả giá trị g_0 . Điều này mâu thuẫn. Vậy $g(x) = C$ với C là hằng số vô tỉ. Như vậy $f(x) = x + C$. Từ đó $f(C) = 2C$. $f(C)$ là hữu tỉ trong khi $2C$ vô tỉ. Mâu thuẫn này chứng tỏ không tồn tại hàm $f(x)$ nào như bài toán yêu cầu.

2. Ứng dụng trong hàm khả vi

2.1. Các định lý cơ bản:

2.1.1. Định lý 4 (Định lý Rolle). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trên khoảng $(a;b)$ và $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

2.1.2. Định lý 5 (Định lý Lagrange). Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2.1.3. Định lý 6 (Định lý Cauchy). Cho các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$ và $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

2.2. Các bài toán minh họa:

2.2.1. **Bài toán 4:** Cho f liên tục trên $[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$ và có đạo hàm cấp hai trên đó. Chứng minh với mọi $c \in (a,b)$ thì tồn tại số $\alpha \in (a,b)$ sao cho

$$f(c) = \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f''(\alpha).$$

Lời giải:

Xét hàm số: $g(x) = f(x) - (x-a)(x-b) \cdot \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$

Vì $g(x)$ liên tục trên $[a, c]$, $[c, b]$, khả vi trên (a, c) , (c, b) và $g(a) = g(b) = g(c) = 0$ nên theo định lý Rolle ta có

$$\exists d_1 \in (a, c) : g(d_1) = 0, \exists d_2 \in (c, b) : g(d_2) = 0$$

Mặt khác $g(x) = f(x) - (2x - a - b) \cdot \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$

$$g(x) = f(x) - \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

$g(x)$ liên tục trên $[d_1, d_2]$, khả vi trên (d_1, d_2) và $g(d_1) = g(d_2) = 0$ nên theo định lý Rolle $\exists \alpha \in (d_1, d_2) : g(\alpha) = 0$ $f(c) = \frac{1}{2}(c-a)(c-b) f'(\alpha)$.

2.2.2. Bài toán 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, khả vi trên $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sao cho

$$f(0) = f(\frac{\pi}{2}); f^2(x) + f^2(x) \geq 0 \quad \forall x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \text{ Chứng minh rằng tồn tại } c \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

sao cho : $\cos^2 c = \frac{1}{2} - \frac{f(c)f'(c)}{f^2(c) + f^2(c)}$.

Lời giải: Xét hàm số: $g(x) = f(x)(\sin x + \cos x)$

$$g'(x) = -\sin x f(x) - f(x) \cos x + f(x)$$

$g(x)$ liên tục trên $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, khả vi trên $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ và $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$. Theo định lý

Lagrange: $\exists c \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : g(c) = 0 \Rightarrow -\sin c f(c) - f(c) \cos c + f(c) = 0$

$$\tan c = \frac{f(c) + f'(c)}{f(c) - f'(c)}. \text{ Sử dụng công thức lượng giác: } 1 + \tan^2 c = \frac{1}{\cos^2 c}, \text{ ta dễ}$$

dễ dàng suy ra được: $\cos^2 c = \frac{1}{2} - \frac{f(c)f'(c)}{f^2(c) + f^2(c)}$.

2.2.3. **Bài toán 6:** Giả sử f và g khả vi trên đoạn $[a, b]$, trong đó $g'(x) \neq 0$,

$g'(x) \neq 0$. Hãy chứng minh rằng:
$$\frac{1}{g(b) - g(a)} \left| \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{g'(c)} \left| \begin{vmatrix} f(c) & g(c) \\ f(c) & g(c) \end{vmatrix} \right|$$
 với $c \in (a, b)$.

Giải:

Xét các hàm số sau: $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\psi(x) = \frac{1}{g(x)}$

Vì f và g là hai hàm khả vi trên $[a, b]$ nên φ và ψ cũng khả vi trên $[a, b]$

Theo định lý Cauchy $\exists c \in (a, b) : \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$

$$\frac{\frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{\frac{1}{g(b)} - \frac{1}{g(a)}} = \frac{\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}}{-\frac{g'(c)}{g^2(c)}}$$

$$\frac{1}{g(b) - g(a)} \left| \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{g'(c)} \left| \begin{vmatrix} f(c) & g(c) \\ f(c) & g(c) \end{vmatrix} \right|.$$

3. Ứng dụng trong hàm khả tích

3.1. Các định lý:

3.1.1. Định lý 7. Nếu f là một hàm liên tục trên $[a; b]$ thì tồn tại một số $c \in (a; b)$

sao cho:
$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

3.1.2. Định lý 8: Nếu các hàm số $f(x)$, $\varphi(x)$ khả tích trên đoạn $[a; b]$; $\varphi(x)$

không thay đổi dấu trong khoảng $(a; b)$. Ký hiệu: $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$; $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$

thì tồn tại số $\mu : m \leq \mu \leq M$ sao cho:
$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Hơn nữa, nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì tồn tại $c \in [a; b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

3.2. Các bài toán:

3.2.1. **Bài toán 7:** Cho f là một hàm liên tục trên $[0; +\infty)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = q > 0$ và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = q.$$

Lời giải:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = q.$$

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân thì $\exists c_i \in [i-1; i]$ $i = \overline{1; n}$ sao cho

$$\int_{i-1}^i f(x) dx = f(c_i).$$

$$\forall \epsilon > 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) = q.$$

$$\text{Suy ra: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) = q.$$

3.2.2. **Bài toán 8:** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ sao cho $\forall [\alpha; \beta] \subset [a; b]$ ta có:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq M |\beta - \alpha|^{1+\delta} \text{ với } M > 0; \delta > 0. \text{ Chứng minh rằng } f(x) = 0 \text{ trên } [a; b].$$

Lời giải:

$\forall x_0 \in [a; b]$ chọn h đủ bé để $x_0 + h \in [a; b]$.

Khi đó theo định lý trung bình tích phân tồn tại c ở giữa x_0 và $x_0 + h$ để

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \right| \leq M |h|^{1+\delta} \Rightarrow \left| f(c) \right| \leq M |h|^{\delta}$$

Cho $h \rightarrow 0$ ta được $f(x_0) = 0$; $\forall x_0 \in [a; b]$. Nói cách khác $f(x) = 0$ trên $[a; b]$.

Phần 2. ĐẠI SỐ

Nói đến đại số chúng ta liên tưởng đến ngay các phép toán đại số, tuy là công cụ đơn giản là tính toán để mà tính toán nhưng việc tính toán phải được chính xác

hoá, phải biết vận dụng nhiều quy tắc của số học, vì vậy việc tính toán đôi khi không hề đơn giản như chúng ta nghĩ. Môn đại số không nằm ngoài nội dung ôn thi Olympic hằng năm của sinh viên mà cụ thể là chuyên đề ma trận và đa thức. Vì vậy sinh viên cần nắm vững hai chuyên đề này một cách rõ ràng.

Để học tốt và nắm vững sinh viên cần phải rèn luyện giải toán thường xuyên và phải vận dụng linh hoạt các kiến thức đã được học ở nhà trường. Lưu ý đến vấn đề tính toán định thức và trận bậc n , đa thức, phép chia hết bằng định lý Bêdu, thường trong kỳ thi người ta hay ra cho ma trận mũ các bạn suy ra ma trận ban đầu, mũ 1, các nghiệm đa thức trong khoảng (a, b) các bạn phải liên tưởng đến định lý Rolle, Cauchy, hay Lagrăng chẳng hạn. Cái khó là tìm đa thức thỏa mãn điều kiện cho trước, chẳng hạn ràng buộc đẳng thức, nhớ đến các đa thức bất khả quy, đa thức Lagrang, đa thức liên hệ ma trận vuông...

Tóm tắt lý thuyết:

A	MA TRẬN, ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN
----------	---------------------------------------

1. Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$, vết của A là số $tr(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$.
2. Hạng của A , ký hiệu $rank(A)$ bằng định thức con cấp cao nhất của A . Đặc biệt $rank(A) = n$, thì A được gọi là ma trận không suy biến và ngược lại A là suy biến.
 1. Ma trận A được gọi là ma trận đường chéo nếu $A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$.
 2. Định thức của A là số $\det(A) = (-1)^{1+i} M_{1i} + \dots + (-1)^{n+i} M_{ni}$, M_{ij} ma trận phụ hợp của A bỏ đi hàng i , cột j .
 3. λ được gọi là trị riêng của A nếu $\det(A - \lambda E) = 0$. Nếu tồn tại vector $x \neq 0, Ax = \lambda x$, thì x được gọi là vector riêng ứng với trị riêng λ .
 4. A được gọi là nghiệm của đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ nếu $f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_nA^n = 0$. (ma trận không cấp n)
 5. Giả sử $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, n)$ là n giá trị riêng của ma trận vuông cấp n (A), khi đó đa thức đặc trưng của A là

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$
 Nếu $f(x)$ là đa thức tùy ý thì $f(A)$ có các giá trị riêng là

$$(f(\lambda_k) (k = 1, 2, \dots, n) \text{ và } \det(f(A)) = \prod_{k=1}^n f(\lambda_k).$$
6. Các bất đẳng thức về hạng của hai ma trận vuông A, B cùng cỡ n

$$rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B).$$

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)).$$

7. Ma trận A, B cùng cỡ n được gọi là giao hoán nếu $AB=BA$.
8. Ma trận vuông A được gọi là đối xứng nếu $A=A^T$.
9. Ma trận vuông A được gọi là phản đối xứng nếu $A=-A^T$.
10. Ma trận không có tính giao hoán nhưng có tính kết hợp.
11. Ma trận A được gọi là lũy đẳng nếu $A^2=A$, gọi là đối hợp nếu $A^2=E$.
12. Ma trận vuông A được gọi là lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$A^k = 0.$$

B. ĐA THỨC.

1. Cho hai đa thức $f(x)=a_0+a_1x+.....+a_nx^n$, $g(x)=b_0+b_1x+.....+b_mx^m$. Tích của hai đa thức $f(x), g(x)$ là một đa thức $h(x)=c_0+c_1x+.....+c_{n+m}x^{n+m}$, Khi đó $\deg(f(x))=n$ gọi là bậc của đa thức $f(x)$ với $a_n \neq 0$. Công thức bậc của đa thức tích:

$$\deg(h(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x)).$$

Công thức tính $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

2. Đa thức thực bậc n có tối đa n nghiệm, đa thức phức bậc n có n nghiệm phân biệt.

3. Nếu c là nghiệm của đa thức $f(x)$ thì $f(x)=(x-c)g(x)$, với $\deg(g(x))+1=\deg(f(x))$.

4. $r = \frac{p}{q}$, $(p, q)=1$, là nghiệm của đa thức $f(x)$ thì $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

5. $r = \frac{p}{q}$, $(p, q)=1$, là nghiệm của đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên thì $p \mid f(0)$, $p-q \mid f(1)$.

6. Hệ thức viết về nghiệm của đa thức : Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các nghiệm của đa thức $f(x)$, với $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_{n-1}x+a_n$. Khi đó

$$\sum_{k=1}^n x_k = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$x_i x_j = \frac{a_2}{a_0}; \dots;$$

$$\sum_{k=1}^n x_k^n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Sinh viên lưu ý đến lưu đồ Horner về chia đa thức.

7. Đa thức chia hết: Đa thức $f(x)$ được gọi là chia hết cho đa thức $g(x)$, ký hiệu $f(x):g(x)$, nếu mọi nghiệm của $g(x)$ đều là nghiệm của $f(x)$.

8. Đa thức liên tục, khả vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$ nên sử dụng định lý Rolle, định lý Côsi và trị trung bình cho các thức thức.

9. SV về tự khai triển Taylor cho đa thức tại $x=c$.
 10. Nghiệm bội của đa thức: Nghiệm $x=c$ được gọi là nghiệm bội k của đa thức $f(x)$, nếu $f^{(i)}(c)=0, i \leq k-1, f^{(k)}(c) \neq 0$.

Các bài tập về ma trận: Các tính toán ma trận, định thức ma trận, trị riêng, vector riêng ma trận số

Câu 1. Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (E - A^x)$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 2. Tìm tất cả các ma trận thực vuông cấp hai A thỏa mãn

a. $A^2 = 0$. b. $A^3 = 0$. c. $A^2 = E$. d. $A^3 = E$. e. $A^4 = E$.

Câu 3. Chứng minh tồn tại các ma trận thực vuông cấp hai thỏa mãn phương trình $X^2 + X - 2010^2 E = 0$.

Câu 4. Giả sử các ma trận $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2010 & -2011 \end{pmatrix}$ và $A' = \begin{pmatrix} 2011 & 1 \\ 2010 & 2010 \end{pmatrix}$ thỏa mãn điều kiện $X^2 - (a+d)X - (ad-bc)E = 0$. Xác định a, b, c, d .

Câu 5. a. Giả sử $A^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Xác định tỉ số $\frac{b}{c}$.

b. Giả sử $A^m = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}(m) \\ 0 & a_{22}(m) \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn của hệ thức $\frac{a_{12}(m)}{a_{22}(m)}$. Tính giới hạn đó khi $m \rightarrow +\infty$.

Câu 6. Tìm ma trận $X(t)$ từ phương trình $X'(t) = AX(t) - X(t)A, X(0) = B$ với

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 7. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Câu 8. Giả sử rằng $\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_n$.

Hãy biểu diễn Δ_{n+2} qua Δ_n, Δ_{n+1} ($n > 0$). Tính Δ_n .

Câu 9. Cho $\Delta = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}_n$. Tính Δ^n và tính tổng các phần tử dòng 1 của ma

trận Δ^n ($n=1,2, \dots$).

Câu 10. Giả sử A là ma trận vuông cấp n có bình phương bằng ma trận đơn vị.

Chứng minh rằng $\text{rank}(A-E) + \text{rank}(A+E) = n$.

Câu 11. Giả sử A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^{2010} = 0$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có $\text{rank}(A) = \text{rank}(A + A^2 + \dots + A^n)$.

Câu 12. Giả sử A là ma trận vuông cấp n mà các phần tử trên đường chéo chính là 0, các phần tử khác là 1. Chứng minh rằng ma trận A^{2n} khả nghịch, ma trận A^{2n+1} có thể không khả nghịch.

Câu 13. Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\mathbf{R}$. Tìm a, b, c sao cho $A^{2010} = E$.

Câu 14. Cho A là ma trận vuông cấp hai và $k > 2$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng $A^k = 0$ khi và chỉ khi $A^2 = 0$.

Câu 15. Tìm φ thỏa mãn $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = E$.

Câu 16. Cho x là số thực khác 0. Tính $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}_n$.

Câu 17. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2010}$. Tính $\sum_{k=0}^{2010} A^k$ ($A^0 = E$).

Câu 18. Cho A, B, C là ba ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh rằng
 $rank(AB) + rank(BC) \leq rank(B) + rank(ABC)$.

Câu 19. Giả sử A, B là hai ma trận vuông cấp n .

- CMR AB và BA có cùng một tập hợp giá trị riêng.
- Có xảy ra đẳng thức $AB - BA = E$ không ?
- Liệu AB, BA có cùng một đa thức đặc trưng không?
- Tìm A, B thoả mãn $\det(A) + \det(B) = \det(A+B)$.
- Giả sử $E-AB$ khả nghịch, chứng minh $E-BA$ khả nghịch.

Câu 20. Tính định thức vuông cấp 2010 của ma trận A , với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Câu 21. Cho A là ma trận vuông cấp n . Chứng minh rằng với mọi ma trận thực B vuông cấp n mà $\text{tr}(AB)=0$ thì $A=0$.

Câu 22. Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng. Chứng minh rằng
 $\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(AABB) = 0$.

Câu 23. Giả sử A là ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0. Chứng minh tồn tại các ma trận vuông cấp n là B và C thoả mãn
 $A = BC - CB$.

Câu 24. Chứng minh rằng

1	2	3	...	2009	2010
2^2	3^2	4^2	...	2010^2	2011^2
3^3	4^3	5^3	...	2011^3	2011^3
.....					
2010^{2010}	2011^{2011}	2011^{2011}	...	2011^{2011}	2011^{2011}

0.

Câu 25. Tìm số thực x thoả mãn $\det$

$-x$	1	0
0	$-x$	1
0	0	$-x$
.....		
2010^{2010}	0	$-x$
0	$-x$	1
0	0	$-x$

0.

Câu 26. Tìm ma trận A thoả mãn $A^{2010} =$

2^{2010}	2^{2010}	-1	0
0	1	0	0
0	0	2^{2010}	0

Câu 27. Tìm ma trận vuông A cấp 2 có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0 thỏa mãn $A^{2012} = E$.

Câu 28. Giải hệ phương trình

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots x_{11} - x_{12} = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots\dots\dots x_k = 1$$

Câu 29. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cỡ giao hoán với nhau và thỏa mãn $A^{2010} = E = B^{2020}$. Chứng minh rằng ma trận $A+B+E$ khả nghịch.

Câu 30. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tính $(A + E)^n, n = 1, 2, 3, \dots$

Câu 31. Cho vết của ma trận A là $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Chứng minh rằng nếu P là một ma trận vuông cấp n khả nghịch thì $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$.

Câu 32. Một ma trận A được gọi là đồng dạng với ma trận B nếu tồn tại một ma trận T không suy biến sao cho $B = T^{-1}AT$. Chứng minh rằng nếu A đồng dạng với ma trận đường chéo, thì $f(A)$ cũng vậy, với $f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_mA^m, a_i \in R, A$ là ma trận vuông cấp n hệ số thực và E là ma trận đơn vị cùng cỡ A

Câu 33. Cho 2 ma trận vuông A, B có cấp bằng n . Ký hiệu $rank(A), rank(B)$ là hạng của ma trận A, B tương ứng. Chứng minh các khẳng định sau

a. $rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$.

b. $rank(A) + rank(B) - n \leq rank(AB) \leq \min(rank(A), rank(B))$.

Câu 34. Tính A^{2010} , với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 35. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(\arg \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 2\sin\left(\arg \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) & -5\sin\left(\arg \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ \sin\left(\arg \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) & \cos\left(\arg \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sin\left(\arg \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{pmatrix}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$.

Câu 36. Cho $A(a) = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$

a. Tính $A(\alpha).A(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n \left(\sin \frac{1}{n^2} \right)$.

Câu 37. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2010 & 1 \\ 0 & 2011 \end{pmatrix}$

a. Tính A^n .

b. Giả sử $A^{2010} = 0$, CMR $A^2 = 0$.

Câu 38. Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 2 & -5 \\ 1 & \sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}$$

Tính A^{2010} , B^{2010} , C^{2010} .

Câu 39. Tính ma trận mũ 2010: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2010}$.

Câu 40. Tính định thức với a, b, c, x là các số thực:

$$\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+b & x \\ x & x & x+c \end{vmatrix}.$$

Câu 41. Cho ma trận A có dạng $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x^T = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$.

a. Tính $x, Ax, \dots, A^{n-1}x$, $n=1, 2, \dots$ và chứng minh hệ đó độc lập tuyến tính.

b. Chứng minh rằng nếu A đồng dạng với ma trận $B = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ khác nhau từng đôi một.

c. Tính A^n .

Câu 42. Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp 2011. Chứng minh rằng nếu $AB=0$ thì ít nhất một trong hai ma trận $A+A^T, B+B^T$ suy biến.

Câu 43. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2010} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2011} \\ \frac{1}{2010} & \frac{1}{2011} & \frac{1}{2012} & \frac{1}{4019} \end{vmatrix} = 0.$$

Câu 44. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^k \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+k}^0 & C_{n+k}^1 & \dots & C_{n+k}^k \end{vmatrix}$$

với C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử và n, k là các số tự nhiên.

Câu 45. Tính định thức $\det(A) = \left| \min(i, j) \right|_{i, j=1}^{2010}$.

Câu 46. Tính định thức:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 & 5 & 2010 \\ 3 & 6 & 2 & 6 & ? \\ 0 & 5 & 5 & 3 & ? \\ 5 & 3 & 3 & 3 & ? \end{vmatrix}.$$

Câu 47. Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \dots + \frac{1}{2010}x_{2010} &= 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \dots + \frac{1}{2011}x_{2010} &= 0 \\ \dots & \\ \frac{1}{2010}x_1 + \frac{1}{2011}x_2 + \dots + \frac{1}{4009}x_{2010} &= 0 \end{aligned}$$

Câu 48. Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình

$$\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^k \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+k}^0 & C_{n+k}^1 & \dots & C_{n+k}^k \end{vmatrix} X = \begin{vmatrix} C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^k \\ C_{n+2}^0 & C_{n+2}^1 & \dots & C_{n+2}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+k+1}^0 & C_{n+k+1}^1 & \dots & C_{n+k+1}^k \end{vmatrix}$$

Câu 49. Cho f là toán tử tuyến tính và các vector khác không $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $x_1 = f(x_1), x_i + x_{i+1} = f(x_{i+1}) \langle i=1, 2, \dots, n-1 \rangle$.

Chứng minh các vector $x_1, x_2, \dots, x_n$ độc lập tuyến tính.

Câu 50. Tìm một ví dụ về các ma trận cùng cấp X, Y sao cho các giới hạn $\lim_n X^n, \lim_n Y^n$ tồn tại nhưng không tồn tại $\lim_n (XY)^n$.

Câu 51. Cho $A_k, k=1, (n+1)$ là các ma trận vuông cỡ n . Chứng minh rằng tìm được $n+1$ số $\delta_k, k=1, 2, \dots, n+1$ với $\delta_k^2 > 0$ thỏa mãn $\det(\sum_{k=1}^{n+1} \delta_k A_k) = 0$.

Câu 52. Trên đường chéo của ma trận vuông A cỡ n là các số 0, các phần tử còn lại là 1 hoặc 2011. Chứng minh rằng

$$[\text{rank}(A)-n].[\text{rank}(A)-n+1]=0.$$

Câu 53. Xét các ma trận đối xứng thực cấp 2 là $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ có các trị riêng a, b . Tìm GTLN, GTNN mà a_{12} có thể nhận.

Câu 54. Giả sử $A = (i \cdot j)_{i,j=1}^n$. Xét đa thức $f(x) = \det(AX + E)$. Xác định $f'(0)$.

Câu 55. Có tồn tại ma trận vuông cấp 6 chỉ gồm các số -1, 0, 1 có định thức bằng 10 không?

Câu 56. a. Cho ma trận vuông A và E là ma trận đơn vị cùng cấp A . Tính

$$\frac{((A+E)^n - (A+E)^n)}{2}.$$

b. Chứng minh rằng

nếu $A^2 = E$ thì $\text{rank}(A-E) + \text{rank}(A+E) = n$ với n là cấp của ma trận E .

Câu 57. Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp n . Nếu như đối với cột A có $AX=0$ thì $BX=0$. Liệu có tồn tại ma trận S thỏa mãn $B=SA$ không?

Câu 58. Cho A là ma trận vuông. Chứng minh rằng

- Nếu A là lũy linh thì $A - E, A+E$ là khả nghịch.
- Nếu A là lũy linh thì A suy biến.
- Nếu A là lũy linh thì mọi giá trị riêng của A đều bằng 0.
- Nếu $A-E$ là lũy linh thì mọi giá trị riêng của A đều bằng 1.

Câu 59. Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp giao hoán nhau. Chứng minh rằng

- Nếu A, B lũy linh thì $A+B$ cũng lũy linh.
- Nếu A, B lũy linh thì $E+(A+B), E-(A+B)$ khả nghịch.
- Nếu $A-E, B-E$ lũy linh và $AB=BA$ thì $AB-E$ cũng lũy linh.

Câu 60. Chứng minh rằng ma trận sau lũy linh

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Câu 61. Tính A^{100} với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Câu 62. Cho A là ma trận vuông cấp n , $\chi_K(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$ là đa thức đặc trưng của ma trận A . Chứng minh rằng

- $a_n = (-1)^n$.
- $\text{tr}(A) = a_{n-1}(-1)^{n-1}$.
- $\det(A) = a_0$.

HD giải: Ký hiệu $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - k, & i = j \\ a_{ij}, & i \neq j \end{cases}$, $1 \leq i, j \leq n$. Dùng định nghĩa định thức

để tính $\det(A)$. Với các kết này sv nhớ công thức sau đây và phải lưu ý cách dùng khi nào là phù hợp. Đa thức đặc trưng của A là

$$\chi_K(k) = (-1)^n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = \det(A - kE).$$

Sv lưu ý rằng: Ma trận vuông A với hệ số thực là đối xứng thì A có các trị riêng thực.

A tùy ý thì AA^T , $A^T A$ có các trị riêng thực vì chúng là các ma trận đối xứng.

Để tính $f(A)$, với A là ma trận vuông, $f(x)$ là đa thức, chúng ta làm như sau:

- Tính $\det(A - kE)$
- Chia $f(x)$ cho đa thức $\det(A - xE)$ được đa thức dư là $r(x)$.
- Khi đó $f(A) = r(A)$ và hiển nhiên ma trận A tính được dễ dàng.

Câu 63. Cho đa thức $f(x) = -x^8 + 6x^7 - 12x^6 + 8x^5 - x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x + 1$ và A là ma trận thực vuông cấp 3 có đa thức đặc trưng là $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$. Tìm

ma trận A biết rằng $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Câu 64. Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Tìm trị riêng và vector riêng của A .
- Tính $(B^{-1}AB)^{2010}$.

Câu 65. Giả sử ma trận thực A vuông cấp 2010 có 2010 trị riêng λ_k ($k = 1, 2, \dots, 2010$). Tính $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Câu 66. Cho đa thức $f(x) = x^{2010} + x^2 - 1$. Tính $\det f(A)$.

Câu 67. Tính $\begin{vmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{vmatrix}^{2010}$.

Câu 68. Giả sử $x(k)$ là vector riêng của ma trận S với giá trị riêng k . Chứng minh rằng $x(k)$ là vector riêng của ma trận $S^2 - 3A + 5E$. Giá trị riêng tương ứng là bao nhiêu?

Câu 69. Cho A, B là hai ma trận vuông đồng dạng, nghĩa là tồn tại ma trận T khả nghịch sao cho $A = T^{-1}BT$. Chứng minh rằng

- $\det(A - kE) = \det(B - kE)$.
- $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(B)$.
- Nếu A khả nghịch thì B khả nghịch.

Câu 70. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp trong đó $\det(A) \neq 0$. Chứng minh $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(AB) = \text{Rank}(BA)$.

Câu 71. Chứng minh mọi ma trận vuông cấp n có n trị riêng thì chéo hoá được, nghĩa là có thể đưa A về dạng ma trận đường chéo (trị riêng).

Câu 72. Cho hai ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh AB và BA có cùng giá trị riêng

Câu 73. Cho số thực t , tính ma trận $\begin{pmatrix} a \cos^2 t + b \sin^2 t & (b-a) \sin t \cos t \\ (b-a) \sin t \cos t & b \cos^2 t + a \sin^2 t \end{pmatrix}^{2010}$.

Câu 74. Cho A là ma trận vuông thỏa $A^2 - 2A + E = 0$. Chứng minh $A^3 + E = 3A$, $A^4 + 3E = 4A$.

Câu 75. Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^{-1} = 2A$. Tính $\det(A^{2010} - A)$.

Câu 76. Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{2010}$$

Câu 77. Tìm m để ma trận sau có hạng bé nhất

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & m & -3 & -2 \\ 3 & m & 0 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Câu 78. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$ax - by + z = -1$$

$$bx + ay - az = 2$$

$$ax + by + (1-b)z = 1$$

Câu 79. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh nếu A không có trị riêng thực thì $\det(A) > 0$, ngược lại thì A có trị riêng thực.

Câu 80. Tìm ma trận T sao cho $T^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} T = \text{diag}(2, -1, 5)$.

Câu 81. Cho ma trận A thỏa $AA=A$. Tìm $(A+E)^{2010}$.

Câu 82. Tìm một ma trận chéo đồng dạng với ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Câu 83. Cho A là ma trận vuông cấp n. Tính A^n với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Câu 84. Cho A, B là các ma trận vuông hệ số thực cấp n, đặt $C=AB-BA$, giả sử C giao hoán được với A, B. Chứng minh rằng

$$AB^{2011} - B^{2011}A = 2011B^{2010}C.$$

Câu 85. Cho A, B là các ma trận vuông hệ số thực cấp n, giả sử $B=AB-BA$, $AB=BA$. Tính $\det(B)$.

Câu 86. Tìm một ma trận vuông cấp ba B với các phần tử khác 0 sao cho $\det B = 2010$.

Câu 87. Tìm một ma trận vuông cấp hai A với các phần tử khác 0 sao cho A có 2 trị riêng là 2, 5.

Câu 88. Chứng minh với mọi ma trận vuông thực cấp hai A, B, C ta luôn có

$$(AB - BA)^{2010}C = C(AB - BA)^{2010}.$$

Câu 89. Cho hai ma trận vuông A, B với $AA=A$, $BB=B$, $AB+BA=0$. Tính $\det(A-B)$, $\det(A+B)$.

Câu 90. Chứng minh rằng nếu bất kỳ một ma trận cấp bốn có các phần tử trên đường chéo bằng 0, các phần tử khác bằng +1 hoặc -1 thì luôn khả nghịch, trong khi ma

trận cùng tính chất trên với cấp bằng ba thì lại không khả nghịch (suy biến).

Câu 91. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ Tìm ma trận B có các trị riêng dương sao cho $B^2 = A$.

Câu 92. Tính các định thức $\begin{vmatrix} 1+a^2 & ab & ac & ad \\ ab & 1+b^2 & bc & bd \\ ac & bc & 1+c^2 & cd \\ ad & db & cd & 1+d^2 \end{vmatrix}$ và $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

Câu 93. Tính ma trận vuông cấp n sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Câu 94. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n lũy linh. Chứng minh $aA+bB$ cũng lũy linh với mọi số thực a và b.

Câu 95. Cho $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $a_{ij} = \begin{cases} 0 & , i = j \\ 1 & , i \neq j \end{cases}$. Tính A^{-1} .

Câu 96. Tìm ma trận giao hoán với ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Câu 97. Tính các định thức sau tương ứng với các cấp

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2011 \\ x & 1 & 2 & \dots & 2010 \\ x & x & 1 & \dots & 2009 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 2 \\ x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} h & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ hx & h & -1 & \dots & 0 & 0 \\ hx^2 & hx & h & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & h & -1 \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \dots & hx & h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b+a & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & b+a & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b+a & ba \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b+a \end{vmatrix}.$$

Câu 98. Tính ma trận mũ n:

$$\begin{pmatrix} \cos x + 2 \sin x & -5 \sin x \\ \sin x & \cos x + 2 \sin x \end{pmatrix}^n$$

Câu 99. Cho ma trận $T =$

$$\begin{pmatrix} 2010 & 2010 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2010 & 2010 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2010 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2010 \end{pmatrix}_n$$

Tính T^{n-1} .

Câu 100. Giả sử A đồng dạng với ma trận chéo, nghĩa là tồn tại ma trận khả

nghịch T sao cho $A = T^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) T$. Xét đa thức $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, định nghĩa

$$p(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k, A^0 = E. \text{ Tính } \det(p(A)).$$

Các bài tập về đa thức

Câu 1. Tìm tất cả các đa thức $P \in \mathbf{R}[x]$ sao cho:

$$P(0)=1, P(1)=0, P'(0)=0, P'(1)=1.$$

Câu 2. a. Tìm đa thức phức bậc 3 $f(x)$ biết $f(i)=i, f(-i)=-i, f(0)=3, f(1)=2010$.

b. Tìm đa thức phức bậc 3 $f(x)$ biết $f(i)=-i, f(-i)=i, f(0)=1, f(1)=2011$.

Câu 3. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ thỏa $xf(x-1)=(x-1)f(x)$, mọi x .

Câu 4. Cho đa thức $f(x) = \det \begin{vmatrix} 1 & 3-x & 2x^2-1 \\ 1 & 5-3x^2 & 3x^5-1 \\ 1 & 3x^3-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$

Chứng minh phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm thực trong khoảng $(0, 1)$.

Câu 5. Tìm đa thức bậc ba $f(x)$ sao cho

$$\int_0^1 (1-x^2) f(x) dx = 0, \quad \int_0^1 (1-x^2)^3 f(x) dx = 0.$$

Câu 6. Cho đa thức $f(x) = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \dots + 2nx + (2n+1)$. Chứng minh tồn tại đa thức $g(x)$ và $h(x)$ sao cho $\deg(g(x))=n$, $\deg(h(x))<n$ và

$$f(x) = (g(x))^2 + h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 7. Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là hai đa thức thỏa mãn $f[g(x)] = g[f(x)]$. Chứng minh đa thức $h(x) = f[f(x)] - g[g(x)]$ chia hết cho đa thức $f(x) - g(x)$.

Câu 8. Đa thức $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n}x^n$ có tối đa mấy nghiệm thực?

Câu 9. Giả sử đa thức $f(x)$ không có nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức

$$g(x) = \sum_{n=0,2,4,\dots} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$$
 cũng không có nghiệm thực.

Câu 10. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^n + 4$ phân tích được thành tích của hai đa thức bậc thấp hơn với các hệ số nguyên khi và chỉ khi n là bội của 4.

Câu 11. Ký hiệu n là số ước của 2010. Xét đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên nhận giá trị bằng 2010 tại $n+1$ điểm.

Tìm n và chứng minh đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Câu 12. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn

$$\deg f(x) = n, \quad f^{(k)}(2010) = 0, \quad k = \overline{1, (n-1)}, \quad f^{(n)}(2010) > 0.$$

Gọi c là nghiệm thực của phương trình $f(x)=0$. Chứng minh rằng $c \neq 2010$.

Câu 13. a. Chứng minh rằng đa thức

$$f(x) = 12x^3 + 12ax^2 - 8ax - 3, \quad (a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý})$$

có ít nhất một nghiệm thực nằm trong khoảng $(0, 1)$.

b. Chứng minh rằng đa thức

$$f(x) = \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{i+1}\right) + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

có ít nhất một nghiệm thực nằm trong khoảng $(0, 1)$.

Câu 14. Tìm đa thức $f(x)$ bậc $n > 0$ thỏa mãn $f''(x) \cdot f(x) < (f'(x))^2$.

Câu 15. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = \sum_{n=1}^{2010} \frac{(2x-x^2)^n - 2x^n}{n}$ chia hết cho đa thức

$$g(x) = x^{2011}.$$

Câu 16. Cho hai đa thức $f(x)$, $g(x)$ có cùng bậc là n . Chứng minh rằng hoặc $(f(x))^2 = (g(x))^2$ hoặc $\deg(f(x))^2 - (g(x))^2 \geq n$.

Câu 17. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x-1)(x^2-1)\dots(x^{2010}-1)$ chia hết cho đa thức $g(x) = \prod_{k=1}^m (x^k-1)$ trong đó m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $m+n \leq 2010$.

Câu 18. Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 2010 có 2010 nghiệm phân biệt $x(1), x(2), \dots, x(2010)$. Chứng minh rằng

$$\frac{f''(x(1))}{f'(x(1))} + \frac{f''(x(2))}{f'(x(2))} + \dots + \frac{f''(x(2010))}{f'(x(2010))} = 0.$$

Câu 19. Đa thức $g(x) = \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!}$ có mấy nghiệm bội? (Đáp: không)

Câu 20. Đa thức bậc không nhỏ hơn 3 và số lẻ có ít nhất mấy điểm uốn? (Đáp: Một)

Câu 21. Cho $f(x)$ là đa thức bậc 2010 với hệ số dương. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x^{2011}$ có duy nhất một nghiệm dương.

Câu 22. Giả sử $f(x)$ là đa thức chỉ có nghiệm thực. Chứng minh rằng nếu a là nghiệm bội của đa thức đạo hàm $f'(x)$ thì a cũng là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Câu 23. Cho đa thức $f(x) = x^n + \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}$, $a_k \in \mathbb{Z}, k=1, n$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên nếu như $f(0), f(1)$ là các số nguyên lẻ.

Câu 24. Cho đa thức bậc hai $f(x)$ với $0 < f(0) < 1, x \in \{0, 1\}$. Chứng minh rằng

$$\frac{8}{9} f(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1].$$

Câu 25. Giả sử a, b, c là ba nghiệm thực phân biệt của đa thức

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Tìm các nghiệm thực của đa thức $g(x) = x^3 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 + \beta}{4} x + \frac{\alpha\beta - \gamma}{8}$.

Câu 26. Cho $f(x)$ là đa thức bậc 2011 không có nghiệm bội và $g(x)$ là đa thức bậc 2010. Chứng minh rằng đa thức

$$h(x) = \sum_{k=0}^{4020} (f(x)g(x))^k$$

không chia hết cho đa thức $f(x)$.

Câu 27. Xác định đa thức $f(x)$ dạng $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$ biết rằng nó chia hết cho đa thức $(x-1)(x+1)(x-2)$.

Câu 28. Xác định đa thức bậc ba $f(x)$ sao cho $f(x+1) - f(x-1) = x^2 - 1$.

Câu 29.

a. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x^n) : x-1$ thì $f(x^n) : x^n - 1$.

b. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x^n) : (x-2011)^{2011}$ thì $f(x^n) : (x^n - 2011^n)^{2011}$.

c. Chứng minh rằng nếu $f(x^3) + xg(x^3) : x^2 + x + 1$ thì $f(-1)=g(-1)=0$.

Câu 30. Tìm đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$ và mọi số thực x, y thì $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$.

Câu 31. Xác định tất cả các đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x) \geq 0, f(x^2) = (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 32. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ sao cho $f((x+1)^2) = f(x^2) + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 33. Tìm tất cả các đa thức $g(x)$ sao cho $g(x^2 - y^2) = g(x - y)g(x + y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Câu 34. Tìm đa thức $f(x)$ biết $2f(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2$.

Câu 35. Chứng minh với đa thức bất kỳ bậc $2n+1, n > 0$, đều có một điểm uốn.

Câu 36. Có tồn tại đa thức nguyên $f(x)$ thỏa mãn $f(7)=5, f(15)=9$ không?

Câu 37. Tìm đa thức bậc thấp nhất nhận giá trị cực đại là 6 tại $x=1$ và giá trị cực tiểu là 2 tại $x=3$.

Câu 38. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $f(x) - x = 0$ không có nghiệm thực.

Chứng minh rằng pt $f(f(x)) - x = 0$ cũng không có nghiệm thực.

Câu 39. Chứng minh rằng mọi đa thức bậc n đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = a_0 \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} + a_1 \frac{x(x-1)\dots(x-n+2)}{n!} + \dots + a_n.$$

Câu 40. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ bậc n nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên thì các hệ số của đa thức $n!f(x)$ đều là các số nguyên.

Câu 41. Cho các số thực a, b, c, d . Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^2 + bx + cx + d + e = 0$ có nghiệm thực không nhỏ hơn 1 thì phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ cũng có nghiệm thực.

Câu 42. Cho đa thức $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ có tính chất $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} = 0$, chứng minh đa thức $f(x)$ có nghiệm thực.

Câu 43. Biết đa thức $f(x)$ có tính chất $f(x) > f'(x)$ với mọi x . Chứng minh $f > 0$.

Câu 44. Có tồn tại đa thức f nào thỏa mãn $f > f'', f' > f''$ không?

Câu 45. Có tồn tại đa thức $f(x)$ bậc 2010 sao cho $f(x^2 - 2010) : f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 46. Chứng minh rằng nếu $x=c$ là nghiệm bội 2010 của đa thức $f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$ thì $x=c$ là nghiệm bội 2011 của đa thức $f(x)g(c) - f(c)g(x)$ nếu hai đa thức này không đồng nhất triệt tiêu.

Câu 47. Cho đa thức $f(x)$ không có nghiệm bội và bậc bằng n . Chứng minh đa thức $g(x) = [f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ không có nghiệm bội cấp cao hơn $n-1$.

Câu 48. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức đạo hàm của nó là $f'(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng $c(x-x_n)^n$.

Câu 49. Tìm đa thức bậc ba $f(x)$ biết nó chia hết cho đa thức $(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$.

Câu 50. tìm đa thức $f(x)$ thỏa mãn $xf(x-2) = (x-2010)f(x)$ với mọi số thực x .

Về một số dạng phương trình hàm đa thức

Phương trình hàm đa thức là một dạng toán khó, để giải được các phương trình hàm loại này, chúng ta cần nắm rõ không những các kỹ thuật giải phương trình hàm mà còn các tính chất và các đặc trưng cơ bản của đa thức (nghiệm, hệ số, bậc, tính liên tục, tính hữu hạn nghiệm, tính khả vi ...). Trong bài viết này, chúng ta sẽ đề cập đến một số dạng phương trình đa thức có sơ đồ lời giải tương tự nhau: xây dựng nghiệm và chứng minh các nghiệm đó vét hết tập hợp nghiệm.

1. Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h)$.

Bài toán tổng quát: Giả sử $f(x), g(x)$ và $h(x)$ là các đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ đã cho thỏa mãn điều kiện: $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thuộc $\mathbb{C}[x]$ sao cho:

$$P[f(x)].P[g(x)] = P[h(x)] \quad (1), \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

Nghiệm của phương trình hàm (1) có nhiều tính chất đặc biệt giúp chúng ta có thể xây dựng được tất cả các nghiệm của nó từ các nghiệm bậc nhỏ:

Tính chất 1.1. Nếu P, Q là nghiệm của (1) thì $P.Q$ cũng là nghiệm của (1).

Chứng minh:

$$(P.Q)[h(x)] =$$

$$\begin{aligned} (P.Q)(h(x)) &= (P)(h(x)).Q(h(x)) = P(f(x)).P(g(x)).Q(f(x)).Q(g(x)) \\ &= (P.Q)(f(x)).(P.Q)(g(x)). \end{aligned}$$

Hệ quả 1.2. Nếu $P(x)$ là nghiệm của (1) thì $P^n(x)$ cũng là nghiệm của (1).

Trong khá nhiều trường hợp, hệ quả 1.2 cho phép chúng ta mô tả hết các nghiệm của (1). Để làm điều này, ta có định lý quan trọng sau đây:

Định lý 1.3. Nếu f, g, h là các đa thức với hệ số thực thỏa mãn điều kiện $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$ và thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

$$(i) \quad \deg(f) \neq \deg(g)$$

- (ii) $\deg(f) = \deg(g)$ và $f^* + g^* \neq 0$, trong đó f^*, g^* là hệ số cao nhất của các đa thức f và g tương ứng.

Khi đó với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ có bậc n và thỏa mãn phương trình (1).

Chứng minh:

Giả sử P là đa thức bậc n thỏa mãn phương trình (1), $\deg(f) = f, \deg(g) = g, \deg(h) = h$, các hệ số cao nhất của P, f, g, h tương ứng là P^*, f^*, g^*, h^* . So sánh hệ số cao nhất hai vế của các đa thức trong phương trình

$$P(f(x))P(g(x)) = P(h(x))$$

Ta có $P^*(f^*)^n \cdot P^*(g^*)^n = P^*(h^*)^n$ từ đó suy ra $P^* = (h^*/f^*g^*)^n$.

Như vậy, nếu giả sử ngược lại, tồn tại một đa thức Q bậc n (khác P) cũng thỏa mãn phương trình (1) thì $Q^* = P^*$ và ta có

$$Q(x) = P(x) + R(x) \text{ với } 0 \leq r = \deg(R) < n$$

(ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất 0 bằng $-\infty$, do đó $\deg(R) \geq 0$ đồng nghĩa R không đồng nhất 0)

Thay vào phương trình (1), ta được

$$(P(f) + R(f))(P(g) + R(g)) = P(h) + R(h)$$

$$\Leftrightarrow P(f)P(g) + P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = P(h) + R(h)$$

$$\Leftrightarrow P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = R(h) \quad (2)$$

Bây giờ ta xét các trường hợp

- i) $\deg(f) \neq \deg(g)$. Giả sử $f > g$. Khi đó bậc của các đa thức ở vế trái (2) lần lượt là $nf + rg, rf + ng, rf + rg$, và do $nf + rg > rf + ng > rf + rg$ nên vế trái có bậc là $nf + rg$. Trong khi đó vế phải có bậc là $rh = r(f+g) < nf + rg$. Mâu thuẫn.
- ii) $\deg(f) = \deg(g)$. Khi đó, hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) cùng có bậc là $nf + rg = ng + rf$ và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ số của x^{nf+rg} trong đa thức thứ nhất và thứ hai lần lượt bằng $P^*(f^*)^n R^*(g^*)^r, R^*(f^*)^r P^*(g^*)^n$. Như thế, bậc của x^{nf+rg} trong tổng hai đa thức bằng $P^* R^* f^{*r} g^{*r} (f^{*(n-r)} + g^{*(n-r)}) \neq 0$ do $f^* + g^* \neq 0$. Như vậy, bậc của vế trái của (2) vẫn là $nf + rg$, trong khi đó bậc của vế phải là $rh = rf + rg < nf + rg$. Mâu thuẫn.

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Áp dụng định lý 1.3 và hệ quả 1.2, ta thấy rằng nếu $P_0(x)$ là một đa thức bậc nhất thỏa mãn phương trình (1) với f, g, h là các đa thức thỏa mãn điều kiện của định lý 1.3 thì tất cả các nghiệm của (1) sẽ có dạng: $P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = (P_0(x))^n$.

Sau đây, chúng ta sẽ xem xét một số ví dụ áp dụng của các tính chất nói trên.

Ví dụ 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn phương trình

$$P(x^2) = P^2(x) \quad (3)$$

với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải: Ta có các hàm $f(x) = x$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ thỏa mãn các điều kiện của định lý 1.3, và hàm $P(x) = x$ là hàm bậc nhất thỏa mãn (3) do đó các hàm $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$, $P(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ là tất cả các nghiệm của (3).

Ví dụ 2. (Vietnam 2006) Hãy xác định tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn hệ thức sau:

$$P(x^2) + x(3P(x) + P(-x)) = (P(x))^2 + 2x^2 \quad (4)$$

với mọi số thực x .

Lời giải: Thay $x = -x$ vào (4), ta được

$$P(x^2) - x(3P(-x) + P(x)) = (P(-x))^2 + 2x^2 \quad (5)$$

Trừ (4) cho (5), ta được

$$4x(P(x) + P(-x)) = P^2(x) - P^2(-x)$$

$$\Leftrightarrow (P(x) + P(-x))(P(x) - P(-x) - 4x) = 0 \quad (6)$$

(6) đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, do đó ta phải có

$$+ \text{Hoặc } P(x) + P(-x) = 0 \text{ đúng với vô số các giá trị } x$$

$$+ \text{Hoặc } (P(x) - P(-x) - 4x = 0 \text{ đúng với vô số các giá trị } x$$

Do P là đa thức nên từ đây ta suy ra

$$+ \text{Hoặc } P(x) + P(-x) = 0 \text{ đúng với mọi } x$$

$$+ \text{Hoặc } (P(x) - P(-x) - 4x = 0 \text{ đúng với mọi } x$$

Ta xét các trường hợp:

$$+ P(x) + P(-x) = 0$$

Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2) + 2xP(x) = (P(x))^2 + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow P(x^2) - x^2 = (P(x) - x)^2$$

Đặt $Q(x) = P(x) - x$ thì $Q(x^2) = Q^2(x)$. Theo ví dụ 1 thì $Q(x) \equiv 0$, $Q(x) \equiv 1$, $Q(x) = x^n$. Từ đó $P(x) = x$, $P(x) = x+1$, $P(x) = x^n + x$. So sánh với điều kiện $P(x) + P(-x) = 0$, ta chỉ nhận các nghiệm: $P(x) = x$ và $P(x) = x^{2k+1} + x$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$+ P(x) - P(-x) - 4x = 0$$

Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2) + x(4P(x) - 4x) = P^2(x) + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow P(x^2) - 2x^2 = (P(x) - 2x)^2$$

Đặt $Q(x) = P(x) - 2x$ thì $Q(x^2) = Q^2(x)$ và như thế $Q(x) \equiv 0$, $Q(x) \equiv 1$, $Q(x) = x^n$. Từ đó $P(x) = 2x$, $P(x) = 2x+1$, $P(x) = x^n + 2x$. So sánh với điều kiện $P(x) - P(-x) - 4x = 0$, ta chỉ nhận các nghiệm: $P(x) = 2x$, $P(x) = 2x+1$ và $P(x) = x^{2k} + 2x$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Tổng hợp hai trường hợp, ta có tất cả nghiệm của (4) là các đa thức

$$P(x) = x, P(x) = 2x, P(x) = 2x+1, P(x) = x^{2k+1} + x, P(x) = x^{2k} + 2x \text{ với } k = 2, 3, \dots$$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn đẳng thức sau với mọi số thực x

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3+x) \quad (7)$$

Lời giải: Các đa thức x , $2x^2$, $2x^3+x$ thỏa mãn điều kiện định lý 1.3, do đó ta sẽ đi tìm nghiệm không đồng nhất hằng số với bậc nhỏ nhất của (7).

Xét trường hợp $P(x)$ có bậc nhất, $P(x) = ax + b$. Thay vào (7), ta có

$$(ax + b)(2ax^2 + b) = a(2x^3 + x) + b$$

So sánh hệ số của các đơn thức ở hai vế, ta được hệ

$$a^3 = 2a, 2ba^2 = 0, ab = a, b^2 = b$$

Hệ này vô nghiệm (do $a \neq 0$) nên ta có thể kết luận: không tồn tại đa thức bậc nhất thỏa mãn (7).

Tiếp tục xét trường hợp $P(x)$ có bậc 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Thay vào (7), ta có

$$(ax^2 + bx + c)(4ax^4 + 2bx^2 + c) = a(2x^3 + x)^2 + b(2x^3 + x) + c$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^6 + 4abx^5 + (4ac + 2ab)x^4 + 2b^2x^3 + (ac + 2bc)x^2 + bcx + c^2 = 4ax^6 + 4ax^4 + 2bx^3 + ax^2 + bx + c$$

So sánh hệ số các đơn thức ở hai vế, ta được hệ

$$4a^2 = 4a, 4ab = 0, 4ac + 2ab = 4a, 2b^2 = 2b, ac + 2bc = a, bc = b, c^2 = c.$$

Hệ này có nghiệm $a = c = 1, b = 0$. Như vậy, $P(x) = x^2 + 1$ là đa thức bậc 2 thỏa mãn (7). Từ hệ quả 1.2 và định lý 1.3, ta suy ra $(x^2+1)^k$ là tất cả các đa thức bậc chẵn (không đồng nhất hằng số) thỏa mãn (7).

Thế còn các nghiệm của (7) có bậc lẻ? Rõ ràng đa thức $x^2 + 1$ không “sinh” ra được các nghiệm bậc lẻ. Rất may mắn, ta có thể chứng minh các đa thức bậc lẻ không thể là nghiệm của (7). Để chứng minh điều này, dựa vào tính chất mọi đa thức bậc lẻ đều có ít nhất một nghiệm thực, ta chỉ cần chứng minh nếu $P(x)$ là một đa thức không đồng nhất hằng số thỏa mãn (7) thì $P(x)$ không có nghiệm thực (đây chính là nội dung bài Vietnam MO 1990).

Thật vậy, giả sử α là nghiệm thực của $P(x)$, khi đó $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Nếu $\alpha > 0$ thì ta có $\alpha, \alpha + 2\alpha^3, \alpha + 2\alpha^3 + 2(\alpha + 2\alpha^3)^3, \dots$ là dãy tăng và tất cả đều là nghiệm của $P(x)$, mâu thuẫn. Tương tự, nếu $\alpha < 0$ thì dãy nói trên là dãy giảm và ta cũng có $P(x)$ có vô số nghiệm. Nếu $\alpha = 0$, đặt $P(x) = x^k Q(x)$ với $Q(0) \neq 0$, thay vào phương trình, ta có

$$x^k Q(x)(2x^2)^k Q(2x^2) = (2x^3 + x)^k Q(2x^3 + x)$$

$$\Rightarrow Q(x)(2x^2)^k Q(2x^2) = (2x^2 + 1)^k Q(2x^3 + x)$$

Thay $x = 0$ vào ta được $0 = Q(0)$, mâu thuẫn.

Vậy $P(x)$ không có nghiệm thực, có nghĩa là $P(x)$ không thể có bậc lẻ. Nói cách khác, bài toán đã được giải quyết hoàn toàn.

Như đã nói ở phần cuối của bài trước, phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h)$ còn có thể giải bằng cách xét các nghiệm (có thể là phức) của đa thức $P(x) = 0$. Sau đây chúng ta xét một ví dụ như vậy:

Ví dụ 4: Tìm tất cả các đa thức không hằng số $P(x)$ sao cho

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1) \quad (8)$$

Lời giải: Giả sử a là một nghiệm của $P(x) = 0$. Khi đó $a^2 + a + 1$ cũng là nghiệm. Thay x bằng $x - 1$, ta có $P(x)P(x-1) = P(x^2 - x + 1)$

Vì $P(a) = 0$ nên ta cũng suy ra $a^2 - a + 1$ cũng là nghiệm của $P(x) = 0$.

Chọn a là nghiệm có modul lớn nhất (nếu có một vài nghiệm như thế thì ta chọn 1 trong chúng). Từ cách chọn ta suy ra $|a^2 + a + 1| \leq |a|$ và $|a^2 - a + 1| \leq |a|$

Áp dụng bất đẳng thức về modul, ta có

$$|2a| \leq |a^2 + a + 1| + |-a^2 + a - 1| \leq |a| + |a| = |2a|.$$

Như vậy dấu bằng phải xảy ra ở các đẳng thức trên, suy ra với

$$(a^2 + a + 1) = s(-a^2 + a - 1) \text{ với } s \text{ là một số dương nào đó.}$$

Nếu $|a^2 + a + 1| < |a^2 - a + 1|$ thì $2|a^2 - a + 1| > |a^2 - a + 1| + |a^2 + a + 1| \geq |2a|$, suy ra $|a^2 - a + 1| > |a|$. Tương tự từ $|a^2 + a + 1| > |a^2 - a + 1|$, cũng suy ra $|a^2 + a + 1| > |a|$, mâu thuẫn với cách chọn a .

Vậy $|a^2 + a + 1| = |a^2 - a + 1|$. Từ đó $s = 1$ và ta có $(a^2 + a + 1) = (-a^2 + a - 1)$

suy ra $a^2 + 1 = 0$, suy ra $a = \pm i$ và như vậy $x^2 + 1$ là thừa số của $P(x)$. Từ đây $P(x) = (x^2 + 1)^m Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho $x^2 + 1$. Thay vào (8), ta có $Q(x)$ cũng thỏa mãn (8).

Nếu như phương trình $Q(x) = 0$ có nghiệm thì làm tương tự như trên, nghiệm có modul lớn nhất phải là $\pm i$. Nhưng điều này không thể vì $x^2 + 1$ không chia hết $Q(x)$. Ta đi đến kết luận rằng $Q(x)$ là hằng số, giả sử đó là c . Thay vào phương trình, ta được $c = 1$.

Như vậy tất cả các nghiệm không hằng của phương trình (8) có dạng $(x^2 + 1)^m$ với m là số nguyên dương.

Chú ý rằng kết luận của định lý không còn đúng nếu f và g là hai đa thức cùng bậc và có hệ số cao nhất đối nhau.

Ví dụ với phương trình hàm đa thức $P(x)P(-x) = P(x^2 - 1)$ (9) có thể tìm được rằng có 2 đa thức bậc nhất, 4 đa thức bậc 2 thỏa mãn phương trình. **Bài toán mô tả tất cả các nghiệm của (9) hiện nay, theo chúng tôi, vẫn còn là một bài toán mở.**

Bài tập:

1. (Bulgaria 1976) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x^2 - 2x) = (P(x-2))^2$$

với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

2. (TH&TT 7/2006) Tìm tất cả các đa thức có hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+2) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

3. (Bulgaria 1988) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ không phải hằng số sao cho $P(x^3+1) = P^3(x+1)$ với mọi x .

4. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ chỉ có nghiệm thực thỏa mãn phương trình (9).

5. Tìm ít nhất một đa thức không có nghiệm thực thỏa mãn phương trình ở bài toán (9).

Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h) + Q$.

Bây giờ chúng ta xét đến phương trình dạng

$$P(f)P(g) = P(h) + Q \quad (1)$$

(Để tiện theo dõi và không quá rắc rối trong ký hiệu, ta đánh số lại các công thức từ 1) trong đó f, g, h, Q là các đa thức đã cho, $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$.

Với phương trình (1), nếu Q không đồng nhất 0 thì ta sẽ không còn tính chất "nhân tính" như dạng 1. Vì thế, việc xây dựng nghiệm trở nên khó khăn. Đây chính là khác biệt cơ bản của dạng 2 với dạng 1.

Tuy nhiên, ta vẫn có thể chứng minh được định lý duy nhất, được phát biểu như sau:

Định lý: Cho f, g, h là các đa thức không hằng thỏa mãn điều kiện $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$, Q là một đa thức cho trước. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n và số thực a , tồn tại nhiều nhất một đa thức P thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: i) $\deg(P) = n$, ii) $P^* = a$ iii) $P(f)P(g) = P(h) + Q$

Phép chứng minh định lý này hoàn toàn tương tự với phép chứng minh định lý đã được chứng minh ở phần 1.

1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$$P^2(x) - P(x^2) = 2x^4$$

2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$$P(x^2-1) = P^2(x) - 1$$

3. Tìm tất cả các bộ (a, P, Q) trong đó a là hằng số thực, P, Q là các đa thức sao cho:

$$P^2(x)/Q^2(x) = a + P(x^2)/Q(x^2)$$

3. Một số bài tập tổng hợp

1. $P(3x) = P'(x)P''(x)P'''(x)$
2. $P(x)$ thuộc $R[x]$: $P(x^2) = P(x)P(x-1)$ (Ireland 1994)
3. $P(x^2) = P(x)P(x+1)$
4. $P(x)$ thuộc $Z[x]$ $16P(x^2) = [P(2x)]^2$ (Nam Tư 1982)
5. Tìm các đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $f(f(x)) = f(x)^m$ với $m > 1$ nguyên cho trước (Hong Công 1999)
6. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Chứng minh rằng với số n thuộc N tùy ý không tồn tại nhiều hơn một đa thức $Q(x)$ thỏa mãn đồng nhất:
 $Q(P(x)) = P(Q(x))$ với mọi x thuộc R (Hungary 1979)

7. $(x-1)P(x-1) = (x+2)P(x)$ (New York 1976)
8. $2P(x) = P(x+1) + P(x-1)$ (New York 1975)
9. $P(u^2 - v^2) = P(u+v)P(u-v)$
10. Những đa thức hệ số thực nào có P' là ước của P ?
11. $P(x^2) = P(x)P(x+1)$
12. Tìm P và Q trong $R[x]$ sao cho: $P^2 = 1 + (x^2-1)Q^2$.
13. $P(x+P(x)) = P(x) + P(P(x))$

Một số đề thi mẫu

ĐỀ GT 1. (Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. a. Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, ($a < b$).
 Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(y)dy.$$

b. Cho hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ với $a < b$.
 Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_a^b f(x)dx.$$

Câu 2. Cho dãy số (x_n) xác định như sau: $x_1 = \tan(\frac{\pi}{6})$, $x_{n+1} = x_n + (2 - \sqrt{3})(1 + x_n x_{n+1})$.

Xác định x_{2011}, x_{2012} .

Câu 3. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n}$

Câu 4. Cho hàm số f xác định và liên tục trên khoảng $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx)dx = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{e^{x^2}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $f(x)$ khả vi tới cấp 2010. Khẳng định hàm $f(x)$ khả vi vô hạn lần kết quả thế nào? Giải thích.

ĐỀ GT 2. (Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. a. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$, với $(a < b)$. Chứng minh tồn tại các số thực m, M sao cho $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

b. Cho $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$. Chứng minh rằng $\sin \alpha \geq \frac{2}{\pi} \alpha$.

Câu 2. a. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = x_2 = 2, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n - 1$. Xác định x_{2010}, x_{2012} .

b. Cho dãy số thực dương (y_n) với $\lim_n y_n = 2009$. Tính $\lim_n \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$.

Câu 3. Cho dãy số (t_n) với $t_1 = 1, t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2804} t_n^2, n = 1, 2, \dots$

Tính giới hạn

$$\lim_n \frac{t_1}{t_{i+1}}.$$

Câu 4. Cho hàm f xác định trên $[1; \infty)$ và các điều kiện sau thỏa mãn $f(1)=1,$

$f(x+1) = f(x) (1+2012 f(x))$. Tính giới hạn $\lim_n \frac{f(n-k+1)}{f(n-k)}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ với a, b cùng dấu. Chứng minh phương trình $\frac{a f(b) - b f(a)}{b-a} = f(x) - x f'(x)$ có nghiệm thực trong khoảng $(a; b)$.

ĐỀ GT 3. (Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. a. Cho hàm số f có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$2f'(x) + x f''(x) = 2.$$

Xác định hàm f .

b. Xác định hàm số $f(x)$ biết $(e^{-2010x} f'(x))'' = 0, f(1) = \frac{2009}{2010^2}, f(\frac{1}{2010}) = \frac{1}{2010}$.

Câu 2. a. Cho hàm f liên tục trên đoạn $[2010; 2012]$, khả vi trong khoảng $(2010; 2012)$, thỏa mãn $f(2010) = f(2012) = 0$. Chứng minh rằng phương trình $f'(x) + 2010 f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng đã cho.

b. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(0) = \frac{1}{2012}, \int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2012}.$$

Chứng minh phương trình $f(x) = x^{2011}$ luôn có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0, 1)$.

Câu 3. Khảo sát tính khả vi của hàm số $|f(x)|$ với $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2010)(x-2011)$.

Câu 4. a. Tính tích phân $\int \frac{dx}{(1+x^2)(4+9x^2)}$.

b. Tính tích phân $\int \frac{dx}{(1+x^2+e^{2010}x+e^{2010}x^3)}$.

Câu 5. Cho hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$\forall x \in [1; 2], (a-b) \int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{b^3-a^3}{3}$. Chứng minh rằng tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ nhận giá trị không vượt quá 1.5.

ĐỀ DS 1. (Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. Tính A^{-1} xác định bởi công thức

$$(1, x, x^2, \dots, x^n)A = (1, 2+x, (2+x)^2, \dots, (2+x)^n), \text{ với}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2C_1^2 & 2^2 C_2^0 & \dots & 2^{n-1} C_{n-1}^0 & 2^n C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & 2 C_2^1 & \dots & 2^{n-2} C_{n-1}^1 & 2^{n-1} C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & 2 C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_n^n \end{pmatrix}$$

Câu 2. Ký hiệu E_n là ma trận vuông đơn vị cấp n , U là ma trận k -hàng, 1 cột và O là

ma trận không. Tìm B^{-1} với $B = \begin{pmatrix} E_k & U \\ O & E_1 \end{pmatrix}$

Câu 3. Cho ma trận $C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Tìm ma trận B^{-1} để BTB^{-1} là ma trận đường chéo chính.

Câu 4. Cho A là ma trận vuông cấp n .

a. Chứng minh rằng nếu A thỏa mãn tính chất $A^2 = A$ thì $(2A-E)^2 = E$.

b. Chứng minh rằng nếu $(2A-E)^2 = E$ thì $(B+E)^2 = 2(B+E)$, $B = 2A-E$.

Câu 5. a. Cho A là ma trận vuông cấp n và ký hiệu đa thức đặc trưng của A là $\delta(\lambda)$. Chứng minh rằng $\delta(A) = O$.

b. Có tồn tại đa thức $f(x)$ nào hệ số nguyên thỏa mãn $f(0), f(1)$ là các số lẻ ?

ĐỀ DS 2. (Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. a. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (1-x^n)(1+x) - 2nx^n(1-x) - n^2x^n(1-x^2)^2$ chia hết cho đa thức $g(x) = (1-x)^3, n \geq 2$.

b. Tìm một đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x+1)-f(x-1)=(x-1)(x+1)$.

Câu 2. Chứng minh một đa thức luôn biểu diễn dưới dạng hiệu hai đa thức tăng.

Câu 3. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A biết $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \neq j \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases}$.

Câu 4. Cho các số thực a_{ij} với $a_{ij} + a_{ji} = 0$. Giải hệ phương trình

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Câu 5. Tính ma trận nghịch đảo của ma trận B biết $B = \begin{pmatrix} \cos 2 & -\sin 2 \\ \sin 2 & \cos 2 \end{pmatrix}^{2010}$.

Câu 6. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^n & x^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

ĐỀ DS 3. (Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. a. Tính định thức $\det(A) = \det(a_{ij}^{i-1})_{i,j=1}^n$.

b. Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ a & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ a & a & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & a & \dots & 1 \end{vmatrix}.$

Câu 2. Tồn tại hay không một ma trận thực vuông cấp 2 sao cho

$$A^{2010} = \begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix}$$

Câu 3. Cho A, B là các ma trận vuông thỏa mãn $AA=A$, $(A+B)(A+B)=(A+B)E$, $A(E+B)+(E+B)A=O$. Tính $\det(-B)$.

Câu 4. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn

i. $AB=BA$.

j. $A^{2010} = O$, $B^{2010} = O$.

Chứng minh ma trận $E+A+B$ khả nghịch.

Câu 5. Tính
$$\begin{vmatrix} \sqrt{3}+2 & -5 \\ 1 & -(\sqrt{3}+2)^{-1} \end{vmatrix}, n=1, 2, 3, \dots$$

Câu 6. Cho đa thức $f_n(x) = \cos[n \arccos x]$, $-1 \leq x \leq 1$. Chứng minh rằng

$$f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

.....
Sau đây chúng tôi giới thiệu một số đề thi chọn đội tuyển Olympic toán vòng thứ nhất tại trường Đại Học Quảng Nam.

Phòng thi: 1.1, 1.2 giảng đường A1, buổi sáng thi GT, buổi chiều thi ĐS.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢNG NAM

KHOA\BỘ MÔN: TOÁN

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC TOÁN HỌC NĂM 2010 (VÒNG 1)

MÔN THI: TOÁN GIẢI TÍCH NGÀY THI: 29/11/2009

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1 (4 điểm). Cho dãy số (t_n) với các điều kiện sau

$$t_1 = 1, \quad t_{2001} = 4^{1000}, \quad t_n^2 = t_{n-1} t_{n+1}, \quad \forall n = 2, 3, \dots$$

a. Xác định t_{2010}, t_{2011} . b. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \dots \cdot t_n^2)^{\frac{1}{n^2}}$. c. Tính $S = \frac{t_1^{2010} + t_2^{2010} + \dots + t_{2010}^{2010}}{t_2^{2010} + t_3^{2010} + \dots + t_{2011}^{2010}}$.

Câu 2 (4 điểm). (Sinh viên chọn một trong hai câu sau)

a. Cho hai dãy số $(x_n)_n$ và $(y_n)_n$ thỏa mãn các điều kiện sau

i. $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$. ii. $(x_n)^2 = (x_{n-1})^2 + \frac{y_n + 1}{2010}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x_n)^2}{n}$.

b. Cho dãy số $(u_n)_n$ thỏa mãn điều kiện $(n+1)(n-1)! u_n = u_n u_{n+1} + (n+1)(n-1)! u_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

Tính giá trị của biểu thức
$$\sum_{n=1}^{2010} \frac{2010(u_{n+1} - u_n) + u_n u_{n+1}}{u_n u_{n+1}}.$$

Câu 3 (4 điểm).

a. Cho dãy $(x_n)_n$ với các tính chất $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_{2k} = \frac{1 + x_{2k-1}}{2}$, $x_{2k+1} = \frac{x_{2k}}{2}$, $k = 1, 2, \dots$

Xác định x_{2010}, x_{2011} .

b. Cho dãy số $(y_n)_n$ xác định bởi $y_1 = \sin \frac{\pi}{6}$, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1}}$, $n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = (1, 2)$.

c. Cho dãy số $(z_n)_n$ xác định như sau: $z_0 > 0$, $z_{n+1} = 2010(z_n + \frac{2010}{z_n^3})$, $n \in \mathbf{N}$. Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn và tính giới hạn đó.

Câu 4 (4 điểm). a. Tính tích phân $I_n = \int_{-n}^n \left(\sin^{1005}(x) + \sqrt{\sin^{2010}(x) + 1} \right) dx$, $n \in \mathbf{N}$.

b. Tính giới hạn $J = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$. c. Tính đạo hàm $(e^{x^2} e^{-t^2} dt)'$.

Câu 5 (4 điểm). (Sinh viên chọn một trong hai câu sau)

a. Cho hàm f khả vi trên đoạn $[0, 1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. Chứng minh rằng tồn tại số thực c thuộc khoảng $(0, 1)$ sao cho $f(c)-c=2010(f'(c)-1)$, với $f'(c)$ là đạo hàm của hàm f tại $x = c$.

b. Cho hàm f khả vi trên khoảng $(0, 1)$, liên tục trên đoạn $[0, 1]$, $f(0)=1$, $f(1)=e^2$.

Chứng minh rằng phương trình $f'(x)=2f(x)$ có ít nhất một nghiệm thực trong khoảng $(0, 1)$.

Câu 6 (4 điểm). Giả sử $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ là hàm thỏa mãn $f(x+y)=f(x)+f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$.

a. Chứng minh rằng $f(ax)=a f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall a \in \mathbf{Q}$.

b. Nếu thêm điều kiện f liên tục trên $\mathbf{R}$ và $f(1) = 2010$. Xác định hàm f .

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢNG NAM

KHOA\BỘ MÔN: TOÁN

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC TOÁN HỌC NĂM 2010 (VÒNG 1)

MÔN THI: ĐẠI SỐ NGÀY THI: 28/11/2009

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1 (4 điểm). Cho hai ma trận vuông cùng cấp A và B là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - x$.

i. Giả sử A và B khả nghịch. Chứng minh rằng $AB=BA=E$ với E là ma trận đơn vị cùng cỡ A .

ii. Giả sử A giao hoán với B . Chứng minh rằng AB, BA cũng là nghiệm của đa thức $f(x)$.

iii. Giả sử $AB+BA=O$ (ma trận không). Tính $\det(A+B)$.

Câu 2 (4 điểm). Cho $f(x)$ là đa thức bậc 2010 thỏa mãn

$$f(k) = \frac{1}{k+1}, k = 0, 1, \dots, 2010, f(2012) = \frac{1+2011}{2013} \cdot \frac{2012}{2013}.$$

i. Xác định $f(2011)$, $f(n)$ với n là số nguyên lớn hơn 2012.

ii. Tìm công thức tổng quát cho biểu thức $nf(n)$ với $n \in \mathbf{N}$.

Câu 3 (4 điểm). a. Cho đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2010}x^{2010}$ ($a_{2010} \neq 0$). Giả sử rằng

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2009} = 0.$$

Chứng minh rằng đa thức $g(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + 2010a_{2010}x^{2009}$ có nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$.

b. Xác định đa thức phức bậc ba $f(x)$ thỏa mãn $f(-i) = -i$, $f(i) = i$, $f(0) = 2$, $f(1) = 7$.

Câu 4 (4 điểm). Giải hệ phương trình sau:

Bài tập ôn thi Olympic toán Giải Tích-Đại số (Biên soạn: Th.s Trần Văn Sự)

$$\begin{cases} 2010x_1 + 2009x_2 + 2008x_3 + \dots + 2x_{2009} + x_{2010} = 1 \\ 2009x_1 + 2008x_2 + 2007x_3 + \dots + x_{2009} + 2010x_{2010} = 2 \\ \dots \\ x_1 + 2010x_2 + 2009x_3 + \dots + 3x_{2009} + 2x_{2010} = 2010 \end{cases}$$

Câu 5 (4 điểm). a. Cho 2 ma trận A và B sau

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tìm các trị riêng và vectơ riêng của B. Tính $A^{-1}BA$.

b. Tính $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2010 \\ 1 & 0 & 2010 \\ 0 & 2 & 2010 \end{pmatrix}$. c. Tính $K = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(2010\varphi) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \in \mathbf{R}$.

Câu 6 (4 điểm). Cho A là ma trận vuông, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$. Chứng minh khẳng định sau

$$\det \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \dots & b_{1m}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \dots & b_{2m}A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}A & b_{m2}A & \dots & b_{mm}A \end{pmatrix} = (\det B) (\det A)^m.$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢNG NAM
KHOA/BỘ MÔN: TOÁN

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN HỌC NĂM 2010
MÔN THI: TOÁN GIẢI TÍCH (Vòng 2)

.....***.....

NGÀY THI:2.../...2.../2010

ĐỀ Chính Thức

THỜI GIAN: 180 PHÚT (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (6 điểm).

a. Cho dãy số $(x_n)_n$ xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{3}{x_n + 1}, n \geq 1$.

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

b. Cho dãy hàm số thực $(f_n)_n$ và hàm số f từ $\mathbf{R}$ vào $\mathbf{R}$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt

$$f_n(x) := \begin{cases} n+1, & \text{nếu } f(x) \geq n \\ \frac{m}{2^n}, & \text{nếu } \frac{m-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{m}{2^n}, m \in \{1, 2, \dots, n2^n\} \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbf{R}).$$

Chứng minh rằng dãy hàm $(f_n)_n$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 (3 điểm).

Cho hàm f khả vi 3 lần trên đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn với mọi $h \in [-1, 1]$,

$$f(h) + f(-h) = f(0) + h^2 + o(h^3), \quad f(h) - f(-h) = f'(0)h + o(h^3).$$

Xác định $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

Câu 3 (6 điểm).

a. Tính các giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2(\sin x)}{x^2},$$

$$J = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{32} \dots \cos \frac{\pi}{2^n}.$$

b. Tính tích phân

$$\int_0^{2\pi} \sin[\sin(2010x) + \sin x] dx.$$

c. Tính giá trị của biểu thức

$$\sum_{k=1}^{2010} \sum_{n=k}^{2010} \frac{1}{n^2 + (3-2k)n + (k^2 - 3k + 2)}.$$

Câu 4 (6 điểm).

a. Cho hàm f khả vi trên đoạn $[0, 1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) + 2010 = 2010f'(x) + x$ có ít nhất một nghiệm thực trong khoảng $(0, 1)$, với $f'(x)$ là đạo hàm của hàm f .

b. Giả sử f, g là hai hàm số xác định, tuần hoàn trên toàn trục số. Biết rằng

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Chứng minh rằng $f(x)=g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 5 (3 điểm). Cho hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

Giả sử tồn tại số nguyên $n > 1$ sao cho $f^n(x) = \underbrace{f_0 f_0 \dots f_0}_{n \text{ lần}}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $f(x)=x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

-----Hết-----

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢNG NAM	ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN HỌC NĂM 2010
KHOA\BỘ MÔN: TOÁN	MÔN THI: ĐẠI SỐ (Vòng 2)
.....***.....	NGÀY THI:27...../...12...../2010
ĐỀ CHÍNH THỨC	THỜI GIAN: 180 PHÚT (không kể thời gian giao đề)

Họ và tên sinh viên:Giới tính:

Câu 1 (5 điểm).

- a. Ma trận A được gọi là lũy đẳng nếu tồn tại số thực $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sao cho $A = \alpha E$ với E là ma trận đơn vị cùng cấp với A . Cho A là ma trận vuông cấp hai. Chứng minh rằng A giao hoán với mọi ma trận vuông cấp hai khi và chỉ khi A là ma trận lũy đẳng.
- b. Cho A là ma trận vuông cấp hai với hệ số thực. Tìm các ma trận A thỏa mãn điều kiện $A^3 = E$.

Câu 2 (5 điểm).

- a. Tính A^{2010} với

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4020} + 2 \sin \frac{\pi}{4020} & 5 \sin \frac{\pi}{4020} \\ -\sin \frac{\pi}{4020} & \cos \frac{\pi}{4020} - 2 \sin \frac{\pi}{4020} \end{pmatrix}.$$

- b. Tính $(E+S)^n$, $n \in \mathbb{N}$, với E là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận S , ở đây
- $$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Câu 3 (5 điểm).

- a. Giả sử $\sqrt[n]{2010}$, $n \in \mathbb{N}^*$ là một giá trị riêng của ma trận vuông S nào đó.

Chứng minh rằng 2010 , $\frac{1}{2010}$ là các giá trị riêng của ma trận S^n , S^{-n} tương ứng.

- b. Cho hai ma trận vuông cấp n : $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,n}$. Chứng minh rằng $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Tính $\text{tr}(AB)$ khi biết $A = {}^t B$.
- c. Tìm trị riêng và vectơ riêng của ma trận sau:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Câu 4 (5 điểm).

- a. Cho đa thức $f(x) = 1 - x + x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + \dots + x^{2007} - x^{2008} + x^{2009} + x^{2010}$.

Chứng minh rằng đa thức $g(x) = f(x) - x^{2010}$ chia hết cho đa thức $h(x) = 1 - x + x^2$. Tìm đa thức thương $q(x)$ khi chia đa thức $g(x)$ cho đa thức $h(x)$.

- b. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ với hệ số thực. Chứng minh rằng
- $$\deg(f(x) \cdot g(x)) \leq \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

- c. Xác định đa thức bậc ba $f(x)$ biết rằng $f(-i)=i$, $f(i)=-i$, $f(0)=2$, $f(1)=7$.

-----Hết-----

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. **Trần Đức Long**- Nguyễn Đình Sang- Hoàng Quốc Toàn, *Bài tập giải tích tập II*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2006.
- [2]. **Trần Lưu Cường**, *Toán Olympic cho sinh viên tập I*, NXB Giáo dục , 2000.
- [3]. **Lê Hoàng Phò**, *Bài giảng cho học sinh chuyên toán: Khảo sát nghiệm phương trình*, NXB Giáo dục , 2008.
- [4]. **W.Rudin**, *Principles of mathematical analysis*, McGraw- Hill, New York, 1964.
- [5]. Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo dục 2002.
- [6]. Lê Hoàng Phò, *Chuyên khảo về đa thức*, Nhà xuất bản ĐHQG Tp Hồ Chí Minh, 2003.
- [7]. B.J. Venkatachala, *Functional Equations - A problem Solving Approach*, PRISM 2002.
- [8]. Christian Leboeuf, Jean Guegand, *Algebre*, Ellipses 1992.
- [9]. Shkliarsky D.O, Chentsov N.N., Yaglom I.M., *Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics*, Mir Publishers, Moscow 1979.
- [10]. Conhiagghin ..., *Các đề vô địch Toán các nước*, Nhà xuất bản Hải phòng 1993.
- [11]. Prasolov V.V, *Polynomials*, MCCME, Moscow 2003.
- [12]. Các tạp chí Kvant, Toán học và tuổi trẻ, tư liệu Internet.