

Chương 1

Lý thuyết

1.1 Các định lý về giá trị trung bình

Định lý 1.1.1 (Fecmat). Cho hàm f xác định trên (a, b) và $c \in (a, b)$. Nếu f đạt cực trị địa phương tại c và $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.

Định lý 1.1.2 (Rolle). Cho hàm f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) . Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý 1.1.3 (Lagrange). Cho hàm f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) . Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý 1.1.4 (Cauchy). Cho hai hàm số f và g liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) . Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Định lý 1.1.5 (Darboux). Cho hàm f khả vi trên (a, b) và $c, d \in (a, b)$. Khi đó f' nhận mọi giá trị trung gian giữa $f'(c)$ và $f'(d)$.

1.2 Khai triển Taylor và quy tắc L'Hospital

Định lý 1.2.1. Nếu hàm số $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ có các đạo hàm đến cấp $n - 1$ trên (a, b) và có đạo hàm cấp n tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì với h đủ nhỏ ta có

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n).$$

Phần dư $o(h^n)$ được gọi là phần dư Peano.

Định lý 1.2.2. Cho hàm f xác định trên $[a, b]$ và x_0 là một điểm cố định trên $[a, b]$. Giả sử f có đạo hàm đến cấp n liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm cấp $n+1$ trên khoảng (a, b) . Khi đó với mỗi $x \in [a, b]$, tồn tại c nằm giữa x và x_0 sao cho

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Biểu thức

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

được gọi là phần dư trong công thức khai triển Taylor (đến bậc $n+1$) của hàm f tại x_0 . Phần dư này được gọi là phần dư dạng Lagrange.

Đặt $h = x - x_0$ và gọi $\theta \in (0, 1)$ là số sao cho $c = x_0 + \theta h$ ta có

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Nếu hàm f thỏa mãn các giả thiết trong định lý trên thì tồn tại số c' nằm giữa x và x_0 sao cho

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c')}{(n+1)!}(x - x_0)(x - c')^n.$$

Biểu thức

$$R'_n = \frac{f^{(n+1)}(c')}{(n+1)!}(x - x_0)(x - c')^n$$

được gọi là phần dư dạng Cauchy. Hiển nhiên là

$$R_n = R'_n.$$

Đặt $h = x - x_0$ và gọi $\theta' \in (0, 1)$ sao cho $x = x_0 + \theta' h$ ta có

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)}{(n+1)!}(1 - \theta')^n h^{n+1}.$$

Định lý 1.2.3. Giả sử f và g là hai hàm số xác định và có đạo hàm hữu hạn trên $(a, b) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a, b)$. Nếu

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (L \in \mathbb{R} \text{ hoặc } L = \pm\infty),$$

$$\text{thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Với những giả thiết thích hợp, quy tắc này cũng đúng cho giới hạn một phía, giới hạn ở vô tận, và giới hạn có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

1.3 Mối liên hệ giữa nguyên hàm và tích phân xác định

Giả sử f là một hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi đó với mỗi $x \in [a, b]$, f khả tích trên $[a, b]$ và ta xác định được hàm số

$$\begin{aligned} F : \quad [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)dt. \end{aligned}$$

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì f khả tích trên $[a, b]$ và khi đó F là một nguyên hàm của f trên $[a, b]$, nghĩa là với mỗi $x \in [a, b]$,

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Nếu f là hàm liên tục trên $[a, b]$, α, β là những hàm khả vi trên $[a, b]$ và nhận giá trị thuộc đoạn $[a, b]$. Khi đó với mỗi $x \in [a, b]$ ta có

$$\left(\int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} f(t)dt \right)' = f(\alpha(x))\alpha'(x) - f(\beta(x))\beta'(x).$$

Chương 2

Bài tập

2.1 Các định lý giá trị trung bình

Bài 1: Cho $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ là một hàm khả vi có đạo hàm liên tục và không âm. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ sao cho

$$(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 \leq 1.$$

Giải:

Xét hàm số $g(x) = \arcsin(f(x))$. Khi đó $g : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ là một hàm liên tục trên $[-\pi/2, \pi/2]$ và nếu $f(x) \neq \pm 1$ thì g khả vi tại x và

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}.$$

Nếu tồn tại $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ sao cho $f(x_0) = 1$ hay $f(x_0) = -1$ thì x_0 là cực trị địa phương của hàm f nên theo định lý Fermat, $f'(x_0) = 0$. Do đó ta có

$$(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 = 1.$$

Nếu $f(x) \neq \pm 1$ với mọi $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ thì g thỏa mãn các điều kiện của định lý Lagrange trên $[-\pi/2, \pi/2]$ nên tồn tại $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ sao cho

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f'(x_0)}{\sqrt{1 - (f(x_0))^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Để ý rằng vì vế phải là không âm nên vế trái cũng không âm. Ngoài ra vế trái không vượt quá π . Vậy ta có bất đẳng thức sau đây

$$0 \leq \frac{f'(x_0)}{\sqrt{1 - (f(x_0))^2}}(\pi) \leq \pi.$$

Từ đó ta nhận được

$$(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 \leq 1.$$

Bài 2: Cho hàm f liên tục trên $[a, b]$ ($a > 0$), khả vi trên (a, b) . Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(x_1) = (a + b) \frac{f'(x_2)}{4x_2} + (a^2 + ab + b^2) \frac{f'(x_3)}{6x_3}.$$

Giải: Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[a, b]$ ta có $x_1 \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1).$$

Áp dụng định lý Cauchy cho hàm f và hàm $x \mapsto x^2$ ta có $x_2 \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2}$$

hay

$$f'(x_1) = (a + b) \frac{f'(x_2)}{2x_2}.$$

Áp dụng định lý Cauchy cho hàm f và hàm $x \mapsto x^3$ ta có $x_3 \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

hay

$$f'(x_1) = (a^2 + ab + b^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

Từ các kết quả trên ta có $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(x_1) = (a + b) \frac{f'(x_2)}{4x_2} + (a^2 + ab + b^2) \frac{f'(x_3)}{6x_3^2}.$$

Bài 3: Cho hàm $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ khả vi đến cấp $n + 1$ tại mỗi điểm của $(-\infty, +\infty)$ và $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, sao cho

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a.$$

Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Giải: Xét hàm

$$F(x) = (f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x))e^{-x}, \quad x \in [a, b].$$

Ta có $F(a) = F(b)$ và với mỗi $x \in [a, b]$, $F'(x) = e^{-x}(f^{(n+1)} - f(x))$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c) = 0$, tức là $f^{(n+1)}(c) - f(c) = 0$.

Bài 4: Cho hàm $f \in C^2([0, +\infty))$ (tức f khả vi liên tục đến cấp 2 trên $[0, +\infty)$). Với mỗi $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, xét hàm số

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \geq 0, \\ a_1 f(-x) + a_2 f(-2x) + a_3 f(-3x) & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng có thể chọn các số $a_k, k = 1, 2, 3$ để $F \in C^2(\mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải: Rõ ràng F khả vi liên tục đến cấp 2 trên $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$. Để $F \in C^2(\mathbb{R})$ thì chỉ cần F khả vi liên tục đến cấp 2 tại 0 là xong.

Ta có

$$\begin{aligned} F \text{ liên tục tại } 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [a_1 f(-x) + a_2 f(-2x) + a_3 f(-3x)] = f(0) \\ &\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3)f(0) = f(0). \end{aligned}$$

Điều đó được thỏa mãn nếu ta chọn các số a_1, a_2, a_3 sao cho

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1.$$

Khi đó ta có

$$F'_+(0) = f'_+(0) \quad \text{và} \quad F'_-(0) = (-a_1 - 2a_2 - 3a_3)f'_+(0).$$

F sẽ có đạo hàm tại 0 nếu các số a_1, a_2, a_3 thỏa thêm điều kiện

$$-a_1 - 2a_2 - 3a_3 = 1.$$

Lúc đó hàm F' được xác định như sau

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{nếu } x > 0, \\ f'_+(0) & \text{nếu } x = 0, \\ -a_1 f'(-x) - 2a_2 f'(-2x) - 3a_3 f'(-3x) & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

$$F''_+(0) = f''_+(0) \quad \text{và} \quad F''_-(0) = (a_1 + 4a_2 + 9a_3)f''_+(0).$$

Do đó F sẽ có đạo hàm cấp 2 tại 0 nếu các số a_1, a_2, a_3 thỏa thêm điều kiện

$$a_1 + 4a_2 + 9a_3 = 1.$$

Khi đó

$$F''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{nếu } x > 0, \\ f''_+(0) & \text{nếu } x = 0, \\ a_1 f'(-x) + 4a_2 f'(-2x) + 9a_3 f'(-3x) & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

là một hàm liên tục.

Tóm lại F khả vi liên tục đến cấp 2 tại 0 (và do đó thuộc $C^2(\mathbb{R})$) nếu (a_1, a_2, a_3) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ -a_1 - 2a_2 - 3a_3 = 1 \\ a_1 + 4a_2 + 9a_3 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được ...

Bài 5: Cho hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi 2 lần và thỏa mãn $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ và $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại một số $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f(c)f'(c) + f''(c) = 0.$$

Giải: Xét hàm số

$$g(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + f'(x), x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $g(0) = 0$ và với mỗi x ,

$$g'(x) = f(x)f'(x) + f''(x).$$

Theo định lý Rolle, ta chỉ cần chứng minh tồn tại $\eta \in (0, 1)$ sao cho $g(\eta) = 0$ thì suy ra ngay sự tồn tại của c theo yêu cầu của bài ra. Ta xét hai trường hợp sau:

a) $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Khi đó đặt

$$h(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{f(x)}, x \in [0, 1],$$

ta có hàm h xác định trên $[0, 1]$ và $h' = \frac{g}{f^2}$. Vì $h(0) = h(1) = -\frac{1}{2}$ nên áp dụng định lý Rolle cho hàm h , tồn tại $\eta \in (0, 1)$ sao cho $h'(\eta) = 0$. Do đó $g(\eta) = f^2(\eta)h'(\eta) = 0$.

b) Tồn tại $x \in [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$.

Khi đó ta gọi

$$z_1 = \inf\{x \in [0, 1] : f(x) = 0\} \quad \text{và} \quad z_2 = \sup\{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}.$$

Từ tính liên tục của hàm f và tính chất của $\inf$ và $\sup$ ta có $f(z_1) = f(z_2) = 0$. Do đó $0 < z_1 \leq z_2 < 1$. Ngoài ra cũng dễ thấy $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0, z_1) \cup (z_2, 1]$.

Từ đó suy ra

$$g(z_1) = f'(z_1) \leq 0 \quad \text{và} \quad g(z_2) = f'(z_2) \geq 0,$$

do đó tồn tại $\eta \in [z_1, z_2] \subset (0, 1)$ sao cho $g(\eta) = 0$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 6: Cho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

a. f tăng trên $[0, 1]$,

b. f khả vi trên $(0, 1]$ và f' giảm trên $(0, 1]$. Xét dãy $(x_n)_n$ được xác định bởi

$$x_n = \frac{1}{1^2} f'(\frac{1}{1}) + \frac{1}{2^2} f'(\frac{1}{2}) + \dots + \frac{1}{n^2} f'(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy $(x_n)_n$ hội tụ.

Giải: Vì f tăng trên $[0, 1]$ nên $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0, 1]$. Do đó với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} f'(\frac{1}{n+1}) \geq 0.$$

Vậy dãy $(x_n)_n$ là một dãy tăng. Để chứng minh $(x_n)_n$ hội tụ ta chỉ cần chứng minh $(x_n)_n$ bị chặn.

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ ta có

$$f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1}) = f'(\theta_k) \frac{1}{k(k+1)},$$

với $\theta_k \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$. Vì f' không âm và giảm trên $(0, 1]$ nên từ đây suy ra

$$f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1}) \geq f'(\frac{1}{k}) \frac{1}{k(k+1)}.$$

Do đó

$$\frac{1}{k^2} f'(\frac{1}{k}) = \frac{k+1}{k} f'(\frac{1}{k}) \frac{1}{k(k+1)} \leq 2[f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1})].$$

Lần lượt thay k bởi $1, 2, \dots, n$ rồi cộng vế theo vế n bất đẳng thức đó ta được

$$x_n \leq 2 \left[f(1) - f(\frac{1}{n+1}) \right].$$

Vì f tăng trên $[0, 1]$ nên $f(\frac{1}{n+1}) \geq f(0)$. Do đó

$$x_n \leq 2[f(1) - f(0)].$$

Ngoài ra dễ ý rằng $x_n \geq 0$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$. Vậy $(x_n)_n$ là một dãy tăng và bị chặn nên hội tụ.

Chú ý:

1. Nếu thay giả thiết f' tăng bằng giả thiết f' giảm thì kết luận ở trên có còn đúng không?

2. Hàm số $f(x) = x, x \in [0, 1]$ là một hàm thỏa mãn bài toán trên.

Bài 7: Cho hàm f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ có thể trừ ra các điểm thuộc tập $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Chứng minh rằng tồn tại các dãy giảm ngặt $(\alpha_n)_n$, $(c_n)_n$ chứa trong khoảng $(0, 1)$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k f'(c_k) = f(1) - f(0).$$

Giải: Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên đoạn $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, tồn tại $c_k \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ sao cho

$$f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1}) = f'(c_k) \frac{1}{k(k+1)}.$$

Đặt $\alpha_k = \frac{1}{k(k+1)}$, ta được

$$f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1}) = f'(c_k) \alpha_k.$$

Từ đó ta nhận được

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k f'(c_k) = f(1) - f(\frac{1}{n+1}).$$

Vì f liên tục tại 0 nên khi qua giới hạn hai vế của đẳng thức trên ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k f'(c_k) = f(1) - f(0).$$

Ngoài ra dễ thấy các dãy số $(\alpha_n)_n$, $(c_n)_n$ chứa trong khoảng $(0, 1)$ và giảm ngặt. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Chú ý:

1. Vì $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 - \frac{1}{n+1}$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$.

2. Hàm f thỏa mãn các tính chất nêu trong bài toán trên một cách không tầm thường có thể được xác định như sau:

Lấy g là một hàm liên tục trên $[0, 1]$. Vì $[0, 1] = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ nên ta xác định được hàm f bằng cách đặt

$$f(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{n}) & \text{nếu } x = \frac{1}{n}, \\ a_n x + b_n & \text{nếu } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \\ f(0) & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

trong đó a_n, b_n được chọn sao cho

$$\begin{cases} \frac{a_n}{n} + b_n = f\left(\frac{1}{n}\right), \\ \frac{a_n}{n+1} + b_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right). \end{cases}$$

Bài 8: Cho g là một hàm khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$, f là một hàm khả vi trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) = 0$. Giả sử có số $\lambda > 0$ sao cho

$$|g'(x)f(x) + f'(x)| \leq \lambda|f(x)|,$$

với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f = 0$ trên đoạn $[a, b]$.

Giải: Giả sử rằng có $c \in (a, b]$ sao cho $f(c) \neq 0$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $f(c) > 0$. Vì f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nên tồn tại $d \in (a, c)$ sao cho $f(d) = 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in (d, c]$. Với $x \in (d, c]$ ta có

$$g'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} - \lambda \leq 0,$$

nên hàm số $F(x) = g(x) + \ln f(x) - \lambda x$ không tăng trên $(d, c]$. Do đó với mỗi $x \in (d, c]$,

$$g(x) + \ln f(x) - \lambda x \geq g(c) + \ln f(c) - \lambda c,$$

hay là

$$f(x) \geq e^{\lambda x - \lambda c + g(c) - g(x)} f(c).$$

Vì f và g' liên tục tại d nên ta nhận được

$$0 = f(d) = \lim_{x \rightarrow d^+} f(x) \geq e^{\lambda d - \lambda c + g(c) - g(d)} f(c) > 0.$$

Mâu thuẫn trên chứng tỏ $f = 0$ trên đoạn $[a, b]$.

Chú ý

1. Lấy $g(x) = 1$ với mọi $x \in [a, b]$ thì ta được một trường hợp riêng của bài toán trên: Cho f là một hàm khả vi trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) = 0$. Giả sử có số $\lambda > 0$ sao cho

$$|f'(x)| \leq \lambda|f(x)|,$$

với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f = 0$ trên đoạn $[a, b]$.

Một cách chứng minh khác như sau: Giả sử có $c \in (a, b]$ sao cho $f(c) \neq 0$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $f(c) > 0$. Vì f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nên tồn tại $d \in (a, c)$ sao cho $f(d) = 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in (d, c]$. Với $x \in (d, c)$ ta có

$$|\ln f(c) - \ln f(x)| = \left| \frac{f'(\theta_x)}{f(\theta_x)} \right| (c - x) \leq \lambda(c - x),$$

với $\theta_x \in (c, x)$. Qua giới hạn hai vế khi $x \rightarrow d^+$ ta nhận được mâu thuẫn. Mâu thuẫn đó chứng tỏ $f = 0$ trên đoạn $[a, b]$.

2. Một bài toán tương tự với giả thiết nhẹ hơn được phát biểu như sau:

Cho g là một hàm bị chặn trên đoạn $[a, b]$, f là một hàm khả vi trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) = 0$. Giả sử có số $\lambda > 0$ sao cho

$$|g(x)f(x) + f'(x)| \leq \lambda|f(x)|,$$

với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f = 0$ trên đoạn $[a, b]$.

Bài 9: Cho f là một hàm khả vi trên $[0, 1]$ sao cho

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Hướng dẫn giải: Đặt

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{nếu } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Khi đó F là một hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1]$. Nếu có $x \in (0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ thì $F(x) = 0$ và từ định lý Rolle ta có ngay điều phải chứng minh. Do đó sau đây ta coi $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (0, 1]$. Hơn nữa do f liên tục nên không mất tính tổng quát ta giả sử $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, 1]$. Khi đó

$$F'(1) = -f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} < 0$$

nên tồn tại $\delta \in (0, 1)$ sao cho $F(x) > F(1)$ với mọi $x \in (\delta, 1)$. Ngoài ra $F(1) > F(0) = 0$, ta suy ra F đạt giá trị nhỏ nhất tại $c \in (0, 1)$. Vậy $F'(c) = 0$ và ta nhận được điều phải chứng minh.

Chú ý: Bài toán tổng quát của bài trên là: Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi sao cho $f'(a) = f'(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)$.

Bài 10: Cho f là một hàm khả vi đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f''(x) \geq f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử $a < b$ và $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Hướng dẫn giải: Giả sử tồn tại $x \in (a, b)$ sao cho $f(x) > 0$. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 \in (a, b)$ và

$$f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0.$$

Vì

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

nên có $\alpha \in (a, x_0)$ sao cho $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (\alpha, x_0)$. Từ đó suy ra

$$f(\alpha) > f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $f''(x) < 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bài 11: Cho hàm f liên tục trên $[a, +\infty)$, khả vi trên $(a, +\infty)$ sao cho $f(a) < 0$, $f'(x) > k > 0$ với mọi $x > a$ (k là hằng số dương). Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, a - \frac{f(a)}{k})$ sao cho $f(c) = 0$.

Gợi ý: Sử dụng định lý Lagrange với chú ý f tăng ngặt.

Bài 12: Giả sử $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số tăng và $f(0) = 0$, $f''(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì $f(a), f(b), f(c)$ cũng là độ dài của 3 cạnh của một tam giác nào đó.

Bài 13: Cho hàm f khả vi trên (a, b) (kể cả trường hợp a thay bởi $-\infty$, b thay bởi $+\infty$) sao cho

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Bài 14: Cho hàm f khả vi trên $[a, b]$ sao cho

- (i) $f(a) = f(b) = 0$,
- (ii) $f'(a) = f'_+(a) > 0, f'(b) = f'_-(b) > 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$ và $f'(c) \leq 0$.

2.2 Khai triển Taylor và quy tắc L'Hospital

Bài 1: Cho $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi đến cấp 3 và thỏa mãn điều kiện $f(-1) = f(0) = 0, f(1) = 1$ và $f'(0) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1, 1)$ sao cho $f'''(c) \geq 3$.

Tìm một hàm f thỏa các điều kiện nêu trên sao cho $f'''(x) = 3$ với mọi $x \in [-1, 1]$.

Giải: Với mỗi $x \in [-1, 1]$, theo công thức khai triển Taylor (Maclaurin) tồn tại $c(x)$ nằm giữa 0 và x sao cho

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(c(x))}{6}x^3.$$

Từ đó suy ra có $c_1 \in (-1, 0)$, $c_2 \in (0, 1)$ sao cho

$$0 = f(-1) = \frac{1}{2}f''(0) - \frac{f'''(c_1)}{6} \quad \text{và} \quad 1 = f(1) = \frac{1}{2}f''(0) + \frac{f'''(c_2)}{6}.$$

Ta nhận được $f'''(c_1) + f'''(c_2) = 6$, do đó $f'''(c_1) \geq 3$ hoặc $f'''(c_2) \geq 3$. Vậy luôn tồn tại $c \in (-1, 1)$ sao cho $f'''(c) \geq 3$.

Nếu $f'''(x) = 3$ với mọi $x \in [-1, 1]$ thì ta phải có

$$f(x) = \frac{f''(0)}{2} + \frac{3}{6}x^3.$$

Kết hợp với các điều kiện khác của f ta được hàm

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2), \quad x \in [-1, 1]$$

là hàm thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài 2: Cho hàm f khả vi đến cấp n trong lân cận của 0 và $f^{(n+1)}(0)$ tồn tại và khác không. Với mỗi h (đủ bé để f xác định tại h) gọi $\theta(h) \in (0, 1)$ là số được xác định bởi khai triển

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\theta(h)h).$$

Chứng minh rằng $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}$.

Giải: Áp dụng khai triển Taylor với phần dư Peano tại $x = 0$ ta có

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0) + o(h^{n+1}).$$

Trừ vế theo vế của đẳng thức đã cho và đẳng thức trên ta có

$$\frac{f^{(n)}(\theta(h)h) - f^{(n)}(0)}{h} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}.$$

Do đó

$$\theta(h) = \frac{\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}}{\frac{f^{(n)}(\theta(h)h) - f^{(n)}(0)}{\theta(h)h}}.$$

Qua giới hạn khi $h \rightarrow 0$ với lưu ý rằng $f^{(n+1)}(0)$ tồn tại và khác không ta được

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}.$$

Chú ý: Kết luận của bài toán vẫn còn đúng khi thay 0 bởi một số thực x bất kỳ với các giả thiết f khả vi đến cấp n trong lân cận của x và $f^{(n+1)}(x)$ tồn tại và khác không.

Bài 3: Cho f là một hàm số khả vi vô hạn lần trên $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ sao cho phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm trên $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ và $\sup_{x \in (0,1)} |f^{(n)}(x)| = O(n!)$ khi $n \rightarrow \infty$. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.

Hướng dẫn giải: Theo định lý Bolzano - Weierstrass tồn tại dãy $(x_n)_n$ các nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0$ hội tụ về $x_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Vì f liên tục nên $f(x_0) = 0$. Theo định lý Rolle, giữa hai nghiệm của f có ít nhất 1 nghiệm của f' . Do f' liên tục nên $f'(x_0) = 0$. Bằng quy nạp ta được $f^{(k)}(x_0) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Theo công thức Taylor, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$, tồn tại $\theta = \theta(n, x) \in (0, 1)$ để

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (x - x_0)^n.$$

Bây giờ vì $\sup_{x \in (0,1)} |f^{(n)}(x)| = O(n!)$ khi $n \rightarrow \infty$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|f(x)| \leq M|x - x_0|^n.$$

Vì $x_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ nên với mọi $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ ta có $|x - x_0| < 1$, từ đó ta được $f(x) = 0$.

Chú ý: Bài toán tổng quát: Cho f là một hàm số khả vi vô hạn lần trên (a, b) sao cho phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm trên $[c, d] \subset (a, b)$ và $\sup_{x \in (a,b)} |f^{(n)}(x)| = O(n!)$ khi $n \rightarrow \infty$. Chứng minh rằng $f = 0$ trên một khoảng con mở của (a, b) .

Bài 4: Cho số thực $a > 0$ và số nguyên $m > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với bất kỳ $x \geq 0$:

$$\sqrt[m]{a^m + x} \geq a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}}.$$

Hướng dẫn giải: Khai triển Taylor hàm số $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$, $x \in [0, +\infty)$ tại 0 đến cấp 2.

Bài 5: Cho hàm f thỏa mãn

- (i) f khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$,
- (ii) Tồn tại $L > 0$ sao cho $|f^{(n)}(x)| \leq L$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và mọi $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) $f(\frac{1}{n}) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $f = 0$ trên $\mathbb{R}$.

Gợi ý: Chứng minh $f^{(k)}(0) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ rồi sau đó sử dụng khai triển Taylor của hàm f tại 0.

Bài 6: Cho f là một hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho với mỗi $k = 0, 1, 2$,

$$M_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \infty.$$

Chứng minh rằng $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Hướng dẫn giải: Với $h > 0$ và $x \in \mathbb{R}$, có $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta_1h)\frac{h^2}{2}$$

và

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x-\theta_2h)\frac{h^2}{2}.$$

Từ đó ta nhận được

$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)) - \frac{h}{4}(f''(x+\theta_1h) - f''(x-\theta_2h)).$$

Do đó

$$|f'(x)| < \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$$

với $h > 0$. Dùng bất đẳng thức Cauchy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức nhận được khi $h = \sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$.

Bài 7: Cho f là hàm khả vi đến cấp 2 trên $(0, +\infty)$ và f'' bị chặn. Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Hướng dẫn giải: Vì f'' bị chặn nên tồn tại $M > 0$ để $|f''(x)| \leq M$ với mọi $x \in (0, +\infty)$. Với $x, h \in (0, +\infty)$ ta có $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta h)\frac{h^2}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{Mh}{2}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $x_0 > 0$ sao cho với mỗi $x \geq x_0$ và $h > 0$,

$$|f'(x)| \leq \frac{2\varepsilon^2}{Mh} + \frac{Mh}{2}.$$

Lấy $h = \varepsilon$ ta được $|f'(x)| \leq \varepsilon$ với mọi $x \geq x_0$. Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Bài 8: Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 trên $(0, +\infty)$ sao cho

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xf''(x) = 0.$$

Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$.

Gợi ý: Khai triển Taylor $f(x+1)$ tại x .

Bài 9: Cho f là một hàm khả vi trên $(0, +\infty)$. Chứng minh rằng

- (i) Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
- (ii) Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2\sqrt{x}f'(x)) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Gợi ý:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (f(x) + f'(x))}{e^x} = L.$$

Bài 10: Chứng minh rằng nếu $f'''(x)$ tồn tại thì

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f'''(x).$$

2.3 Đạo hàm và tích phân

Bài 1: Cho f liên tục trên $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện $\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng

- a) Nếu $a \geq 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\int_a^c f(x)dx = \frac{f(c)}{c}$.
- b) Nếu $a > 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $2007 \int_a^c f(x)dx = cf(c)$.
- c) Với mỗi $\alpha \neq 0$ cho trước, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\int_a^c f(x)dx = \alpha f(c)$.

Giải:

a) Xét hàm số $F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$. Rõ ràng f liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và với mỗi $x \in [a, b]$,

$$F'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \int_a^x f(t)dt + e^{-\frac{x^2}{2}} f(x).$$

Mặt khác, theo giả thiết $F(a) = F(b) = 0$ nên theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c) = 0$, tức là

$$-ce^{\frac{-c^2}{2}} \int_a^c f(t)dt + e^{\frac{-c^2}{2}} f(c) = 0.$$

Vì $c > a \geq 0$ và $e^{\frac{-c^2}{2}} > 0$ nên từ đó ta có

$$\int_a^c f(x)dx = \frac{f(c)}{c}.$$

b) Lập luận tương tự a) bằng cách xét hàm số

$$F(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x^{2007}}, \quad x \in [a, b].$$

c) Lập luận tương tự a) bằng cách xét hàm

$$F(x) = e^{\frac{-x}{\alpha}} \int_a^x f(x)dx, \quad x \in [a, b].$$

Bài 2: Cho f và g là các hàm số liên tục và dương trên $[a, b]$. Chứng minh rằng với mọi số thực α tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx}}{\frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx}} = \alpha.$$

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Xét hàm số

$$F(x) = \frac{f(x)}{\int_a^x f(t)dt} - \frac{g(x)}{\int_x^b g(t)dt}, \quad x \in (a, b).$$

Dễ thấy rằng f liên tục trên (a, b) , $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = -\infty$. Sử dụng tính chất nhận giá trị trung gian của hàm liên tục ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Xét hàm số

$$H(x) = e^{-\alpha x} \int_a^x f(x)dx \int_x^b g(x)dx, \quad x \in [a, b]$$

và sử dụng định lý Rolle.

Bài 3: Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$\int_c^b f(x)dx = x_0 f(x_0).$$

Hướng dẫn giải: Xét hàm số $F(x) = x \int_x^b f(t)dt$, $x \in [a, b]$, và sử dụng định lý Rolle.

Bài 4: Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in [0, 1]$, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^c f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Giải: Đặt $I = \int_a^b f(x)dx$ và xét hàm số $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, $x \in [a, b]$. Ta thấy F liên tục trên $[a, b]$ và $F(a) = 0$, $F(b) = I$. Do αI là một giá trị trung gian giữa 0 và I nên tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $F(c) = \alpha I$, tức là

$$\int_a^c f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Mục lục

1	Lý thuyết	1
1.1	Các định lý về giá trị trung bình	1
1.2	Khai triển Taylor và quy tắc L'Hospital	1
1.3	Mối liên hệ giữa nguyên hàm và tích phân xác định	3
2	Bài tập	4
2.1	Các định lý giá trị trung bình	4
2.2	Khai triển Taylor và quy tắc L'Hospital	12
2.3	Đạo hàm và tích phân	16

Chương I

TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Bài 1.1. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có nghiệm.

b) Hãy tìm một hàm thoả mãn điều kiện trên nhưng không đồng nhất bằng x trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

a) Giả sử phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$, tức là $f(x) \neq x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì hàm f liên tục nên ta suy ra f không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. Không mất tổng quát, giả sử $f(x) > x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó: $f(f(x)) > f(x) > x$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy phương trình $f(x) = x$ luôn có nghiệm.

b) Dễ thấy hàm $f(x) = 1 - x$ thoả mãn điều kiện $f(f(x)) = x$ và không đồng nhất bằng x .

Bài 1.2. Cho $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ là một hàm liên tục sao cho $f(a) = a$, $f(b) = b$ và $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in [a, b]$.

Hướng dẫn:

Từ giả thiết $f(f(x)) = x$ ta dễ dàng suy ra f là đơn ánh. Kết hợp với tính liên tục ta kết luận được f là một hàm đơn điệu. Hơn nữa, do $f(a) = a < b = f(b)$ nên f đơn điệu tăng trên $[a, b]$.

Nếu tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $f(x_o) < x_o$ hay $f(x_o) > x_o$ thì $f(f(x_o)) < f(x_o) < x_o$ hay $f(f(x_o)) > f(x_o) > x_o$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bài 1.3. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(f(x))) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng $f(x) = x$ trên $\mathbb{R}$. Hãy tìm bài toán tổng quát hơn.

b) Tìm một hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(f(x))) = x$ nhưng $f(x)$ không đồng nhất bằng x .

Hướng dẫn:

a) Từ giả thiết suy ra hàm f đơn điệu ngặt trên $\mathbb{R}$. Nếu f giảm ngặt trên $\mathbb{R}$ thì f^2 tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Do đó f^3 lại giảm ngặt trên $\mathbb{R}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(f(f(x))) = x$.

Bây giờ giả sử f tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Nếu tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_o) > x_o$ thì ta suy ra $f(f(x_o)) > f(x_o) > x_o$, và $f(f(f(x_o))) > f(x_o) > x_o$. Điều này mâu thuẫn.

Tương tự ta cũng có được điều mâu thuẫn nếu $f(x_o) < x_o$. Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán tổng quát: "Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f^{2n+1}(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x) = x$ trên $\mathbb{R}$."

$$b) f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \notin \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \\ 3 & \text{nếu } x = 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 3. \end{cases}$$

Bài 1.4. Cho f là một hàm liên tục và đơn ánh trên (a, b) . Chứng minh rằng f là một hàm đơn điệu ngặt trên (a, b) .

Hướng dẫn:

Giả sử f không phải là hàm đơn điệu ngặt trên (a, b) , khi đó tồn tại x_1, x_2, x_3 thuộc (a, b) sao cho $x_1 < x_2 < x_3$ và

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_3) < f(x_2) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_3) > f(x_2) \end{cases}.$$

Giả sử $\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_3) < f(x_2) \end{cases}$. Đặt $m = \max\{f(x_1), f(x_3)\}$, $M = f(x_2)$.

Chọn $k \in [m, M]$. Theo định lý giá trị trung gian, tồn tại c_1, c_2 thuộc (a, b) sao cho: $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3$ và $f(c_1) = f(c_2) = k$.

Điều này mâu thuẫn với tính đơn ánh của f .

Tương tự, nếu $\begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_3) > f(x_2) \end{cases}$ ta cũng suy ra điều mâu thuẫn. Vậy f là một hàm đơn điệu ngặt trên (a, b) .

Bài 1.5. Cho hàm số $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ thỏa mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ với mọi } x \in [a, b], x \neq y.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có duy nhất nghiệm trên $[a, b]$.

Hướng dẫn:

Đặt $\varphi(x) = f(x) - x$. Dễ thấy $\varphi(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

Ta có: $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$, $\varphi(b) = f(b) - b \leq 0$ nên tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $\varphi(x_o) = f(x_o) - x_o = 0$, tức là $f(x_o) = x_o$.

Nếu tồn tại x_1, x_2 thuộc $[a, b]$, $x_1 \neq x_2$ mà $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$ thì ta suy ra:

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|, \text{ điều này là mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình $f(x) = x$ luôn có duy nhất nghiệm trên $[a, b]$.

Bài 1.6. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

a) f là hàm đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$.

b) f là một hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có nghiệm. Trong mỗi trường hợp, hãy xem điều kiện duy nhất nghiệm có được đảm bảo không?

Hướng dẫn:

a) Đặt $\varphi(x) = f(x) - x$ thì φ liên tục trên $\mathbb{R}$. Với mọi $x > 0$ ta có

$$\varphi(x) = f(x) - x \leq f(0) - x.$$

Với mọi $x < 0$, ta có $\varphi(x) = f(x) - x \geq f(0) - x$.

Từ đó suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Do đó, tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ để $\varphi(x_o) = 0$, tức là phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

b) Đặt $\varphi(x) = f(x) - x$ thì φ liên tục trên $\mathbb{R}$. Theo giả thiết, f bị chặn trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-M \leq f(x) \leq M$.

Chọn $x_1 \geq M$, khi đó ta có

$$\varphi(x_1) = f(x_1) - x_1 \leq f(x_1) - M \leq 0.$$

Chọn $x_2 \leq -M$, khi đó ta có

$$\varphi(x_2) = f(x_2) - x_2 \geq f(x_2) + M \geq 0.$$

Vậy tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$, tức là phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện duy nhất nghiệm.

Bài 1.7. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thì phương trình $f(x) = x$ cũng có nghiệm.

Hướng dẫn:

Giả sử phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$. Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta suy ra $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$ hoặc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$.

Nếu với mọi $x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ thì $f(f(x)) > f(x) > x$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm.

Tương tự, nếu với mọi $x \in \mathbb{R}, f(x) < x$ thì ta cũng có điều mâu thuẫn. Vậy phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

Bài 1.8. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x)| < |x| \text{ với mọi } x \neq 0.$$

a) Chứng minh rằng $f(0) = 0$.

b) Chứng minh rằng nếu $0 < a < b$ thì tồn tại $K \in [0, 1)$ sao cho

$$|f(x)| \leq K|x|, \forall x \in [a, b].$$

Hướng dẫn:

a) Ta có: $|f(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$. Vậy $f(0) = 0$.

b) Với mọi $x \in [a, b]$, đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Ta thấy g liên tục trên $[a, b]$. Đặt

$$K = \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{f(x)}{x} \right|. \text{ Vì } |g| \text{ liên tục trên } [a, b] \text{ nên tồn tại } x_0 \in [a, b] \text{ để}$$

$$K = \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \left| \frac{f(x_0)}{x_0} \right| < 1.$$

Từ đó dễ thấy rằng $|f(x)| \leq K|x|$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bài 1.9. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn một trong ba điều kiện dưới đây:

a) $f(x) + f(2x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = f(\sin x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Hướng dẫn:

a) Từ giả thiết suy ra $f(x) = -f(2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Bằng qui nạp ta dễ dàng chứng minh được $f(x) = (-1)^n f(\frac{x}{2^n})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chú ý rằng từ giả thiết ta cũng có $f(0) = 0$. Vì vậy

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n f(\frac{x}{2^n}) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $\left| (-1)^n f(\frac{x}{2^n}) \right| = \left| f(\frac{x}{2^n}) \right|$. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(\frac{x}{2^n}) \right| = |f(0)| =$

0. Do đó $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n f(\frac{x}{2^n}) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, với mọi $x > 0$ ta có

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = \dots = f(x^{\frac{1}{2^n}}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$ (do f liên tục trên $\mathbb{R}$).

Vì $f(-x) = f(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f(x) = f(1)$ với mọi $x \neq 0$.

Hơn nữa, do tính liên tục của hàm f , ta cũng có

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1) = f(1).$$

Tóm lại, $f(x) = f(1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, đặt $x_1 = \sin x, x_2 = \sin x_1, \dots, x_{n+1} = \sin x_n$. Khi đó, hãy chứng minh rằng $(x_n)_n$ là dãy đơn điệu và bị chặn. Gọi $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; từ phương trình $a = \sin a$ ta suy ra $a = 0$.

Ta thấy $f(x) = f(x_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì vậy

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(0).$$

Từ đó, ta kết luận được $f(x) = f(0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là f là hàm hằng.

Bài 1.10. Cho f là một hàm không âm, liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k < 1$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0, +\infty)$ sao cho $f(x_o) = x_o$.

Hướng dẫn:

Đặt $\varphi(x) = f(x) - x$. Ta có $\varphi(0) = f(0) \geq 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k < 1$ nên tồn tại $c > 0$ sao cho với mọi $x \geq c$ thì $\frac{f(x)}{x} < 1$. Suy ra $f(c) < c$ hay $\varphi(c) = f(c) - c < 0$.

Vậy tồn tại $x_o \in [0, c] \subset [0, +\infty)$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$, tức là $f(x_o) = x_o$.

Bài 1.11. Cho f là hàm liên tục trên $[0, n]$, $f(0) = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng tồn tại n cặp (α_i, β_i) , $\alpha_i, \beta_i \in [0, n]$, $\beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N}$ sao cho $f(\alpha_i) = f(\beta_i)$.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng qui nạp. Rõ ràng khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử rằng nếu f là một hàm liên tục trên $[0, n]$ sao cho $f(0) = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ thì tồn tại n cặp (α_i, β_i) thoả mãn $\beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_i) = f(\beta_i)$.

Ta chứng minh khẳng định trên đúng với $n + 1$. Giả sử $f(0) = f(n + 1)$.

Xét hàm $\varphi(x) = f(x + 1) - f(x)$, $x \in [0, n]$.

Ta có $\varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(n) = 0$.

Do đó tồn tại $x_o \in [0, n]$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$ hay $f(x_o + 1) = f(x_o)$.

Đặt

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, x_o] \\ f(x + 1), & x \in (x_o, n]. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng h liên tục trên $[0, n]$ và $h(0) = h(n)$. Theo giả thiết qui nạp tồn tại n cặp $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$ thoả mãn

$$\begin{cases} h(\bar{\alpha}_i) = h(\bar{\beta}_i) \\ \bar{\beta}_i - \bar{\alpha}_i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Đặt $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ nếu $\alpha_i \in [0, x_o]$; $\beta_i = \bar{\beta}_i$ nếu $\beta_i \in [0, x_o]$,

$\alpha_i = \bar{\alpha}_i + 1$ nếu $\alpha_i \in (x_o, n]$; $\beta_i = \bar{\beta}_i + 1$ nếu $\beta_i \in (x_o, n]$.

Rõ ràng

$$\begin{cases} f(\alpha_i) = f(\beta_i) \\ \beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N} \\ (\alpha_i, \beta_i) \neq (x_o, x_o + 1), \forall i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Đặt $\alpha_{n+1} = x_o, \beta_{n+1} = x_o + 1$. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 1.12. Cho $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ là một hàm đơn điệu tăng sao cho $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ là một hàm đơn điệu giảm. Chứng minh rằng f liên tục trên $(0, +\infty)$.
 Bạn đọc tự giải.

Bài 1.13. Cho f là một hàm liên tục trên $[a, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$.

- Chứng minh rằng f bị chặn ở trên $[a, +\infty)$.
- Chứng minh rằng f liên tục đều trên $[a, +\infty)$.
- Giả sử thêm rằng $c > f(a)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [a, +\infty)$ sao cho $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}$.

Hướng dẫn:

- Từ giả thiết ta suy ra tồn tại $b > a$ sao cho

$$|f(x) - c| \leq 1 \text{ khi } x > b.$$

Do đó $|f(x)| \leq 1 + |c|$ khi $x > b$.

Vì f liên tục trên $[a, b]$ nên f bị chặn trên $[a, b]$. Ta đặt $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Khi đó, $|f(x)| \leq \max\{M, 1 + |c|\}$ với mọi $x \in [a, +\infty)$.

- Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_0 > a$ sao cho

$$|f(x) - c| < \varepsilon/3, \forall x \geq x_0.$$

Vì f liên tục trên $[a, x_0]$ nên f liên tục đều trên đoạn này, do đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x, y \in [a, x_0].$$

Bây giờ lấy $x, y \in [a, +\infty)$ thỏa mãn $|x - y| < \delta$. Không mất tính tổng quát giả sử $x < y$.

* $x, y \in [a, x_0] : |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$.

* $x, y \geq x_0 : |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

* $x \in [a, x_0], y > x_0 : |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Vậy f liên tục đều trên $[a, +\infty)$.

c) Vì $f(a) < c$ nên tồn tại $b > a$ sao cho $f(x) > f(a)$ với mọi $x \geq b$. Hàm f liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$.

Rõ ràng $f(x_0) \leq f(a) < f(x)$ với mọi $x \geq b$. Vì vậy ta có

$$f(x_0) = \inf_{x \in [a, +\infty)} f(x).$$

Bài 1.14. Cho $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ là các hàm liên tục thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in [0, 1]$.

- Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.

- Kết luận còn đúng không nếu thay $[0, 1]$ bởi $\mathbb{R}$?

Hướng dẫn:

a) Giả sử phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $f(x) > g(x)$ với mọi $x \in [0, 1]$. Khi đó tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$m = \inf_{x \in [0, 1]} \{f(x) - g(x)\} = f(x_0) - g(x_0) > 0.$$

Do đó $f(x) \geq g(x) + m, \forall x \in [0, 1]$. Vậy $f(g(x)) \geq g(g(x)) + m, \forall x \in [0, 1]$. Ta suy ra $f(f(x)) - m \geq g(f(x)) \geq g(g(x)) + m, \forall x \in [0, 1]$.

Vì vậy $f(f(x)) \geq g(g(x)) + 2m$.

Bằng cách lặp lại quá trình này ta suy ra

$$\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{k \text{ lần}} \geq \underbrace{g(g(\cdots g(x))\cdots)}_{k \text{ lần}} + k.m, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $k.m \leq 1$, với mọi $k \in \mathbb{N}$. Điều này là mâu thuẫn. Vậy có $x_o \in [0, 1]$ sao cho $f(x_o) = x_o$.

b) Kết luận không còn đúng nếu thay $[0, 1]$ bởi $\mathbb{R}$. Chẳng hạn lấy $f(x) = x, g(x) = e^x$.

Bài 1.15. Cho $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ là các hàm liên tục thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in [0, 1]$. Giả sử f là một hàm đơn điệu. Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0, 1]$ sao cho $f(x_o) = g(x_o) = x_o$.

Hướng dẫn:

Vì g liên tục nên tồn tại $a \in [0, 1]$ sao cho $g(a) = a$. Đặt $x_1 = f(a), x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $(x_n)_n$ là một dãy đơn điệu và bị chặn. Vì vậy tồn tại $x_o \in [0, 1]$ sao cho $x_o = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Do hàm f liên tục nên ta cũng có $f(x_o) = x_o$ (chú ý rằng $x_n = f(x_{n-1})$).

Mặt khác $g(x_o) = g(f(x_o)) = f(g(x_o)) = f(g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n))$.

Để thấy rằng $g(x_n) = x_n$ với mọi n . Do đó

$$g(x_o) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_o) = x_o.$$

Bài 1.16. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow \infty) \quad (*)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

a) Nếu f là hàm số lẻ thì $f(x) = Ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Nếu f là hàm số chẵn thì f là hàm hằng.

c) Chứng minh rằng $f(x) = Ax + B, A, B = \text{const.}$

Lời giải:

a) Từ giả thiết ta có:

$$f(x) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} [f(x+h) + f(x-h)], \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} [f(x+y+h) + f(x+y-h)] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} [f(x+y+h) + f(x-y-h) + f(x+y-h) - f(x-y-h)] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} [f(x+y+h) + f(x-y-h) + f(x+y-h) + f(y-(x-h))] \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(x) = Ax, A = \text{const.}$

b) Bạn đọc tự giải.

c) Hướng dẫn:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Vì g là hàm số chẵn thỏa mãn điều kiện (*), h là hàm số lẻ thỏa mãn điều kiện (*), nên ta suy ra $f(x) = Ax + B$ từ câu a) và câu b).

Bài 1.17. Cho f, g là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} |f(x) - x| \leq g(x) - g(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

Lời giải:

Chọn $x_1 \in \mathbb{R}$ và đặt $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} |f(x_n) - x_n| &\leq g(x_n) - g(x_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ \Leftrightarrow |x_{n+1} - x_n| &\leq g(x_n) - g(x_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Do đó $(g(x_n))_n$ là một dãy giảm và bị chặn dưới. Đặt $l = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$.

Vì $|x_{n+1} - x_n| \leq g(x_n) - g(x_{n+1})$, nên

$$|x_{n+p} - x_n| \leq g(x_n) - g(x_{n+p}), \quad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Từ đó suy ra $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy. Gọi $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ta dễ thấy rằng $f(c) = c$.

Bài 1.18. Cho f là một hàm xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{nếu } x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \\ x & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

a) Khảo sát tính liên tục của f tại các điểm $0, 1, \frac{1}{2}$.

b) Khảo sát tính liên tục của f tại $a \in \mathbb{I} \cap [0, \frac{1}{2})$.

c) Chứng minh rằng f là một song ánh từ $[0, 1]$ lên $[0, 1]$ và tìm f^{-1} .

Hướng dẫn:

a) Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 0, x_0 = 1$.

Tại $x_0 = \frac{1}{2}$, $f(x_0) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Với mọi $x \in [0, 1]$ ta có

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| &= \begin{cases} \left| x - \frac{1}{2} \right| & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \left| \frac{1}{2} - x \right| & \text{nếu } x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \end{cases} \\ &= \left| x - \frac{1}{2} \right|. \end{aligned}$$

Từ đó, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left| x - \frac{1}{2} \right| = 0$.

Vậy f liên tục tại $\frac{1}{2}$.

b) Tại $a \in \mathbb{I} \cap [0, \frac{1}{2})$ ta có $f(a) = 1 - a$.

Vì $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại dãy $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$, có thể giả sử $x_n \in [0, 1]$ với mọi n , sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Nếu f liên tục tại a thì $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ hay $a = 1 - a$, tức là $a = \frac{1}{2}$.

Điều này mâu thuẫn vì $a \in \mathbb{I} \cap [0, \frac{1}{2})$. Vậy f gián đoạn tại $a \in \mathbb{I} \cap [0, \frac{1}{2})$.

c) Bạn đọc tự giải.

Bài 1.19. Cho $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ là các hàm liên tục thoả mãn

$$\sup_{x \in [0, 1]} f(x) = \sup_{x \in [0, 1]} g(x).$$

Chúng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$(f(x_0))^2 + 3f(x_0) = (g(x_0))^2 + 3g(x_0).$$

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = (f(x))^2 + 3f(x) - (g(x))^2 - 3g(x)$ thì φ liên tục trên $[0, 1]$. Do tính liên tục của các hàm f và g nên tồn tại $x_1, x_2 \in [0, 1]$ sao cho

$$f(x_1) = g(x_2) = \sup_{x \in [0, 1]} f(x) = \sup_{x \in [0, 1]} g(x).$$

Khi đó dễ dàng kiểm tra được rằng $\varphi(x_1) \geq 0$ và $\varphi(x_2) \leq 0$. Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Bài 1.20. Cho $a > 0$ và $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục sao cho

$$|f(x) - f(y)| \geq a|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chúng minh rằng f là song ánh.

Hướng dẫn:

Từ giả thiết suy ra f là đơn ánh. Hơn nữa, hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên theo Bài 2.4 ta có f là hàm đơn điệu.

Giả sử f là hàm đơn điệu tăng. Khi đó ta có

$$f(x) - f(0) \geq a(x - 0) \text{ với mọi } x > 0,$$

hay $f(x) - f(0) \geq ax$ với mọi $x > 0$.

Tương tự, $f(x) - f(0) \leq ax$ với mọi $x < 0$. Bằng cách qua giới hạn, ta được $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Vậy f là toàn ánh, do đó f là song ánh.

Trường hợp hàm f đơn điệu giảm, ta cũng kết luận được f là song ánh.

Bài 1.21. Cho $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ là một hàm liên tục thoả mãn $f(0) = 0$ và $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \quad \forall x, y \in [0, 1]$.

a) Chúng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

b) Kết luận trên còn đúng không nếu thay $[0, 1]$ bởi $\mathbb{R}$?

Hướng dẫn:

a) Từ giả thiết suy ra f đơn ánh, do đó f đơn điệu. Dễ thấy rằng $f(1) \geq 1$ nên f đơn điệu tăng, và ta suy ra được $f(1) = 1$.

Ta thấy

$$f(x) = |f(x) - f(0)| \geq x, \text{ với mọi } x \in [0, 1].$$

$$1 - f(x) = |f(x) - f(1)| \geq 1 - x, \text{ với mọi } x \in [0, 1].$$

Vì vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

b) Xét hàm $f(x) = 2x$.

Bài 1.22. Cho f là một hàm liên tục trên $[0, 1]$ sao cho $f(0) = f(1)$.

a) Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$, phương trình $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ luôn luôn có nghiệm trong $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

b) Tìm tất cả các số thực $d \in (0, 1)$ sao cho phương trình $f(x) = f(x + d)$ luôn có nghiệm trong $[0, 1 - d]$.

Hướng dẫn:

a) Đặt $\varphi(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$ thì φ liên tục trên $[0, 1 - \frac{1}{n}]$. Ta thấy:

$$\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{n}) + \dots + \varphi(\frac{n-1}{n}) = f(0) - f(1) = 0.$$

Nếu $\varphi(\frac{k}{n}) = 0$ với mọi $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu tồn tại $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sao cho $\varphi(\frac{k}{n}) \neq 0$, giả sử $\varphi(\frac{k}{n}) > 0$, thì lúc đó ta luôn tìm được $k' \neq k, k' \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sao cho $\varphi(\frac{k'}{n}) < 0$. Do đó, tồn tại $x_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ sao cho $\varphi(x_0) = 0$.

b) Hãy chứng tỏ $d = \frac{1}{n}$.

Bài 1.23. Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực $(a_n)_n \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ sao cho $\cos a_n = a_n^n$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Hướng dẫn:

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $\varphi_n(x) = \cos x - x^n$. Ta thấy φ_n liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ và $\varphi_n(0) > 0, \varphi_n(\frac{\pi}{2}) = -(\frac{\pi}{2})^n < 0$. Vì vậy tồn tại $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ sao cho $\varphi_n(a_n) = 0$, tức là $\cos a_n = a_n^n$.

Vì $a_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ nên $\cos a_n \in [0, 1]$. Do đó $0 \leq a_n^n \leq 1$.

Suy ra $\cos 1 \leq a_n^n = \cos a_n \leq 1$. Từ đó ta có $(\cos 1)^{\frac{1}{n}} \leq a_n \leq 1$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Bài 1.24. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục thỏa mãn $f(x+1) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng f là hàm bị chặn.

b) Chứng minh rằng f luôn đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

c) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f(x + \pi)$ luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

a) Hàm f liên tục trên đoạn $[0, 1]$ nên bị chặn trên đoạn này. Do đó, tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $x \in [0, 1]$ thì $|f(x)| \leq M$.

Xét $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Khi đó tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ để $x + n$ thuộc $[0, 1]$. Chú ý rằng từ giả thiết ta suy ra $f(x) = f(x + n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Vì vậy

$$|f(x)| = |f(x + n)| \leq M.$$

Tóm lại, hàm f bị chặn trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm f liên tục trên $[0, 1]$ nên đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn này. Vì $f(x) = f(x+1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên ta suy ra f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

c) Bạn đọc tự giải.

Bài 1.25. Liệu có tồn tại hay không một hàm liên tục $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ và hai tập con A, B của $[0, 1]$ sao cho $A \cup B = [0, 1], A \cap B = \emptyset$ và $f(A) \subset B, f(B) \subset A$?

Hướng dẫn:

Giả sử tồn tại 2 tập A, B và hàm $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Ta có: $f(0) \geq 0$, $f(1) \leq 1$. Vì f liên tục trên $[0, 1]$ nên suy ra tồn tại $x_o \in [0, 1]$ sao cho $f(x_o) = x_o$.

Nếu $x_o \in A$ thì $f(x_o) = x_o \in B$. Do đó $x_o \in A \cap B$, tức là $A \cap B \neq \emptyset$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Lập luận tương tự ta cũng có điều mâu thuẫn nếu $x_o \in B$.

Vậy không tồn tại hàm f và 2 tập A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1.26. Cho $M > 0$ và f là một hàm liên tục thỏa mãn

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Chúng minh rằng với mỗi $x \in \mathbb{R}$, luôn tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(nx)}{n}$.

Hướng dẫn:

Bằng qui nạp ta dễ dàng suy ra

$$|f(nx) - nf(x)| \leq M, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó $|mf(nx) - nf(mx)| = |m[f(nx) - nf(x)] - n[f(mx) - mf(x)]| \leq (m+n)M$.

Vì vậy $\left| \frac{f(nx)}{n} - \frac{f(mx)}{m} \right| \leq M \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$. Từ đây suy ra $\left(\frac{f(nx)}{n} \right)_n$ là một dãy

Cauchy. Do đó nó hội tụ, tức là tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(nx)}{n}$.

Bài 1.27. Cho f là một hàm liên tục trên $[a, b]$ và $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(x) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Hướng dẫn:

Đặt $\alpha = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$. Hàm f liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại x^*, x^{**} thuộc $[a, b]$ sao cho

$$f(x^*) = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x^{**}) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Không mất tổng quát, giả sử $x^* \leq x^{**}$. Khi đó, hàm f liên tục trên đoạn $[x^*, x^{**}]$ nên theo định lý Bolzano-Cauchy, f nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(x^*)$ và $f(x^{**})$. Vì $\alpha \in [f(x^*), f(x^{**})]$ nên tồn tại $c \in [x^*, x^{**}] \subset [a, b]$ sao cho $\alpha = f(c)$.

Bài 1.28 Cho $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ là một hàm liên tục.

a) Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty.$$

b) Khẳng định câu a) còn đúng không nếu thay $[0, +\infty)$ bởi $(0, +\infty)$?

Hướng dẫn:

a) Điều kiện cần là rõ ràng. Ta chứng minh điều kiện đủ.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < +\infty$. Khi đó tồn tại số $N > 0$ sao cho với mọi n , tồn tại $x_n > n$ và $0 \leq f(x_n) \leq N$. Hàm f liên tục trên $[0, N]$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $f(x) \leq M$ với mọi $x \in [0, N]$.

Như vậy, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_n > n$ sao cho $f(f(x_n)) \leq M$. Điều này trái với giả thiết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$.

b) Xét $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ với $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ta có: $f(f(x)) = x \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$. Tuy nhiên $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Bài 1.29. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ có tính chất: với mọi $\varepsilon > 0$, tập $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \varepsilon\}$ là hữu hạn.

a) Chứng minh rằng với mỗi khoảng mở $(a, b) \subset \mathbb{R}$, tồn tại $x_o \in (a, b)$ sao cho $f(x_o) = 0$.

b) Hãy chứng minh f liên tục tại mọi x_o thỏa mãn $f(x_o) = 0$.

Hướng dẫn:

a) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Vì A_1 hữu hạn nên tồn tại $a_1, b_1 \in (a, b)$, $a_1 < b_1$, $|b_1 - a_1| < 1$ và

$$[a_1, b_1] \cap A_1 = \emptyset.$$

Bằng qui nạp, ta xây dựng được dãy đoạn đóng lồng nhau $([a_n, b_n])_n$ có tính chất $|b_n - a_n| < \frac{1}{n}$ với mọi n và $[a_n, b_n] \cap A_n = \emptyset$.

Theo bổ đề Căng to, tồn tại $x_o \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]$. Dễ thấy rằng $0 \leq f(x_o) \leq \frac{1}{n}$, từ đó suy ra $f(x_o) = 0$.

b) Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có tập $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \varepsilon\}$ là hữu hạn và $x_o \notin A_\varepsilon$. Vì vậy tồn tại $\delta > 0$ sao cho $[x_o - \delta, x_o + \delta] \cap A_\varepsilon = \emptyset$. Khi đó, $0 \leq f(x) \leq \varepsilon$ với $|x - x_o| < \delta$, tức là f liên tục tại x_o .

Bài 1.30. Cho $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hai hàm số bị chặn và $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số xác định bởi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + xg(t)|.$$

Chứng minh rằng tồn tại $K > 0$ sao cho

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn:

Với mọi $t \in [0, 1]$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$[f(t) + xg(t)] - [f(t) + yg(t)] = (x - y)g(t) \leq K|x - y| \text{ với } K = \sup_{t \in [0, 1]} |g(t)| \text{ hay}$$

$f(t) + xg(t) \leq f(t) + yg(t) + K|x - y|$, với mọi $t \in [0, 1]$. Từ đây lấy supremum hai vế ta được $\varphi(x) \leq \varphi(y) + K|x - y|$.

Lý luận tương tự, ta có $\varphi(y) \leq \varphi(x) + K|x - y|$.

Từ đó, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 1.31. Cho hàm số f liên tục trên $[0, +\infty)$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Chứng minh rằng nếu $b > a = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$ thì tồn tại các số thực $b_i > a_i, i = \overline{1, n}$ sao cho

$$b = f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n).$$

Hướng dẫn:

a) Đặt $\varphi(x) = f(a_1 + x) + f(a_2 + x) + \cdots + f(a_n + x) - b$ thì φ là liên tục trên $[0, +\infty)$. Ta có $\varphi(0) = a - b < 0$. Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $x_o > 0$ sao cho $\varphi(x_o) > 0$.

Từ đó $\varphi(0) \cdot \varphi(x_o) < 0$. Vậy tồn tại $\varepsilon \in (0, x_o)$ sao cho $\varphi(\varepsilon) = 0$ hay $b = f(a_1 + \varepsilon) + f(a_2 + \varepsilon) + \cdots + f(a_n + \varepsilon)$.

Đặt $b_i = a_i + \varepsilon$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.32. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(f(x)) = -x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

Với mọi $x \leq 0$, gọi $y \in \mathbb{R}$ sao cho $x = -y^2$. Khi đó

$$f(x) = f(-y^2) = f(f(f(y))) = -[f(y)]^2 \leq 0.$$

Ta sẽ chứng minh thêm rằng $f(x) \leq 0$ với mọi $x > 0$. Thật vậy, từ giả thiết suy ra f đơn ánh trên $(0, +\infty)$, do đó đơn điệu trên khoảng này.

Giả sử tồn tại $x_o \in (0, +\infty)$ sao cho $f(x_o) > 0$. Gọi x_1, x_2 là 2 số thực thỏa mãn $0 < x_o < x_1 < x_2$.

Xét trường hợp f là đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$. Khi đó ta có

$$0 < f(x_o) \leq f(x_1) \leq f(x_2).$$

nên $-x_1^2 \leq -x_2^2$ hay $x_1 \geq x_2$. Điều này là mâu thuẫn.

Lý luận tương tự cho trường hợp f đơn điệu giảm ta cũng có điều mâu thuẫn.

Từ đó suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 1.33. Có tồn tại hay không hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn một trong hai điều kiện dưới đây

a) $f(x) \in \mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $f(x+1) \in \mathbb{I}$.

b) $f(x) \in \mathbb{I}$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ và $f(x) \in \mathbb{Q}$ với mọi $x \in \mathbb{I}$.

Hướng dẫn:

a) Giả sử tồn tại hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) \in \mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $f(x+1) \in \mathbb{I}$.

Xét hàm $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Khi đó $g(x) \in \mathbb{I}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với tính liên tục của hàm g ta suy ra $g(x)$ phải là hàm hằng tức là

$$f(x+1) - f(x) = g(x) = c \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, c phải là số vô tỷ và ta có $f(x+1) = c + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết, ta suy ra tồn tại x_o sao cho $f(x_o) \in \mathbb{Q}$. Lúc đó ta có $f(x_o+2) \in \mathbb{Q}$. Tuy nhiên, ta lại có $f(x_o+2) = 2c + f(x_o)$ nên $f(x_o+2) - f(x_o) = 2c$. Điều này mâu thuẫn vì $c \in \mathbb{I}$.

b) Tương tự câu a), bạn đọc tự giải.

Bài 1.34. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và nhận những giá trị trái dấu. Chứng minh rằng tồn tại 3 số a, b, c lập thành cấp số cộng sao cho $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Hướng dẫn:

Theo giả thiết, tồn tại x sao cho $f(x) > 0$. Vì hàm f liên tục nên trong một lân cận của x ta có $f(x) > 0$. Khi đó, ta tìm được một cấp số cộng a_o, b_o, c_o mà $f(a_o) + f(b_o) + f(c_o) > 0$.

Tương tự, ta cũng tìm được cấp số cộng a_1, b_1, c_1 mà $f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) < 0$.

Với $t \in [0, 1]$, xét cấp số cộng $a(t), b(t), c(t)$ cho bởi

$$a(t) = a_o(1-t) + a_1t.$$

$$b(t) = b_o(1 - t) + b_1t.$$

$$c(t) = c_o(1 - t) + c_1t.$$

Xét hàm số $F(t) = f(a(t)) + f(b(t)) + f(c(t))$ thì F liên tục trên $[0, 1]$. Dễ thấy rằng $F(0) > 0$ và $F(1) < 0$. Vì vậy, tồn tại $t_o \in [0, 1]$ sao cho $F(t_o) = 0$. Như vậy, ta có cấp số cộng phải tìm là $a(t_o), b(t_o), c(t_o)$.

Bài 1.35. Cho f là một hàm liên tục và tồn tại $T > 0$ sao cho

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0; \quad f(x) = f(x + T), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chúng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Giả sử tồn tại x_o sao cho $f(x_o) \neq 0$. Khi đó tồn tại $A > 0$ sao cho

$$|f(x)| < \frac{|f(x_o)|}{2} \quad \text{khi } |x| \geq A.$$

Ta có $x_n = x_o + nT > A$ khi n đủ lớn. Do vậy

$$|f(x_n)| = |f(x_o + nT)| = |f(x_o)| < \frac{|f(x_o)|}{2}$$

khi n đủ lớn. Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 1.36. Cho f và g là các hàm tuần hoàn với các chu kỳ tương ứng là $T_f, T_g > 0$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

a) Chứng minh rằng $T_f = T_g$.

b) Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải:

a) Từ giả thiết suy ra $f(x + T_f) - g(x + T_g) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$). Do đó $f(x) - g(x + T_f) \rightarrow 0$, ($x \rightarrow \infty$).

Vậy $g(x) - g(x + T_f) \rightarrow 0$, ($x \rightarrow \infty$).

Theo Bài tập 1.35. $g(x) = g(x + T_f)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $T_f \geq T_g$. Tương tự $T_g \geq T_f$. Như vậy $T_f = T_g$.

b) Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$.

Ta có

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0 \\ h(x + T_f) = h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Theo Bài tập 1.35., $h(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 1.37. Cho f là một hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} (K > 0).$$

a) Chứng minh rằng nếu $K < 1$ thì phương trình $f(x) = x$ luôn có duy nhất nghiệm.

b) Giả sử thêm rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + n) = 0$, hãy chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) Hãy chỉ ra một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + n) = 0$, nhưng $f(x) \not\rightarrow 0$, khi $x \rightarrow +\infty$.

Lời giải:

a) Lấy $x_o \in \mathbb{R}$. Đặt $x_1 = f(x_o)$; $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} |f(x_{n+1}) - f(x_n)| &\leq K|x_{n+1} - x_n| \\ &\leq K|f(x_n) - f(x_{n+1})| \leq K^2|x_n - x_{n+1}| \\ &\leq \dots \leq K^{n+1}|x_1 - x_o|. \end{aligned}$$

Do đó với mọi $n, p \in \mathbb{N}$ thì

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (K^{n+p} + \dots + K^{n+1})|x_o - x_1| \\ &\leq K^n(K + K^2 + \dots + K^p)|x_o - x_1| \\ &\leq K^n \frac{K}{1-K} |x_o - x_1| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Do vậy $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ nên hội tụ. Gọi $x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Do tính liên tục của f và cách xây dựng $(x_n)_n$ ta có $f(x_*) = x_*$.

Nếu tồn tại $x'_* \neq x_*$ sao cho $f(x'_*) = x'_*$,

thì $|x_* - x'_*| = |f(x_*) - f(x'_*)| \leq K|x_* - x'_*|$.

Vì $K < 1$ nên điều này vô lý. Vậy phương trình $f(x) = x$ có duy nhất nghiệm trên $\mathbb{R}$.

b) Với mỗi $\varepsilon > 0$, gọi $x_o = 0 < x_1 < \dots < x_m = 1$ với $|x_i - x_{i-1}| < \frac{\varepsilon}{2K}$, $i = \overline{1, m}$.

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_i + n) = 0$ nên tồn tại N sao cho $|f(x_i + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq N$, $\forall i = \overline{1, m}$.

Với mọi $x > N$, gọi n là số nguyên dương sao cho $n \leq x$, $x - n < 1$.

Khi đó $n \geq N$ và tồn tại x_i sao cho $|x - (x_i + n)| = |x_i - (x - n)| < \frac{\varepsilon}{2K}$.

Do đó $|f(x) - f(x_i + n)| \leq K|x - (x_i + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Vì vậy $|f(x)| < |f(x_i + n)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Bài 1.38. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[0, 1]$ thoả mãn

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 < f(x) < g(x).$$

Cho $(x_n)_n$ là một dãy bất kỳ của đoạn $[0, 1]$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt $y_n = \left[\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right]^n$.

Chứng minh rằng dãy $(y_n)_n$ hội tụ và tính $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Hướng dẫn:

Xét hàm h xác định trên $[0, 1]$ bởi $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Dễ thấy rằng h liên tục trên $[0, 1]$ và $h([0, 1]) \subset (0, 1)$.

Mặt khác, h liên tục nên $h([0, 1]) = [m, M]$ với $m, M \in (0, 1)$. Vì vậy

$$\forall x \in [0, 1], \quad m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M.$$

Đặc biệt, với $n \in \mathbb{N}$ ta có $m \leq \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \leq M$. Điều này kéo theo

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m^n \leq y_n \leq M^n.$$

Vì $m, M \in (0, 1)$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} m^n = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$, từ đó $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Chương II. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

Bài 2.1. Khảo sát tính khả vi của các hàm số sau:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$c) f(x) = [x] \sin^2 \pi x.$$

$$d) f(x) = \cos \sqrt{|x|}.$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{2}, & x = \frac{1}{n^2} \\ 1, & \text{với } x \text{ còn lại.} \end{cases}$$

Giải:

- a) Tại mỗi $x \neq 0$, hàm f không liên tục nên không khả vi
 - Tại $x_0 = 0$ ta có

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|, \quad \forall x \neq 0$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ do đó f có đạo hàm tại $x_0 = 0$ và $f'(0) = 0$.

b) Dễ chứng minh rằng f không liên tục tại mỗi $x \notin \{0, 1\}$ nên f không có đạo hàm tại các điểm đó.

- Tại $x = 0$, ta có

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{|x|} \right| \leq |x| + x^2, \quad \forall x \neq 0$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} (|x| + x^2) = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Do đó f có đạo hàm tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$.

- Tại $x = 1$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} &= \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, x \neq 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{I} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x + 1, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, x \neq 1 \\ x^2 + x + 1, & \text{nếu } x \in \mathbb{I} \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn dãy $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$, $x_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ $x_n \neq 1, \forall n$, ta có

$$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Chọn dãy $(x'_n)_n \subset \mathbb{I}$, $x_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) ta có

$$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} \rightarrow 3 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Vậy f không có đạo hàm tại $x = 1$.

c) Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Bài 2.2 Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + ax, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (0 < a < 1)$$

a) Chứng minh rằng f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng với mỗi $\alpha > 0$, hàm f' đổi dấu trên $(-\alpha, \alpha)$.

Từ đó suy ra rằng hàm f không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa 0.

Giải:

a) Dễ dàng chứng minh được f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ a, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Ta có $f'(\frac{1}{n\pi}) = (-1)^{n+1} + a$, $f'(\frac{1}{(n+1)\pi}) = (-1)^n + a$. Vì $a \in (0, 1)$ nên $f'(\frac{1}{n\pi})$ và $f'(\frac{1}{(n+1)\pi})$ luôn trái dấu nhau. Chọn n đủ lớn sao cho $(\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}) \subset (-\alpha, \alpha)$.

Ta có f' đổi dấu trên $(-\alpha, \alpha)$.

Vì f' đổi dấu trên mỗi khoảng mở chứa 0 nên f không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa 0.

Bài 2.3 (định lý Darboux) Cho f là một hàm khả vi trên $[a, b]$ và

$$f'(a) < 0 < f'(b).$$

a) Chứng minh rằng f đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm $x_o \in (a, b)$.

b) Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in (a, b)$ sao cho $f'(x_o) = 0$.

Giải:

a) đặt $M = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

Nếu $f(a) = M$ thì $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. điều này vô lý vì $f'(a) < 0$.

Nếu $f(b) = M$ thì $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$.

điều này vô lý vì $f'(b^-) > 0$.

Do f liên tục trên $[a, b]$ nên f phải đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm $x_o \in [a, b]$, $x_o \neq a$, $x_o \neq b$. Do đó tồn tại $x_o \in (a, b)$ sao cho

$$f(x_o) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

b) Suy ra trực tiếp từ câu a) và Bổ đề Fermat.

Bài 2.4. Cho f là một hàm số khả vi tại $x_o \in (a, b)$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x_o + \frac{1}{n}\right) - f(x_o) \right] &= f'(x_o) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + ch) - f(x_o)}{h} &= cf'(x_o) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + ch) - f(x_o + (c-1)h)}{h} &= f'(x_o)\end{aligned}$$

Bạn đọc tự giải.

Bài 2.5. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\alpha > 1, k \geq 0)$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

Giải:

$$\text{Với mỗi } h \neq 0 \text{ ta có } \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq k|h|^{\alpha-1}.$$

$$\text{Vì } \lim_{h \rightarrow 0} k|h|^{\alpha-1} = 0 \text{ nên } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $f(x) = \text{const}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 2.6. Cho $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi.

- Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$, thì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
- Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
- Chiều ngược lại trong câu a) có đúng không ?

Lời giải:

a) Trước hết ta chứng minh: nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = 0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad \text{với } \varphi \text{ khả vi trên } (0, +\infty).$$

Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $c > 0$ sao cho $|\varphi'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \geq c$.

Do đó với mỗi $x \geq c$ thì

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(c) + \varphi(c)}{x} = \frac{\varphi'(\xi)(x - c) + \varphi(c)}{x}$$

Vì vậy

$$\left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{c}{x}\right) + \frac{|\varphi(c)|}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\varphi(c)|}{x}$$

Chọn hằng số $c_1 > c$ sao cho $\left| \frac{\varphi(c)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ với mỗi $x > c_1$.

Khi đó với mỗi $x > c_1$ ta có $\left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| < \varepsilon$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$.

Bây giờ ta đặt $\varphi(x) = f(x) - ax$. Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a \right) = 0$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$.

b) Từ giả thiết ta chứng minh được $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Kết quả được suy ra từ qui tắc L'Hospital.

c) Xét hàm số $f(x) = x + \sin x$. Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ nhưng $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ không tồn tại.

Bài 2.7. Cho f là một hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ sao cho $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

a) Chứng minh rằng tồn tại các điểm $x_1, x_2, \dots, x_{2002}$, $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2002} < 1$ sao cho

$$\frac{1}{2002} [f'(x_1) + f'(x_2) + \dots + f'(x_{2002})] = 1.$$

b) Chứng minh rằng tồn tại $a, b \in (0, 1)$, $a \neq b$ sao cho

$$f'(a) \cdot f'(b) = 1$$

Lời giải:

a) Theo định lý Lagrange, với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, 2002\}$, tồn tại

$x_i \in \left(\frac{i-1}{2002}, \frac{i}{2002} \right)$ sao cho

$$f\left(\frac{i}{2002}\right) - f\left(\frac{i-1}{2002}\right) = f'(x_i) \cdot \frac{1}{2002}.$$

Do vậy

$$\frac{1}{2002} \sum_{i=1}^{2002} f'(x_i) = f(1) - f(0) = 1.$$

b) Bạn đọc tự giải.

Bài 2.8. Cho f, g là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$g'(x) = f(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c$ thì $f(c) = 0$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = f(c)$.

Nếu $f(c) > 0$ thì tồn tại $x_o > 0$ sao cho

$$g'(x) \geq \frac{f(c)}{2} > 0, \forall x > x_o.$$

Vì vậy

$$g(x) = \int_{x_o}^x g'(t) dt + g(x_o) \geq \frac{f(c)}{2}(x - x_o) + g(x_o)$$

điều này mâu thuẫn vì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(c)}{2}(x - x_o) + g(x_o) \right] = +\infty.$$

Tương tự nếu $f(c) < 0$ thì cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $f(c) = 0$.

Bài 2.9. Cho f là một hàm có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + \sin x) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có vô số nghiệm.

b) Hãy chỉ ra một hàm thỏa mãn điều kiện trên.

Giải:

đặt $g(x) = f(x) - f(x + \sin x)$.

Ta có

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g(k2\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vì vậy mỗi điểm $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là cực trị địa phương của hàm g . Theo bổ đề Fermat thì

$$g'(k2\pi) = 0$$

Ta có

$$\begin{aligned} g'(k2\pi) &= f'(k2\pi) - f'(k2\pi)(1 + \cos k2\pi) = 0 \\ &\iff f'(k2\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \cos x$.

Bài 2.10. Cho f và g là các hàm có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x_o) = g(x_o). \end{cases}$$

Chứng minh rằng $f'(x_o) = g'(x_o)$.

Giải:

đặt $h(x) = g(x) - f(x)$.

Để thấy h đạt cực trị tại x_o , do đó $h'(x_o) = 0$. Vì vậy

$$f'(x_o) = g'(x_o).$$

Bài 2.11. Cho f là một hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

Chứng minh rằng $f'(0)$ tồn tại.

Hướng dẫn:

Xét tỷ số

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad x \neq 0,$$

và dùng định lý Lagrange.

Bài 2.12. Cho f là một hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(0) = 0, \quad f(x) \geq |\sin x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng đạo hàm của hàm f tại 0 không tồn tại.

Giải:

Giả sử $f'(0)$ tồn tại. Với mỗi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ta có $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \frac{\sin x}{x}$

Vì vậy

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Tương tự ta chứng minh được $f'(0^-) \leq -1$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $f'(0)$ không tồn tại.

Bài 2.13. Cho $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$.

Giả sử rằng $f(x) \leq |\sin x|$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$$

Giải:

Ta có

$$|f'(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|} = 1$$

Mặt khác $|f'(0)| = |a_1 + 2a_2 + \dots + na_n|$

Do đó $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$.

Bài 2.14. Cho $\mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ là một hàm có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $k > 0$ thỏa mãn

$$f(a) = 0, \quad |f'(x)| \leq kf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hãy chứng minh rằng $f(x) = 0, \quad \forall x \in \left[a - \frac{1}{2k}, a + \frac{1}{2k}\right]$

Từ đó suy ra $f(x) = 0$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$.

Giải:

Đặt $M = \sup \{f(x) : a - \frac{1}{2k} \leq x \leq a + \frac{1}{2k}\} < +\infty$

Với mỗi $x \in [a - \frac{1}{2k}, a + \frac{1}{2k}]$ ta có $|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right|$

* Nếu $x \geq a$ thì

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)| dt \leq k \int_a^x f(t) dt \leq kM(x - a) \leq \frac{M}{2}.$$

Tương tự nếu $x \leq a$ ta cũng có $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$.

Vì vậy

$$f(x) = |f(x)| \leq \frac{M}{2}, \quad \forall x \in \left[a - \frac{1}{2k}, a + \frac{1}{2k}\right].$$

Do đó

$$0 \leq M = \sup \{f(x) : x \in \left[a - \frac{1}{2k}, a + \frac{1}{2k}\right]\} \leq \frac{M}{2}.$$

Vậy $M = 0$ và $f(x) = 0$ với mỗi $x \in \left[a - \frac{1}{2k}, a + \frac{1}{2k}\right]$.

Bài 2.15. Cho f là hàm liên tục trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in [a, +\infty) \quad \text{và} \quad \inf_{x \geq a} \frac{f'(x)}{f(x)} > 0.$$

Chúng minh rằng với mỗi $\delta > 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f((1+\delta)x)} = 0$

Giải:

Chọn a' sao cho $a' > \max \{1, a\}$. đặt $k = \inf_{x \geq a} \frac{f'(x)}{f(x)} > 0$. Ta có

$$f'(x) \geq kf(x) > 0, \forall x \geq a'.$$

Từ đó suy ra f đơn điệu tăng trên $[a', +\infty)$ và khi $x \geq a'$

$$f((1+\delta)x) - f(x) = \int_x^{(1+\delta)x} f'(t)dt \geq k \int_x^{(1+\delta)x} f(t)dt \geq k\delta x f(x).$$

Do đó

$$f((1+\delta)x) \geq f(x)(1+k\delta x), \forall x \geq a'.$$

$$\text{Suy ra } 0 < \frac{f(x)}{f((1+\delta)x)} \leq \frac{1}{1+k\delta x}, \forall x \geq a'.$$

$$\text{Từ đó ta có } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f((1+\delta)x)} = 0.$$

Bài 2.16. Cho f là một hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$, $f(1) = 0$. Chúng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f(c) + \frac{1}{2002}cf'(c) = 0.$$

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = x^{2002}f(x)$. áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.17. Cho $\alpha, \beta > 1$, f khả vi trên $[0, 1]$, $f(0) = 0$ và $f(x) > 0$ với mỗi $x \in (0, 1)$. Chúng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$\alpha \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta \cdot \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = (f(x))^\alpha \cdot (f(1-x))^\beta$.
áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.18. Cho f là một hàm khả vi trên $\mathbb{R}$, f' giảm ngặt.

a) Chúng minh rằng với mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1).$$

b) Chúng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ thì $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

c) Hãy tìm một ví dụ về hàm g khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = l$ nhưng $g'(x)$ không tiến về 0 khi $x \rightarrow +\infty$.

Giải:

a) Theo định lý Lagrange, với mỗi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại c_1, c_2 sao cho $x-1 < c_1 < x < c_2 < x+1$ và

$$f(x+1) - f(x) = f'(c_2)$$

$$f(x) - f(x-1) = f'(c_1).$$

Vì f' giảm ngặt nên $f'(c_2) < f'(x) < f'(c_1)$.

Do đó $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$.

b) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)] = 0.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

c) Xét hàm $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Để chứng minh φ khả vi trên $\mathbb{R}$ nhưng $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$ không tồn tại.

Bài 2.19. Cho f là một hàm xác định trên $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$. Hàm g xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{nếu } x > 0 \\ f'(0), & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng nếu f' đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$ và f khả vi liên tục trên $[0, +\infty)$ thì g liên tục và đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$.

b) Chứng minh rằng nếu f khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ thì g khả vi liên tục trên $[0, +\infty)$.

Giải:

a) * $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ khả vi trên $(0, +\infty)$ do đó g liên tục trên $(0, +\infty)$.

* $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = g(0)$.

Do vậy g liên tục trên $[0, +\infty)$.

Tại mỗi $x \in (0, +\infty)$,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x}.$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (0, x)$ sao cho

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c).$$

Do vậy

$$g'(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x} \geq 0.$$

Vậy g là hàm đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$ và do đó g đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$.

b) Bạn đọc tự giải.

Bài 2.20 Cho f là một hàm khả vi trên $[0, 1]$ sao cho

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Giải:

đặt

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{nếu } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Khi đó φ là một hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1]$ và

$$\varphi'(1) = f'(1) - f(1) = -f(1)$$

* Nếu $f \equiv 0$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.

* Xét $f \not\equiv 0$.

Th1: Có $x_o \in [0, 1]$ sao cho $f(x_o) > 0$. Gọi $c \in [0, 1]$ sao cho

$$\varphi(c) = \max_{x \in [0, 1]} \varphi(x) = \max_{x \in [0, 1]} \frac{f(x)}{x} > 0.$$

Ta có $c \neq 0$. Nếu $c = 1$ thì $\varphi(1) = f(1) > 0$ và $\varphi'(1) = -f(1) < 0$. Mặt khác

$$\varphi'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} \geq 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $c \neq 1$. Vậy $c \in (0, 1)$. Theo bổ đề Fermat, ta có $\varphi'(c) = 0$ nên $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Th2: Nếu có $x_o \in [0, 1]$ sao cho $f(x_o) < 0$, ta gọi $c \in [0, 1]$ sao cho

$$\varphi(c) = \inf_{x \in [0, 1]} \varphi(x).$$

Lập luận tương tự đưa đến $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Bài 2.21. Cho n là một số nguyên dương, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $(k = 1, 2, \dots, n)$. Chứng minh rằng phương trình

$$x + \sum_{k=1}^n (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$

có nghiệm trong $(-\pi, \pi)$.

Hướng dẫn:

Xét hàm

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{a_k}{k} \cos kx + \frac{b_k}{k} \sin kx \right), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Khi đó $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$. áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.22.

a) Cho $c_1, c_2, \dots, c_{2003}$ là các số thực thỏa mãn

$$c_1 - 3c_3 + 5c_5 - 7c_7 + \dots + 2001c_{2001} - 2003c_{2003} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình

$$c_1 \cos x + 2^2 c_2 \cos 2x + \dots + 2003^2 \cdot c_{2003} \cos 2003x = 0$$

có ít nhất 3 nghiệm trên $(-\pi, \pi)$.

b) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} = 0 \quad (n > 1).$$

Chúng minh rằng phương trình $a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} = 0$ có nghiệm trong $(0, 1)$.

c) Cho $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2k+1} = 0$.

Chúng minh rằng phương trình $\sum_{k=0}^n a_k \cos(2k+1)x = 0$ có nghiệm trong $(0, \frac{\pi}{2})$.

Hướng dẫn:

a) Xét hàm

$$\varphi(x) = c_1 \sin x + 2c_2 \sin 2x + \dots + 2003c_{2003} \sin 2003x.$$

Khi đó ta có: $\varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = \varphi(\pi) = \varphi(-\pi) = \varphi(-\frac{\pi}{2})$.

áp dụng định lý Rolle.

b) Xét hàm $\varphi(x) = a_1x + a_2\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^n}{n}$.

Ta có $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. áp dụng định lý Rolle.

c) Xét hàm

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k \sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Bài 2.22. Cho f là một hàm khả vi trên $\mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$ sao cho

$$c < d \text{ và } f(c) = f(d), \quad f'(c) > 0, f'(d) > 0.$$

Chúng minh rằng tồn tại $x_o \in (c, d)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x_o) = f(d) \\ f'(x_o) \leq 0. \end{cases}$$

Lời giải:

đặt $\varphi(x) = f(x) - f(d)$.

Ta có $\varphi(c) = \varphi(d) = 0$, $\varphi'(c) > 0$, $\varphi'(d) > 0$. Ta cần chứng minh tồn tại $x_o \in (c, d)$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$.

Vì $\varphi'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} > 0$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\varphi(x) > 0, \quad \forall x \in (c, c + \delta) \subset [c, d].$$

đặt $x_o = \sup \{ \alpha \in [c, d] : \varphi(x) > 0, \forall x \in (c, c + \alpha) \}$.

Ta dễ dàng chứng minh $\varphi(x_o) = 0$ và $x_o \in (c, d)$. Ta có

$$\begin{aligned} \varphi'(x_o) &= \varphi'(x_o^-) = \lim_{x \rightarrow x_o^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_o)}{x - x_o} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_o^-} \frac{\varphi(x)}{x - x_o} \leq 0. \end{aligned}$$

Bài 2.23. Cho f là một hàm có đạo hàm trên $[0, 1]$ và

$$f'(0) < 0, \quad f'(1) < 0, \quad f(0) = f(1) = 0.$$

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(0, 1)$.

b) Có thể khẳng định rằng tồn tại $x_1, x_2 \in (0, 1)$, $x_1 \neq x_2$ và

$$f'(x_1) = f'(x_2)?$$

Bạn đọc tự giải.

Bài 2.24. Cho f là hàm khả vi trên $[0, 1]$, $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với mỗi $K_1, K_2 > 0$, tồn tại $x_1, x_2 \in (0, 1)$, sao cho $x_1 \neq x_2$ và

$$\frac{K_1}{f'(x_1)} + \frac{K_2}{f'(x_2)} = K_1 + K_2.$$

Giải:

Xét hàm $\varphi(x) = f(x) - \frac{K_1}{K_1 + K_2}$.

Ta có $\varphi(0) = -\frac{K_1}{K_1 + K_2} < 0$, $\varphi(1) = \frac{K_2}{K_1 + K_2} > 0$.

Vì $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$, nên tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$\varphi(c) = 0 \iff f(c) = \frac{K_1}{K_1 + K_2}.$$

áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[0, c]$ ta có:

$$\exists x_1 \in (0, c) : f(c) - f(0) = f'(x_1)c.$$

Do đó $\frac{K_1}{K_1 + K_2} = f'(x_1)c$ hay $\frac{K_1}{f'(x_1)(K_1 + K_2)} = c$.

áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[c, 1]$ ta có:

$$\exists x_2 \in (c, 1) : f(1) - f(c) = f'(x_2)(1 - c).$$

Như vậy $\frac{K_2}{f'(x_2)(K_1 + K_2)} = 1 - c$.

Do đó

$$\frac{K_1}{f'(x_1)(K_1 + K_2)} + \frac{K_2}{f'(x_2)(K_1 + K_2)} = 1$$

$$\text{hay } \frac{K_1}{f'(x_1)} + \frac{K_2}{f'(x_2)} = 1.$$

Bài 2.25. Cho f là hàm liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) . Biết rằng $f(a) \leq f(b)$ và

$$f(x) + f'(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b).$$

Chứng minh rằng $f'(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b)$.

Giải:

Vì f là hàm liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho

$$f(x_o) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

+ Nếu $x_o \in (a, b)$ thì theo bổ đề Fermat $f'(x_o) = 0$. Do đó

$$f(x_o) = f(x_o) + f'(x_o) < \varepsilon.$$

Vì vậy $f(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b)$.

+ Giả sử $x_o = b$.

* Nếu có $x_1 \in (a, b)$ để $f(x_1) = f(b) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ thì $f'(x_1) = 0$ và ta cũng có

$$f(x) \leq f(x_1) \leq f(x_1) + f'(x_1) < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b).$$

* Nếu $f(x) < f(b)$ với mọi $x \in (a, b)$, thì ta cần chứng minh $f(b) \leq \varepsilon$. Giả sử ngược lại $f(b) > \varepsilon$. Ta tìm được $\delta > 0$ sao cho $f(x) > \varepsilon, \forall x \in [b - \delta, b]$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (b - \delta, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(b - \delta)}{\delta} \geq 0.$$

Do vậy $f(c) + f'(c) > 0$.

Mâu thuẫn trên chứng tỏ $f(x) \leq f(b) < \varepsilon, \forall x \in (a, b)$.

Bài 2.26. Cho f là một hàm khả vi trên $[-1, 1]$, $f(0) = 0$.

Tìm giới hạn của dãy $(u_n)_n$ với

$$u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Hướng dẫn: $(u_n)_n$ hội tụ về $\frac{1}{2}f'(0)$.

Bài 2.27. Cho f là hàm khả vi trên $[0, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

Chứng minh rằng với mỗi $d > 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x + d) - f(x)] = 0$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 2.28. Cho f là một hàm thỏa mãn

$$f'(x) < 0 < f''(x), \forall x < 0$$

$$f''(x) < 0 < f'(x), \forall x > 0.$$

Chứng minh rằng $f'(0)$ không tồn tại.

Hướng dẫn:

Giả sử rằng $f'(0)$ tồn tại, hãy chứng minh rằng lúc đó $f'(0) = 0$. Hãy chỉ ra mâu thuẫn bằng các giả thiết trên.

Bài 2.29. Cho f là hàm liên tục trên (a, b) . Giả sử rằng với mỗi $x \in (a, b)$, giới hạn

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} [f(x + h) - f(x - h)] = g(x)$$

tồn tại hữu hạn.

a) Chứng minh rằng nếu $g(x) \geq 0$ với mỗi $x \in (a, b)$ thì f là hàm đơn điệu tăng.

b) Chứng minh rằng nếu $g \equiv 0$ thì f là hàm hằng.

c) Chứng minh rằng nếu g liên tục trên (a, b) thì f khả vi liên tục trên (a, b) .

Giải:

a) Trước hết xét trường hợp $g(x) > 0$ với mỗi $x \in (a, b)$. Giả sử f không phải là hàm đơn điệu tăng trên (a, b) , ta tìm được $x_1, x_2 \in (a, b)$ sao cho $x_1 < x_2$ và $f(x_1) > f(x_2)$.

đặt $c = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ và $\varphi(x) = f(x) - c$.

Ta có $\varphi(x_1) = f(x_1) - c > 0, \varphi(x_2) = f(x_2) - c < 0$.

đặt $\bar{x} = \sup \{ \alpha \in (x_1, x_2) : \varphi(x) \geq 0 \forall x \in (x_1, \alpha) \}$.

Tìm được $(b_n)_n, b_n > 0, b_n \rightarrow 0$ và $\varphi(\bar{x} + b_n) < 0$.

Khi đó

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(\bar{x} + b_n) - f(\bar{x} - b_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\bar{x} + b_n) - \varphi(\bar{x} - b_n)] \leq 0. \end{aligned}$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ f đơn điệu tăng trên (a, b) .

* Trường hợp $g(x) \geq 0$ với mỗi $\varepsilon > 0$, xét $h(x) = f(x) + \varepsilon x$.

Theo chứng minh trên h là hàm đơn điệu tăng trên (a, b) , do vậy f cũng là hàm đơn điệu tăng trên (a, b) vì $\varepsilon > 0$ tùy ý.

b) Nếu $g \equiv 0$ thì f vừa đơn điệu tăng vừa đơn điệu giảm do đó f là hàm hằng.

c) Gọi G là một nguyên hàm của g . Khi đó

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x-h)}{2h} = g(x).$$

Do vậy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f-G)(x+h) - (f-G)(x-h)}{2h} = 0, \forall x \in (a, b).$$

Theo câu b) thì $f - G = \text{const.}$

Suy ra $f(x) = G(x) + c, \forall x \in (a, b)$.

Như vậy f là hàm có đạo hàm liên tục trên (a, b) .

Bài 2.30. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ sao cho

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Chứng minh rằng phương trình $f''(x) = 0$ có nghiệm.

Bài 2.31. Giả sử f và g là các hàm khả vi trên $[a, b]$, trong đó $g(x) \neq 0$ và $g'(x) \neq 0$ với mỗi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{1}{g(b) - g(a)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \frac{1}{g'(c)} \begin{vmatrix} f(c) & g(c) \\ f'(c) & g'(c) \end{vmatrix}.$$

Hướng dẫn:

$$\text{đặt } \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{g(x)}, x \in [a, b].$$

Hãy áp dụng định lý Cauchy.

Bài 2.32. Cho f và g là các hàm xác định trên (a, b) sao cho với mỗi $x \in (a, b)$, tồn tại $\delta_x > 0$ để

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hg(x), 0 < h < \delta_x.$$

Chứng minh rằng nếu f khả vi thì $f''(x) = 0, \forall x \in (a, b)$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 2.33. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn

$$f(0) = 0, f'(0) > 0 \text{ và } f''(x) \geq f(x), \forall x \geq 0.$$

Chúng minh rằng $f(x) > 0$ với mỗi $x > 0$.

Giải:

đặt $\varphi(x) = e^x(f'(x) - f(x))$. Ta có

$$\varphi'(x) = e^x(f''(x) - f(x)) \geq 0, \forall x \geq 0.$$

Do vậy φ là đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$. Mặt khác

$$\varphi(0) = f'(0) - f(0) > 0.$$

Suy ra $\varphi(x) > 0, \forall x \in [0, +\infty)$ nên $f'(x) > f(x), \forall x \in [0, +\infty)$.

Lặp lại lập luận tương tự với $\Psi(x) = e^{-x}f(x)$ ta suy ra

$$f(x) > 0, \forall x > 0.$$

Bài 2.34. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ sao cho $f > 0, f' \leq 0$ và f'' bị chặn trên $[0, +\infty)$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

Giải:

Từ giả thiết suy ra tồn tại giới hạn $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Không mất tính tổng quát giả sử $l = 0$ (nếu không ta đặt hàm

$\varphi(x) = f(x) - l$). Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $A > 0$ sao cho

$$|f(x)| < \varepsilon^2, \forall x > A.$$

đặt $M = \sup_{x \geq 0} |f''(x)|$.

Với mỗi $x > A$, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x + \varepsilon) - f(x) - f'(x)\varepsilon = \frac{1}{2}f''(x + \theta\varepsilon)\varepsilon^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \frac{|f(x + \varepsilon)| + |f(x)|}{\varepsilon} + \frac{1}{2}M\varepsilon \\ &\leq (2 + \frac{1}{2}M)\varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

Bài 2.35. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[a, b]$ sao cho $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f''(c) = f(c)$.

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = e^{-x}(f(x) + f'(x))$. áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.36. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[a, b]$ và trên đoạn này f có không ít hơn ba không điểm khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) + f''(c) = 2f'(c).$$

Hướng dẫn:

đặt $\varphi(x) = e^{-x}f(x)$.

áp dụng định lý Rolle ta tìm được $c_1, c_2 \in (a, b)$ sao cho $f'(c_1) = f'(c_2) = f(c_2)$, $c_1 \neq c_2$.

Lại đặt $\Psi(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$ rồi áp dụng định lý Rolle ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.37. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp n trên $[0, 1]$, $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ là các số khác nhau thuộc $[0, 1]$. Chứng minh

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_{n+1})} \right| \leq \frac{1}{n!} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(n)}(x)|$$

Giải: đặt

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (x_k - x_j)}.$$

Ta có $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \dots = \varphi(x_{n+1}) = 0$.

Do đó tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $\varphi^{(n)}(c) = 0$, tức là

$$f^{(n)}(c) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n! f(x_k)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_{n+1})} = 0.$$

Suy ra

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_{n+1})} \right| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [0,1]} |f^{(n)}(x)|.$$

Bài 2.38. Cho f là hàm khả vi cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - |x|) = 0; \quad f(0) \leq 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại x_o sao cho $f''(x_o) = 0$.

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Rõ ràng f' là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Th1: Nếu f' không phải là đơn ánh trên $\mathbb{R}$ nghĩa là tồn tại $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ và $f'(x_1) = f'(x_2)$, thì theo định lý Rolle, tồn tại x_o sao cho $f''(x_o) = 0$.

Th2: Nếu f' là đơn ánh khi đó f' là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Do đó tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$, và

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

Vậy f' là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ và $-1 < f'(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

đặt $\varphi(x) = x - f(x)$. Ta có $\varphi'(x) = 1 - f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(0) = -f(0) \geq 0$.
 Vậy $x - f(x) \not\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$.
 Như vậy trường hợp này không thể xảy ra.

Bài 2.39. Giả sử f là hàm khả vi liên tục đến cấp 3 trên $[0, +\infty)$, $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ với mỗi $x \in [0, +\infty)$. Chứng minh rằng nếu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x).f'''(x)}{(f''(x))^2} = c, \quad c < 2$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{1}{2-c}.$$

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

Trước hết chứng minh $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = 0$. Do vậy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f'(x))^2}{f''(x)} = +\infty.$$

Sau đó chứng minh $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

áp dụng qui tắc L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{(f'(x))^2}{f''(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{f'(x).f'''(x)}{(f''(x))^2}} = \frac{1}{2-c}. \end{aligned}$$

Bài 2.40. Cho f là hàm khả vi đến cấp hai trên (a, b) . Chứng minh rằng với mỗi $x \in (a, b)$ ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Giải:

Xét

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Ta có $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o_1(h^2)$

$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o_2(h^2)$.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} &= f''(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_1(h^2) + o_2(h^2)}{h^2} \\ &= f''(x) \end{aligned}$$

Bạn đọc tự kiểm chứng với $x = 0$ và

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

Ta có $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2} = 0$ nhưng $f''(0)$ không tồn tại.

Bài 2.41. Cho f là hàm xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm mỗi cấp và

$$\left| f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x) \right| < \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chúng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = ce^x$, $c = \text{const.}$

Hướng dẫn:

Dãy hàm $(f^{(n)}(x))_n$ hội tụ đều về hàm $g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy rằng $g'(x) = g(x)$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$ từ đó suy ra $g(x) = ce^x$, $c = \text{const.}$

Bài 2.42. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n với hệ số thực sao cho $P(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Giải:

Theo giả thiết $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, $a \neq 0$. Do đó

$$P'(x) = P(x) \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n} \right), \quad \forall x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Vì $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = 0$ nên tồn tại các số $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sao cho

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$$

$$P'(y_1) = P'(y_2) = \cdots = P'(y_{n-1}) = 0.$$

Ta lại có

$$P''(x) = P'(x) \cdot \left(\frac{1}{x - y_1} + \frac{1}{x - y_2} + \cdots + \frac{1}{x - y_{n-1}} \right), \quad \forall x \notin \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\},$$

và

$$0 = P'(y_k) = P(y_k) \cdot \left(\frac{1}{y_k - x_1} + \frac{1}{y_k - x_2} + \cdots + \frac{1}{y_k - x_n} \right), \quad \forall k = \overline{1, n-1}.$$

Vì $P(y_k) \neq 0$ nên ta có

$$\frac{1}{y_k - x_1} + \frac{1}{y_k - x_2} + \cdots + \frac{1}{y_k - x_n} = 0, \quad \forall k = \overline{1, n-1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_k - y_1} + \frac{1}{x_k - y_2} + \cdots + \frac{1}{x_k - y_{n-1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{y_k - x_j} \right) = 0. \end{aligned}$$

Bài 2.43. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ thỏa mãn $P(x) = 0$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh

$$P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải:

Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ($a_n \neq 0$).

Vì $P(x) \geq 0$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$ nên n chẵn và $a_n > 0$.

Xét hàm

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x).$$

Vì F cũng là đa thức bậc n với hệ số của x^n là a_n nên $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$.

Do đó tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ sao cho $F(x_o) = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x)$.

Theo bổ đề Fermat $F'(x_o) = F(x_o) - P(x_o) = 0$.

Như vậy $F(x_o) = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x) = P(x_o) \geq 0$,

Và $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 2.44. Cho f là một hàm liên tục trên $[a-h, a+h]$, khả vi trên $(a-h, a+h)$, $h > 0$. Chứng minh rằng tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(a+h) - f(a-h) = h(f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h)).$$

Giải:

Đặt $\varphi(x) = f(a+x) - f(a-x)$, $x \in [0, h]$. Ta có φ liên tục trên $[0, h]$ và khả vi trên $(0, h)$. Theo định lý Lagrange tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\theta h) \cdot h$$

$$\iff f'(a+h) - f'(a-h) = [f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h)]h$$

Bài 2.45. Tìm tất cả các hàm f khả vi liên tục đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $\theta \in (0, 1)$ để

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), \forall x, h \in \mathbb{R}.$$

Giải:

Với mỗi $x, h \in \mathbb{R}$ ta có $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h^2)$.

Vì vậy $h[f'(x+\theta h) - f'(x)] = o(h^2)$.

Suy ra $\frac{f'(x+\theta h) - f'(x)}{h} = \frac{o(h^2)}{h^2}, h \neq 0$.

Do đó bằng cách lấy giới hạn khi $h \rightarrow 0$ ta có $\theta f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $f(x) = Ax + B$.

Bài 2.46. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[-2, 2]$ sao cho

$$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-2, 2], (f(0))^2 + (f'(0))^2 = 4.$$

Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in (-2, 2)$ sao cho $f(x_o) + f''(x_o) = 0$.

Giải:

Đặt $F(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$.

Ta có $F'(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x)), F(0) = 4$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $\theta \in (-2, 0)$ sao cho

$$f(0) - f(-2) = f'(\theta)2.$$

Do đó $f'(\theta_1) \leq \frac{1}{2}(|f(0)| + |f(-2)|) \leq 1$

Tương tự tồn tại $\theta_2 \in (0, 2)$ sao cho $f'(\theta_2) \leq 1$. Suy ra

$$F(\theta_1) \leq 2 \text{ và } F(\theta_2) \leq 2.$$

Vì $F(0) = 4, F(\theta_1) \leq 2, F(\theta_2) \leq 2$, nên F phải đạt giá trị lớn nhất tại $x_o \in (\theta_1, \theta_2)$ và $F'(x_o) = 0$.

Nếu $f'(x_o) = 0$ thì $F(x_o) = (f(x_o))^2 \leq 1$, vô lý. Do vậy

$$f'(x_o) \neq 0 \text{ và } f(x_o) + f''(x_o) = 0.$$

Bài 2.47. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(c).$$

Giải:

Gọi A là hằng số sao cho: $\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}A.$

đặt $F(x) = \frac{f(a) + f(x)}{2} - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{(x-a)^2}{8}A.$

Ta có $F(a) = F(b) = 0$ do đó tồn tại $\theta \in (a, b)$ sao cho $F'(\theta) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[f'(\theta) - f'\left(\frac{a+\theta}{2}\right)\right] - \frac{\theta-a}{4}A = 0 \quad (*)$$

Lại áp dụng định lý Lagrange cho hàm f' trên $\left[\frac{a+\theta}{2}; \theta\right]$ ta tìm được $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(\theta) - f'\left(\frac{a+\theta}{2}\right) = f''(c) \cdot \frac{\theta-a}{2}.$$

Thay vào (*) ta có $f''(c) = A$.

Như vậy tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(c).$$

Bài 2.48. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{c}{3} = -\frac{2}{5}\left(\frac{a+b}{n+2}\right).$

Chứng minh rằng phương trình

$$a \sin^n x + b \cos^n x + c \sin x + c = 0$$

có nghiệm trong $(0, \frac{\pi}{2})$.

Hướng dẫn:

Xét hàm

$$\varphi(x) = \frac{a \sin^{n+2} x}{n+2} - b \frac{\cos^{n+2} x}{n+2} + \frac{c \sin^3 x}{3} + \frac{c \sin^2 x}{2}.$$

Chúng ta $\varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2})$ rồi áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.49. Cho phương trình $x^n = x + n$.

a) Chứng minh rằng với mỗi n , phương trình có duy nhất nghiệm $x_n > 0$.

b) Chứng minh dãy $(x_n)_n$ bị chặn và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{n}}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Giải:

Xét hàm $f_n(x) = x^n - x - n$. Ta có $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1$.

$$f'_n(x) \geq 0 \iff x \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Ta có bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f_n(x) = 0$ có duy nhất nghiệm x_n với

$$x_n > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

b) Vì $f_n(1) = -n < 0$ nên $x_n > 1$.

Vì $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ nên $x_n < 2$.

Vậy $(x_n)_n$ bị chặn. Ta có $x_n^n = x_n + n$ nên

$$\frac{x_n^n}{n} = \frac{x_n + n}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Do đó $\frac{x_n}{n^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Từ đó suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Bài 2.50. Cho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục sao cho $f(0) = f(1) = 0$, f khả vi đến cấp hai trên $(0, 1)$ và $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$.

Chứng minh rằng $f(x) \leq 0$ với mỗi $x \in [0, 1]$.

Giải:

Xét hàm $\varphi(x) = e^x \cdot f(x)$. Khi đó

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \\ \varphi''(x) \geq 0, \quad \forall x \in (0, 1). \end{cases}$$

Nếu tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $\varphi(x_0) > 0$ thì gọi $c \in (0, 1)$ thỏa mãn

$$\varphi(c) = \sup_{x \in [0, 1]} \varphi(x) > 0.$$

Ta có $\varphi'(c) = 0$. Vì φ' là đơn điệu tăng trên $(0, 1)$ nên

$$\begin{cases} \varphi'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (c, 1) \\ \varphi'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (0, c). \end{cases}$$

Do vậy $0 = \varphi(0) \geq \varphi(c) > 0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ

$$\varphi(x) \leq 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Suy ra $f(x) \leq 0, \quad \forall x \in [0, 1]$.

Bài 2.51. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f''(x) \geq f(x)$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f(a) = f(b) = 0$ thì

$$f(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Giải:

Giả sử tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) > 0$. Gọi $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) > 0.$$

Ta có $f'(c) = 0$. Khi đó $f''(c) \geq f(c) > 0$.

Gọi $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ sao cho $c \in (\alpha, \beta)$ và $f''(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

Khi đó f' là hàm đơn điệu tăng ngặt trên (α, β) . Do $f'(c) = 0$ nên

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (\alpha, c) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (c, \beta). \end{cases}$$

Vì vậy $f(\alpha) > f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$

Bài 2.52. Cho K là một hằng số, f là hàm khả vi trên $[0, +\infty)$ sao cho

$$f'(x) \leq kf(x), \forall x \geq 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) \leq e^{Kx} f(0), \forall x \geq 0$.

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = e^{-Kx} f(x)$.

Chương III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 3.1. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng nếu f là hàm chẵn thì F là hàm lẻ, nếu f là hàm lẻ thì F là hàm chẵn.

Giải:

Giả sử f là hàm chẵn

Bằng phép đổi biến $t = -u$,

ta có $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = \int_0^x f(-u)(-du) = -\int_0^x f(t)dt = -F(x)$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$.

Vì vậy F là hàm lẻ. Trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự.

Bài 3.2. Cho f là một hàm liên tục và nhận giá trị dương trên $[0, 1]$.

a) Chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)dx}{f(\sin x) + f(\cos x)} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Tính các tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + e^{\cos 2x}}; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}.$$

Giải:

a) Đặt

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx.$$

Bằng phép đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$ ta suy ra

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx.$$

Do đó $2I_1 = J_1 + I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Vì vậy $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

b) Ta có

$$\frac{1}{1 + e^{\cos 2x}} = \frac{1}{e^{\cos^2 x - \sin^2 x} + 1} = \frac{e^{\sin^2 x}}{e^{\sin^2 x} + e^{\cos^2 x}}.$$

Do đó $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

đây là trường hợp riêng của câu a) với $f(x) = e^{x^2}$.

Bài 3.3. Cho f là một hàm chẵn liên tục trên $[-a, a]$, $a > 0$; g là một hàm liên tục nhận giá trị dương trên $[-a, a]$ và

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)}, \quad \forall x \in [-a, a].$$

a) Chứng minh rằng

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)dx}{1+g(x)} = \int_0^a f(x)dx.$$

b) Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-x+\sqrt{x^2+1}} dx.$$

c) Tính

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}.$$

Giải:

a) Đặt $x = -t$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a \frac{f(x)dx}{1+g(x)} = \int_{-a}^a \frac{f(-t)dt}{1+g(-t)} \\ &= \int_{-a}^a \frac{f(t)dt}{1+\frac{1}{g(t)}} = \int_{-a}^a \frac{f(t)g(t)dt}{1+g(t)} = \int_{-a}^a \frac{f(x)g(x)dx}{1+g(x)}. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$I + I = 2I = \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Từ đó suy ra $I = \int_0^a f(x)dx$.

b) Áp dụng câu a) với $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$. Dễ thấy

$$g(-x) = \sqrt{x^2+1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{g(x)}, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Bài 3.4. Cho f là hàm liên tục trên $[-a, a]$. Chứng minh rằng

a) $\int_{-a}^a f(x^2)dx = 2 \int_0^a f(x^2)dx.$

b) $\int_{-a}^a x f(x^2)dx = 0.$

Hướng dẫn:

a) Đặt $g(x) = f(x^2)$. Dễ thấy g là hàm chẵn trên $[-a, a]$.

b) Đặt $h(x) = xf(x^2)$. Dễ thấy h là hàm lẻ trên $[-a, a]$.

Bài 3.5. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

$$b) \int_0^{n\pi} f(\cos^2 x) dx = n \int_0^{\pi} f(\cos^2 x) dx.$$

(Bạn đọc tự giải)

Bài 3.6. Cho f là một hàm liên tục nhận giá trị dương và tuần hoàn với chu kỳ bằng 1 trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải: Ta có

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx + \cdots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx.$$

Trong mỗi tích phân

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

thực hiện phép đổi biến $x = t + \frac{i}{n}$, ta có

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x + \frac{i}{n})}{f(x + \frac{i+1}{n})} dx.$$

Vì vậy

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x + \frac{1}{n})}{f(x + \frac{2}{n})} dx + \cdots + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x + \frac{n-1}{n})}{f(x)} dx.$$

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta nhận được

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx \geq n \int_0^{\frac{1}{n}} dx = 1.$$

Bài 3.7. Cho f là một hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, $f(a) = 0$ và

$$0 \leq f'(x) \leq 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Chứng minh rằng

$$a) \int_a^b f(x)dx \geq \frac{1}{2}[(f(b))^2 - (f(a))^2].$$

$$b) \int_a^b (f(x))^3 dx \leq \left(\int_a^b f(x)dx \right)^2.$$

Giải:

a) Ta có f là hàm đơn điệu tăng trên $[a, b]$ và $f(x) \geq f(a) = 0, \forall x \in [a, b]$. Do đó :

$$f(x) \geq f(x) \cdot f'(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Từ đây suy ra

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{1}{2}[f(x)]^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}[(f(b))^2 - (f(a))^2].$$

b) Xét hàm số

$$F(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)^2 - \int_a^x (f(t))^3 dt, \quad x \in [a, b].$$

Ta có

$$F'(x) = 2 \cdot \int_a^x f(t)dt \cdot f(x) - (f(x))^3 = f(x) \left[2 \int_a^x f(t)dt - (f(x))^2 \right].$$

Đặt $G(x) = 2 \int_a^x f(t)dt - (f(x))^2$. Ta có

$$G'(x) = 2f(x) - 2f(x) \cdot f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Do đó $G(x) \geq G(a) = 0, \forall x \in [a, b]$.

Từ đó suy ra $F'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Như vậy $F(b) \geq F(a) = 0$.

$$\text{Nghĩa là } \left(\int_a^b f(x)dx \right)^2 \geq \int_a^b (f(x))^3 dx.$$

Bài 3.8. Cho $f \in C_{[a,b]}$; $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b], k_1, k_2, \dots, k_n > 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho

$$k_1 \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + k_2 \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \dots + k_n \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = 0.$$

Giải: Xét hàm

$$\varphi(x) = k_1 \int_x^{x_1} f(t)dt + k_2 \int_x^{x_2} f(t)dt + \dots + k_n \int_x^{x_n} f(t)dt.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được

$$k_1 \varphi(x_1) + k_2 \varphi(x_2) + \dots + k_n \varphi(x_n) = 0.$$

Mặt khác φ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và $k_i > 0$ với mọi $i = \overline{1, n}$, do đó tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$, hay $k_1 \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx + k_2 \int_{x_o}^{x_2} f(x)dx + \dots + k_n \int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = 0$.

Bài 3.9. Chứng minh rằng với mọi a, b , $0 < a < b$ thì

a) $\left| \int_a^{a+1} \sin x^2 dx \right| \leq \frac{1}{a},$

b) $\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}.$

Giải:

a) Xét tích phân $I = \int_a^{a+1} \sin x^2 dx$. Bằng phép đổi biến $t = x^2$, ta có

$$I = \int_{a^2}^{(a+1)^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$$

Đặt $u = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, $du = -\frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ và chọn $v = -\cos t$. Ta có

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \frac{-\cos t}{2\sqrt{t}} \right|_{a^2}^{(a+1)^2} - \int_{a^2}^{(a+1)^2} \frac{\cos t dt}{4t\sqrt{t}} \\ &\leq \frac{1}{2(a+1)} + \frac{1}{2a} + \left| \int_{a^2}^{(a+1)^2} \frac{\cos t dt}{4t\sqrt{t}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2(a+1)} + \frac{1}{2a} + \int_{a^2}^{(a+1)^2} \frac{dt}{4t\sqrt{t}} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

b) Đặt $u = \frac{1}{x}$, $du = -\frac{1}{x^2} dx$ và chọn $v = -\cos x$. Ta có

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \frac{-\cos x}{x} \right|_a^b - \int_a^b \frac{\cos x dx}{x^2} \\ &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int_a^b \frac{|\cos x| dx}{x^2} \\ &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

Bài 3.10. Tìm tất cả các hàm f liên tục trên $[0, 1]$ sao cho

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt.$$

Hướng dẫn: Lấy đạo hàm hai vế.

Bài 3.11. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng

a) $\int_a^b xf(x) \cdot f'(x)dx = -\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

b) Giả sử $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1$. Hãy chứng minh

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [xf(x)]^2 dx \geq \frac{1}{4}.$$

Giải:

a) Đặt $u = x$, $dv = f(x) \cdot f'(x)dx$ và chọn $v = \frac{1}{2}(f(x))^2$. Ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(x) \cdot f'(x)dx &= \frac{1}{2}x[f(x)]^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [xf(x)]^2 dx &\geq \left(\int_a^b xf(x) \cdot f'(x)dx \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \int_a^b [f(x)]^2 dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Bài 3.12. Cho f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)dt, \dots, f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt.$$

Chứng minh rằng $f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f(t)dt$, $n \geq 1$.

(Bạn đọc tự giải).

Bài 3.13. Cho f là hàm liên tục trên $[0, \pi]$ sao cho

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trong $(0, \pi)$.

Giải:

Giả sử rằng f có không quá một nghiệm trên $(0, \pi)$.

Th1: f vô nghiệm trên $(0, \pi)$. Do tính liên tục của f ta suy ra f không đổi dấu trên $(0, \pi)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx > 0$, mâu thuẫn.

Th2: f có duy nhất nghiệm $x_o \in (0, \pi)$. Dễ thấy rằng hàm $g(x) = f(x) \sin(x - x_o)$ không đổi dấu trên $(0, \pi)$. Do đó

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin(x - x_o) dx > 0.$$

Mặt khác từ giả thiết đã cho ta có

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin(x - x_o) dx = \cos x_o \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx - \sin x_o \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$$

Mâu thuẫn trên chứng tỏ f có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên $(0, \pi)$.

Bài 3.14. Cho $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ là n đoạn rời nhau từng đôi một.

a) Giả sử $P(x)$ là một đa thức bậc nhỏ hơn n thỏa mãn

$$\int_{a_k}^{b_k} P(x) dx = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Chứng minh rằng $P(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một đa thức khác không bậc n thỏa mãn điều kiện trên.

Hướng dẫn:

- Dùng định lý giá trị trung bình của tích phân.
- Bạn đọc tự giải.

Bài 3.15. Cho f là hàm khả vi trên $[-1, 1]$ sao cho

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Giải:

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $x_1 \in [-1, 0]$,

$x_2 \in [0, 1]$ sao cho

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = f(x_1), \text{ và } \int_0^1 f(x)dx = f(x_2).$$

* Nếu $x_1 \neq 0$ hoặc $x_2 \neq 0$ thì $x_1 \neq x_2$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (x_1, x_2) \subset (-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

* Nếu $x_1 = x_2 = 0$, thì

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = f(0) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Nếu $f(x) \neq f(0)$, $\forall x \in (0, 1]$ thì $g(x) = f(x) - f(0) \neq 0$ với mọi $x \in (0, 1]$. Vì vậy $g(x)$ không đổi dấu trên $(0, 1]$ và

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx - f(0) \neq 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ tồn tại $x_1 \in (0, 1]$ sao cho

$$f(x_1) = f(0).$$

Lại áp dụng định lý Rolle ta có điều cần chứng minh.

Bài 3.16. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{1}{3}f(c).$$

Giải:

Do f là hàm liên tục trên $[0, 1]$ nên tồn tại $x_1, x_2 \in [0, 1]$

$$f(x_1) = \min_{x \in [0, 1]} f(x), \quad f(x_2) = \max_{x \in [0, 1]} f(x).$$

Do đó

$$x^2 f(x_1) \leq x^2 f(x) \leq x^2 f(x_2), \forall x \in [0, 1].$$

Suy ra

$$\frac{1}{3}f(x_1) \leq \int_0^1 x^2 f(x)dx \leq \frac{1}{3}f(x_2).$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) \leq 3 \int_0^1 x^2 f(x)dx \leq f(x_2).$$

Theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục, tồn tại $c \in [0, 1]$ để

$$f(c) = 3 \int_0^1 x^2 f(x)dx.$$

Bài 3.17. Cho $\alpha > 0$, f liên tục $[0, 1]$, $f(0) > 0$, và

$$\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x^\alpha$ có nghiệm trong $(0, 1)$.

Lời giải:

Xét hàm $\varphi(x) = f(x) - x^\alpha$, $x \in [0, 1]$. Ta có $\varphi(0) = f(0) > 0$. Mặt khác

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{\alpha + 1} < 0.$$

Vì vậy tồn tại $x_o \in [0, 1]$ sao cho $\int_0^1 \varphi(x)dx = \varphi(x_o) < 0$.

Do tính liên tục của φ và $\varphi(0) \cdot \varphi(x_o) < 0$ ta suy ra phương trình $\varphi(x) = 0$ có nghiệm trong $(0, 1)$.

Bài 3.18. Cho f là hàm liên tục trên $[0, n]$ và $\int_0^n f(x)dx = 0$, ($n \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, n - 1]$ sao cho

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^{c+1} f(x)dx.$$

Giải:

Xét hàm

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{x+1} f(t)dt = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

Rõ ràng φ liên tục trên $[0, n - 1]$ và

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n - 1) = 0.$$

Ta dễ dàng suy ra tồn tại $c \in [0, n - 1]$ để $\varphi(c) = 0$.

Bài 3.19. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 x^k f(x)dx = 0, \quad \forall k = 1, \cdots, n - 1, \quad \int_0^1 x^n f(x)dx = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0, 1]$ sao cho $|f(x_o)| \geq 2^n(n + 1)$.

Lời giải:

Giả sử rằng $|f(x)| < 2^n(n + 1)$, $\forall x \in [0, 1]$

Ta có

$$\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n dx = \frac{1}{2^n(n + 1)}.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x) dx &\leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n |f(x)| dx \\ &< \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n \cdot 2^n (n+1) dx = 1.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x) dx = \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

Mâu thuẫn trên chứng tỏ rằng tồn tại $x_o \in [0, 1]$ sao cho

$$|f(x_o)| \geq 2^n (n+1).$$

Bài 3.20. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$ thoả mãn

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Lời giải:

Giả sử tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $f(x_o) \neq 0$. Ta có $|f(x_o)| > 0$.

Do tính liên tục của f , tồn tại $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ và $\varepsilon > 0$ sao cho

$$|f(x)| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Khi đó:

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx \geq \varepsilon(b-a) > 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

Bài 3.21. Cho f là hàm khả tích trên $[a, b]$ và $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ sao cho $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

Lời giải:

Giả sử rằng với mọi đoạn $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, tồn tại $x_o \in [\alpha, \beta]$ sao cho $f(x_o) \leq 0$.

Đặt $I = \int_a^b f(x) dx > 0$. Xét phân hoạch $[a, b]$ bởi

$$x_o = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, i = \overline{0, n}.$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I > 0$ với $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Do vậy, tồn tại n_o sao cho với mọi $n \geq n_o$ thì

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho $f(\xi_i) \leq 0$ ta dẫn đến điều mâu thuẫn.

Bài 3.22. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

a) $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx.$

b) $\int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx \leq \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}.$

c) Nếu $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2.$

Giải:

a) Bạn đọc tự giải

b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx &= \int_0^1 \sqrt{x^n} \cdot \sqrt{x^n(1-x)} dx \\ &\leq \left(\int_0^1 x^n dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 x^n(1-x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\int_0^1 x^n dx - \int_0^1 x^{n+1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

Bài 3.23. Cho f liên tục trên $[0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ với mọi $x \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \left(\int_0^1 f(x^2)dx \right)^2.$$

Lời giải: Xét

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt - \left(\int_0^x f(t^2)dt \right)^2, \quad x \in [0, 1].$$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x^2) \cdot 2x - 2 \int_0^x f(t^2) dt \cdot f(x^2) \\ &= 2 \cdot f(x^2) \left[x - \int_0^x f(t^2) dt \right].\end{aligned}$$

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $\xi \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2f(x^2)[x - xf(\xi)] \\ &= 2xf(x^2)[1 - f(\xi)] \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Vậy φ là đơn điệu tăng trên $[0, 1]$. Do vậy $\varphi(1) \geq \varphi(0) = 0$.

Ta suy ra $\int_0^1 f(t) dt \geq \left(\int_0^1 f(t^2) dt \right)^2$.

Bài 3.24. Cho f là hàm liên tục không âm trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng $\sqrt{1 + \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2} \leq$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f(x))^2} dx \leq 1 + \int_0^1 f(x) dx.$$

Lời giải:

* Ta luôn có $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0, 1]$. Do đó

$$\sqrt{1 + (f(x))^2} \leq 1 + f(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Vì vậy

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f(x))^2} dx \leq 1 + \int_0^1 f(x) dx.$$

* Bất đẳng thức còn lại tương đương với

$$\begin{aligned}1 &\leq \left(\int_0^1 \sqrt{1 + (f(x))^2} dx \right)^2 - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \int_0^1 \left(\sqrt{1 + (f(x))^2} + f(x) \right) dx \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{1 + (f(x))^2} - f(x) \right) dx \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \int_0^1 \left(\sqrt{1 + (f(x))^2} + f(x) \right) dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + (f(x))^2} + f(x)}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn luôn thoả mãn theo Bài 3.23.

Bài 3.25. Cho f là một hàm liên tục trên $[0, b]$, và $0 < a < b$, f nghịch biến trên $[0, b]$. Chứng minh rằng

$$b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^b f(x) dx.$$

Lời giải:

$$b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^a f(x) dx + a \int_a^b f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow (b-a) \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^a f(x) dx.$$

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $\xi_1, \xi_2 : 0 \leq \xi_1 \leq a \leq \xi_2 \leq b$ và

$$(b-a) \int_0^a f(x) dx = a(b-a)f(\xi_1)$$

$$a \int_a^b f(x) dx = a(b-a)f(\xi_2).$$

Vì $f(\xi_1) \geq f(\xi_2)$ nên

$$(b-a) \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$$

Bài 3.26. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{c-a} \int_a^c f(x) dx \leq \max \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \frac{1}{c-b} \int_b^c f(x) dx \right\},$$

với f liên tục trên $[a, b]$.

Lời giải:

Giả sử

$$\begin{cases} \frac{1}{c-a} \int_a^c f(x) dx > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ \frac{1}{c-a} \int_a^c f(x) dx > \frac{1}{c-b} \int_b^c f(x) dx \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \frac{1}{c-a} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{c-a} \int_b^c f(x) dx > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ \frac{1}{c-a} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{c-a} \int_b^c f(x) dx > \frac{1}{c-b} \int_b^c f(x) dx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{c-a} \int_b^c f(x)dx > \frac{c-b}{(b-a)(c-a)} \int_a^b f(x)dx \\ \frac{1}{c-a} \int_a^b f(x)dx > \frac{b-a}{(c-b)(c-a)} \int_b^c f(x)dx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_b^c f(x)dx > \frac{c-b}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx > \frac{b-a}{c-b} \int_b^c f(x)dx \end{cases}.$$

Suy ra $\int_b^c f(x)dx > \frac{c-b}{b-a} \frac{b-a}{c-b} \int_b^c f(x)dx$, vô lý.

Bài 3.27. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, $f(a) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x) \cdot f'(x)| dx \leq \frac{(b-a)}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Lời giải:

Với mọi $x \in [a, b]$, ta có $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$.

Do đó $|f(x) \cdot f'(x)| \leq \int_a^x |f'(t)|dt \cdot |f'(x)|$.

Suy ra

$$\int_a^b |f(x) \cdot f'(x)| dx \leq \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)|dt \right) |f'(x)| dx.$$

Ta có: $\left(\int_a^x |f'(t)|dt \right)' = |f'(x)|$. Do vậy

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)|dt \right) \cdot |f'(x)| dx &= \frac{1}{2} \left(\int_a^x |f'(t)|dt \right)^2 \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^b |f'(x)|dx \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} (b-a) \cdot \int_a^b |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 3.28. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, $f(a) = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Giải: Ta có

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(a)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f'(t)| dt \leq \int_a^b |f'(t)| dt. \end{aligned}$$

Do đó

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Bài 3.29. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b (f(x) - f(a))^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} (f(x) - f(a))^2 &= \left(\int_a^x f'(t) dt \right)^2 \leq \int_a^x (f'(t))^2 dt \cdot \int_a^x 1^2 dt \\ &\leq (x-a) \int_a^x (f'(t))^2 dt \\ &\leq (x-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) - f(a))^2 dx &\leq \int_a^b (x-a) dx \cdot \int_a^b (f'(x))^2 dx \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Bài 3.30. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0, 1]$, $f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Bài 3.31. Cho f liên tục trên $[a, b]$ và $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ với mọi hàm g khả vi liên tục trên $[a, b]$ thoả mãn $g(a) = g(b) = 0$.

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Lời giải:

Giả sử rằng tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $f(x_o) > 0$.

Khi đó tồn tại $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ và $\varepsilon > 0$ sao cho $f(x) > \varepsilon > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Đặt

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in [a, \alpha] \\ (x - \alpha)^2(x - \beta)^2, & x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & x \in [\beta, b]. \end{cases}$$

Khi đó g khả vi liên tục trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 dx > 0.$$

(qui ước $[a, \alpha] = \{a\}$ nếu $\alpha = a$, $[\beta, b] = \{b\}$ nếu $\beta = b$.)

Bài 3.32. Cho f, g là các hàm liên tục đơn điệu cùng loại trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x)g(a+b-x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Hướng dẫn:

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $x_o \in [a, b]$:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(a+b-x)dx = g(a+b-x_o).$$

Sử dụng

$(f(x) - f(x_o))(g(a+b-x) - g(a+b-x_o)) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ để suy ra phần đầu của bất đẳng thức.

Bài 3.33. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, 2]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^2 (f''(x))^2 dx \geq \frac{3}{2} (f(0) - 2f(1) + f(2))^2.$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f''(x))^2 dx &= 3 \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 3 \left(\int_0^1 x^2 f''(x) dx \right)^2 \\ &= 3 (f'(1) + f(0) - f(1))^2. \end{aligned}$$

$$\int_1^2 (f''(x))^2 dx = 3 \int_1^2 (x-2)^2 dx \cdot \int_1^2 (f''(x))^2 dx \geq 3 \left(\int_1^2 (x-2) f''(x) dx \right)^2$$

$$= 3(-f'(1) + f(2) - f(1))^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_0^2 (f''(x))^2 dx &\geq 3 \left[(f'(1) + f(0) - f(1))^2 + (-f'(1) + f(2) - f(1))^2 \right] \\ &\geq \frac{3}{2} (f(0) - 2f(1) + f(2))^2. \end{aligned}$$

Bài 3.34. Cho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ là các hàm liên tục, f đơn điệu giảm.

Đặt $a = \int_0^1 g(x) dx$.

Chúng minh rằng $\int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$.

Lời giải:

Đặt $\varphi(x) = \int_0^x g(t) dt$ và $F(x) = \int_0^x f(t)g(t) dt - \int_0^{\varphi(x)} f(t) dt$.

Lúc đó

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x)g(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) \\ &= f(x)\cdot g(x) - f(\varphi(x))\cdot g(x) \\ &= [f(x) - f(\varphi(x))]g(x), \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ta có

$$\varphi(x) = \int_0^x g(t) dt = g(\xi)x \leq x, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Do đó $g(\varphi(x)) \geq g(x)$, $\forall x \in [0, 1]$.

Từ đó suy ra $F'(x) \leq 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Vì vậy $F(1) \leq F(0) = 0$ hay

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx.$$

Bài 3.35. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$, f đơn điệu tăng và $0 \leq g(x) \leq 1$ với

mọi $x \in [a, b]$. Đặt $h(x) = \int_a^x g(t) dt$.

a) Hãy so sánh

$$F(x) = \int_a^x f(t)g(t) dt \quad \text{và} \quad G(x) = \int_a^{a+h(x)} f(t) dt.$$

b) Chúng minh với $l = \int_a^b g(x) dx$, ta có

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \geq \int_a^{a+l} f(x) dx.$$

Hướng dẫn: Tương tự Bài tập 3.34.

Bài 3.36. Cho $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$ f là hàm liên tục trên $[0, +\infty]$, $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0, +\infty)$ và

$$f(x) \leq a + b \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \geq 0.$$

Chúng minh rằng $f(x) \leq ae^{bx}$, $\forall x \geq 0$. **Lời giải:**

+ Th1: $b = 0$. Ta dễ dàng suy ra kết quả.

+ Th 2: $b > 0$. Xét $h(x) = e^{-bx} \left(\int_0^x f(t)dt + \frac{a}{b} \right)$. Ta có

$$h'(x) = e^{-bx} \left(f(x) - a - b \int_0^x f(t)dt \right) \leq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Do đó h là hàm giảm trên $[0, +\infty)$ và $h(x) \leq h(0)$, $\forall x \in [0, +\infty)$.

Suy ra: $e^{-bx} \left(\int_0^x f(t)dt + \frac{a}{b} \right) \leq \frac{a}{b}$, $\forall x \geq 0$, hay

$$a + b \int_0^x f(t)dt \leq ae^{bx} \quad \forall x \geq 0.$$

Vì vậy $f(x) \leq ae^{bx}$, $\forall x \geq 0$.

Bài 3.37. Cho f là một hàm liên tục trên $[a, b]$ và

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Chúng minh rằng f không đổi dấu trên $[a, b]$. **Lời giải:**

Từ giả thiết suy ra

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx \text{ hay } \int_a^b f(x)dx = - \int_a^b |f(x)|dx.$$

Th1: Giả sử $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$. Khi đó

$$\int_a^b (|f(x)| - f(x))dx = 0$$

Đặt $\varphi(x) = |f(x)| - f(x)$. Ta có φ liên tục trên $[a, b]$, $\varphi(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, và $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$.

Do vậy: $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$ hay $|f(x)| = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Vậy $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Th2: Giả sử $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$. Hoàn toàn tương tự ta suy ra

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b].$$

Bài 3.38. Cho f là một hàm liên tục đơn điệu tăng trên $[a, b]$. Đặt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Chúng minh rằng

$$(*) F(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(y), \forall x, y \in [a, b], \alpha \in (0, 1).$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y$. Khi đó

$$x \leq \alpha x + (1 - \alpha)y \leq y.$$

(*) được viết lại như sau

$$\int_a^{\alpha x + (1 - \alpha)y} f(t)dt \leq \alpha \int_a^x f(t)dt + (1 - \alpha) \int_a^y f(t)dt.$$

$$\iff (**) \quad \alpha \int_a^{\alpha x + (1 - \alpha)y} f(t)dt \leq (1 - \alpha) \int_{\alpha x + (1 - \alpha)y}^y f(t)dt.$$

Kết quả trên có được bằng cách thay $\int_a^y f(t)dt$ bởi

$$\int_a^x f(t)dt + \int_x^{\alpha x + (1 - \alpha)y} f(t)dt + \int_{\alpha x + (1 - \alpha)y}^y f(t)dt.$$

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại ξ_1, ξ_2 sao cho

$$x \leq \xi_1 \leq \alpha x + (1 - \alpha)y \leq \xi_2 \leq y$$

và

$$VT(**) = \alpha \cdot f(\xi_1) \cdot (1 - \alpha)(y - x)$$

$$VP(**) = \alpha(1 - \alpha)f(\xi_2)(y - x).$$

Vì $f(\xi_1) \leq f(\xi_2)$ nên (**) luôn thoả mãn.

Bài 3.39. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0, 1]$ sao cho

$$f(0) = f(1) = 0, \int_0^1 |f'(x)|dx = 1.$$

Chúng minh rằng $|f(x)| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [0, 1]$.

Hướng dẫn: Sử dụng

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)|dt$$

$$|f(x)| = \left| \int_x^1 f(t)dt \right| \leq \int_x^1 |f'(t)|dt.$$

Bài 3.40. Cho f khả vi liên tục trên $[a, b]$, và $f(a) = f(b) = 0$, $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$.
Chứng minh rằng

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M \cdot \frac{(b-a)^2}{4}.$$

(Bạn đọc tự giải)

Bài 3.41. Cho f là hàm khả tích trên $[a, b]$ sao cho $f(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Chứng minh rằng $\int_a^b f(x)dx > 0$.

(Bạn đọc tự giải).

Bài 3.42. Cho $a \in [0, 1]$. Tìm tất cả các hàm không âm, liên tục trên $[0, 1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a, \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz:

$a = \int_0^1 xf(x)dx \leq \sqrt{\int_0^1 x^2 f(x)dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 f(x)dx} = a$, và điều kiện để dấu "=" xảy ra để kết luận không có hàm f nào thoả mãn.

Bài 3.43. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$\frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)dt = f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

Chứng minh rằng $f(x) = Ax + B$, với $A, B = \text{const.}$

Hướng dẫn: Chứng minh

$$f(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}, h \neq 0.$$

Từ đó suy ra f có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bằng cách lấy đạo hàm hai vế biểu thức $2hf(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ theo h ta nhận được điều cần chứng minh.

Bài 3.44. Tìm tất cả các hàm liên tục trên $[0, 1]$ thoả mãn

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 (f(x))^3 dx = \int_0^1 (f(x))^4 dx.$$

Hướng dẫn: Sử dụng $\int_0^1 [f(x) - (f(x))^2]^2 dx = 0$.

Bài 3.45. Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n$, trong đó:

a) $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

b) $u_n = \int_0^1 x^n \arctg(nx) dx$.

c) $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$.

d) $u_n = n \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx$.

e) $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \arctg(nx) dx$.

f) $u_n = n \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

g) $u_n = \int_0^1 x^n tg x dx$.

h) $u_n = n \int_0^1 x^n tg x dx$.

(Bạn đọc tự giải)

Bài 3.46. Cho f là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$. Đặt

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

a) Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$.

b) Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

c) Hãy tìm một ví dụ để chỉ ra chiều ngược lại ở câu a) không còn đúng.

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned} |F(x) - l| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - l \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - l) dt \right| \\ &\leq \frac{\int_0^x |f(t) - l| dt}{x}, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

Hàm số $G(x) = \int_0^x |f(t) - l| dt$ là hàm đơn điệu tăng, không âm trên $(0, +\infty)$.

Nếu $G(x)$ bị chặn trên bởi M , ta có

$$|f(x) - l| \leq \frac{M}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Từ đó suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$.

Nếu $G(x)$ không bị chặn trên $[0, +\infty)$ khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.

Theo qui tắc L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} G'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - l| = 0.$$

Do vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

b) Hướng dẫn: áp dụng qui tắc L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

(Đề ý rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt = +\infty$.)

c) Xét $f(x) = \sin x$.

Bài 3.47. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^a f(nx)dx = al$.

Lời giải:

Dùng phép đổi biến $t = nx$ ta có

$$\int_0^a f(nx)dx = \frac{1}{n} \int_0^{na} f(t)dt = a \frac{1}{an} \int_0^{na} f(t)dt.$$

Theo Bài tập 3.46. thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{na} \int_0^{na} f(t)dt = l.$$

Do vậy $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^a f(nx)dx = al$.

Bài 3.48. Cho f là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$, và $f(0) + f(1) + \dots + f(n) \neq 0$ với mọi n . Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\int_0^n f(x)dx}{f(0) + f(1) + \dots + f(n)} \right] = 1.$$

Lời giải: Ta có

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\int_0^n f(x)dx}{f(0) + f(1) + \dots + f(n)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \int_0^n f(x)dx}{\frac{f(0) + f(1) + \dots + f(n)}{n}}.$$

Theo Bài tập 3.46, thì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x)dx = l$.

Mặt khác vì $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, nên

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(1) + \dots + f(n)}{n} = l.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\int_0^n f(x) dx}{f(0) + f(1) + \dots + f(n)} \right] = 1.$$

Bài 3.49. Cho f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ tuần hoàn với chu kỳ T , g là một hàm liên tục trên $[0, T]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^T f(nx)g(x)dx = 0.$$

Bạn đọc tự giải.

Bài 3.50. Cho f và g là các hàm liên tục tuần hoàn với chu kỳ bằng 1 trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx)g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx.$$

Bài 3.51. a) Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

b) Giả sử $f'(1)$ tồn tại và $f(1) = 0$. Hãy chứng minh

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x)dx = -f'(1).$$

Lời giải:

a) Trước hết ta chứng minh $\lim_{x \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1))dx = 0$.

Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta \in (0, 1)$ sao cho

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (1 - \delta, 1).$$

Đặt $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Ta có

$$\begin{aligned} \left| n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1))dx \right| &\leq n \int_0^{1-\delta} 2Mx^n dx + n \int_{1-\delta}^1 x^n \varepsilon dx \\ &\leq \frac{n}{n+1} (2M(1-\delta)^{n+1} + \varepsilon). \end{aligned}$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1))dx \right| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.

Từ đó suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1))dx = 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[n \int_0^1 x^n f(x) dx - \frac{n}{n+1} f(1) \right] = 0.$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$

b) Bạn đọc tự giải.

Bài 3.52. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[-a, a]$, $a > 0$. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{1 - \cos nx}{x} f(x) dx.$$

Bạn đọc tự giải.

Bài 3.53. Cho $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ là hàm liên tục thoả mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x (f(t))^2 dt = 1.$$

Chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)(3x)^{\frac{1}{3}} = 1.$

Bạn đọc tự giải.

UBND Tỉnh Quảng Bình
Trường Đại học Quảng Bình

MỘT SỐ BÀI TOÁN DÃY SỐ, LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN

Biên soạn: Th.s Phan Trọng Tiến

Một số kiến thức nhắc lại:

Dãy số là một ánh xạ từ tập các số tự nhiên (hoặc các số nguyên không âm) vào tập các số thực

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Đặt $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, và dùng ký hiệu $\{a_n\}$ để chỉ dãy số.

Dãy số $\{a_n\}$ được gọi là:

- dương (âm) nếu $a_n > 0$ ($a_n < 0$) với mọi n ;
- không âm (không dương) nếu $a_n \geq 0$ ($a_n \leq 0$) với mọi n ;
- đơn điệu tăng (giảm) nếu $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$) với mọi n ;
- tăng (giảm) ngặt nếu $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$) với mọi n ;
- hội tụ tới $a \in \mathbb{R}$ (hoặc có giới hạn hữu hạn là a), nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước bé tùy ý, tồn tại $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Trong trường hợp như thế, ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ, và gọi a là giới hạn của dãy $\{a_n\}$ và viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

- phân kỳ ra $+\infty$, nếu với mọi số $A > 0$ cho trước lớn tùy ý, tồn tại $n(A) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a_n > A, \forall n \geq n(A).$$

Trong trường hợp như thế, ta viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

- phân kỳ ra $-\infty$, nếu với mọi số $A > 0$ cho trước lớn tùy ý, tồn tại $n(A) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a_n < -A, \forall n \geq n(A).$$

Trong trường hợp như thế, ta viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

- dãy Cauchy (hoặc dãy cơ bản), nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước bé tùy ý, tồn tại $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq n(\varepsilon).$$

Định lý hội tụ đơn điệu nói rằng dãy số đơn điệu (tăng hoặc giảm) và bị chặn có giới hạn hữu hạn.

Cụ thể: Dãy $\{a_n\}$ tăng và bị chặn trên thì hội tụ về $\sup\{a_1, a_2, \dots\}$; dãy $\{a_n\}$ giảm và bị chặn dưới thì hội tụ về $\inf\{a_1, a_2, \dots\}$

Tiêu chuẩn Cauchy nói rằng dãy số hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy (dãy cơ bản).

Các tính chất cơ bản của giới hạn là

- Một dãy hội tụ thì bị chặn.
- Bảo toàn các phép tính số học, tức là, nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha a \pm \beta b, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b \quad (b \neq 0)$$

- Bảo toàn thứ tự theo nghĩa sau: nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$a_n \geq b_n$; với $n \geq n_0$ nào đó, thì $a \geq b$.

- Định lý kẹp: Cho ba dãy số thực $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$. Nếu $a_n \leq c_n \leq b_n$, với $n \geq n_0$ nào đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

thì $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

1. Giả sử $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ là những số dương cố định. Xét các dãy sau:

$$s_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}{p} \quad \text{và} \quad x_n = \sqrt[n]{s_n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. HD. Trước tiên xét tính đơn điệu của dãy $\left\{ \frac{s_n}{s_{n-1}} \right\} n \geq 2$.

2. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$, với $a_n = \frac{n}{2^n}, n > 1$, là dãy giảm ngặt và tìm giới hạn của dãy.

3. Cho $\{a_n\}$ là dãy bị chặn thỏa mãn điều kiện $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ hội tụ. HD. Xét dãy $\left\{ a_n - \frac{1}{2^{n-1}} \right\}$.

4. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = \frac{3}{2}, a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}, \quad \text{với } n \geq 2$$

hội tụ và tìm giới hạn của nó.

5. Cho $c > 2$, xét dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = c^2, a_{n+1} = (a_n - c)^2, n \geq 1.$$

Chứng minh dãy $\{a_n\}$ tăng ngặt. HD cm $a_n > 2c$

6. Giả sử dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện $0 < a_n < 1, a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ với $n \in \mathbb{N}$. Thiết lập sự hội tụ của dãy và tìm giới hạn của nó.

7. Thiết lập sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy được xác định theo biểu thức

$$a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \text{ với } n \geq 1.$$

8. Khảo sát tính đơn điệu của dãy và xác định giới hạn của nó.

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, n \geq 1,$$

9. Hãy xác định tính hội tụ hay phân kỳ của dãy $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, n \geq 1$.

10. Chứng minh sự hội tụ của các dãy sau

$$\begin{aligned} a) \quad a_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}^* \\ b) \quad a_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}; n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

11. Cho $p \in \mathbb{N}^*, a > 0$ và $a_1 > 0$, định nghĩa dãy $\{a_n\}$ bởi

$$a_{n+1} = \frac{1}{p} \left((p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}} \right), n \in \mathbb{N}.$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. HD cm $a_{n+1} > \sqrt[p]{a}$, lập hiệu $a_{n+1} - a_n$ để chứng minh $\{a_n\}$ tăng.

12. Dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}, \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

Thiết lập sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy $\{a_n\}$.

13. Tìm các hằng số $c > 0$ sao cho dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa bởi công thức truy hồi

$$a_1 = \frac{c}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2}(c + a_n^2), n \in \mathbb{N}$$

là hội tụ. Trong trường hợp hội tụ hãy tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. HD cm bằng quy nạp dãy $\{a_n\}$ tăng ngặt

14. Cho $a > 0$ cố định, xét dãy $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$a_1 > 0, a_{n+1} = a_n \frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a}, n \in \mathbb{N}.$$

Tìm tất cả các số a_1 sao cho dãy trên hội tụ và trong những trường hợp đó hãy tìm giới hạn của dãy. HD $a_{n+1} = a_n \left(1 - 2 \frac{a_n^2 - a}{3a_n^2 + a} \right), n \geq 1; a_n \frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a} > \sqrt{a} \Leftrightarrow (a_n - \sqrt{a})^3 > 0$.

15. Cho a là một số cố định bất kỳ và ta định nghĩa $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1} = a_n^2 + (1 - 2a)a_n + a^2, n \in \mathbb{N}.$$

Xác định a_1 sao cho dãy trên hội tụ và trong trường hợp như thế tìm giới hạn của nó.

16. Cho $c > 0$ và $b > a > 0$, ta định nghĩa dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 = c, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + ab}{a + b}$$

với $n \in \mathbb{N}$. Với những giá trị của a, b và c dãy trên sẽ hội tụ? Trong các trường hợp đó hãy xác định giới hạn của dãy.

17. Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \right).$$

18. Cho $a_1, a_2, \dots, a_p$ là các số dương, hãy tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}{p}} \right).$$

19. Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2 \sin^2 \frac{n^{2009}}{n+1} + \cos^2 \frac{n^{2009}}{n+1}} \right).$$

UBND Tỉnh Quảng Bình
Trường Đại học Quảng Bình

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠO HÀM, LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN

Biên soạn: Th.s Phan Trọng Tiến

Một số kiến thức nhắc lại:

Cho hàm f xác định trên $[a, b]$ và $x_0 \in (a, b)$. Ta nói hàm f đạt cực đại địa phương tại x_0 nếu tồn tại một lân cận $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ của x_0 sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ mọi $x \in U$.

Định lý Fermat: Hàm số f xác định trên (a, b) . Nếu f đạt cực trị địa phương tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý Lagrange: Cho f liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b) . Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Định lý Cauchy: f, g là hai hàm liên tục $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b) . Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

20. Chứng minh rằng nếu $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$.

21. Chứng minh rằng nếu f liên tục trong khoảng đóng $[a; b]$, khả vi trên khoảng mở $(a; b)$ và $f(a) = f(b) = 0$ thì với $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $x \in (a; b)$ sao cho $\alpha f(x) + f'(x) = 0$.

- 22.** Cho f và g là các hàm liên tục trên $[a; b]$, khả vi trên khoảng mở $(a; b)$ và giả sử $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x \in (a; b)$ sao cho $g'(x)f(x) + f'(x)g(x) = 0$.
- 23.** Cho f là hàm liên tục trên $[a; b]$; $a > 0$ và khả vi trên khoảng mở $(a; b)$. Chứng minh rằng nếu $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$, thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$:
- 24.** Giả sử f liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Chứng minh rằng nếu $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$ thì phương trình $f'(x)f(x) = x$ có ít nhất một nghiệm trong $(a; b)$.
- 25.** Giả sử f và g liên tục, khác 0 trong $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Chứng minh rằng nếu $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$.
- 26.** Giả sử $a_0; a_1; \dots; a_n$ là các số thực thỏa mãn $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$: Chứng minh rằng đa thức $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ có ít nhất một nghiệm trong $(0; 1)$.
- 27.** Cho f khả vi liên tục trên $[a; b]$ và khả vi cấp hai trên $(a; b)$, giả sử $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_1 \in (a; b)$ sao cho $f''(x_1) = 0$.
- 28.** Cho f liên tục trên $[0; 2]$ và khả vi cấp hai trên $(0; 2)$. Chứng minh rằng nếu $(f(0) = 0; f(1) = 1 \text{ và } f(2) = 2)$ thì tồn tại $x_0 \in (0; 2)$ sao cho $f''(x_0) = 0$.
- 29.** Cho f liên tục $[0; 1]$ và khả vi trên $(0; 1)$, $f(x) \neq -1, \forall x \in [0; 1]$. $f(0) = 0, f(1) = 1$.
CMR: $\exists \xi \in (0; 1)$ sao cho $f'(\xi) = \frac{1}{2}[1 + f(\xi)]^2$.
- 30.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và trên $(0, +\infty)$ và không phải là hàm hằng. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn điều kiện $0 < a < b$. Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm thuộc (a, b) : $xf'(x) - f(x) = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$.
- 31.** Cho f là một hàm liên tục trên $[0; 1]$, khả vi trên $(0; 1)$ sao cho $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại các điểm $x_1, x_2, \dots, x_{2009}, 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2009} < 1$ sao cho $f'(x_1) + f'(x_2) + \dots + f'(x_{2009}) = 2009$.

UBND Tỉnh Quảng Bình
Trường Đại học Quảng Bình

MỘT SỐ BÀI TOÁN HÀM LIÊN TỤC, LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN

Biên soạn: Th.s Phan Trọng Tiến

Một số kiến thức nhắc lại:

Cho $X \subset \mathbb{R}$. Ta gọi một ánh xạ f từ X vào $\mathbb{R}$ là một *hàm số*. Tập X được gọi là tập xác định của hàm f .

Hàm đơn điệu:

Ta nói hàm số f *đơn điệu tăng* (*đơn điệu giảm*) trên tập $E \subset \mathbb{R}$ nếu với mỗi cặp $x_1, x_2 \in E$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Hàm f được gọi là *đơn điệu tăng ngặt* (*đơn điệu giảm ngặt*) trên tập $E \subset \mathbb{R}$ nếu với mỗi

cặp $x_1, x_2 \in E$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Hàm số đơn điệu tăng (ngắt) hay đơn điệu giảm (ngắt) được gọi chung là hàm đơn điệu (ngắt).

Hàm bị chặn:

Hàm số f được gọi là *bị chặn* trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại số M sao cho $f(x) \leq M, \forall x \in D$.

Hàm f được gọi là bị chặn dưới trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại một số m sao cho $f(x) \geq m, \forall x \in D$.

Hàm f vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới trên D được gọi là bị chặn trên D . Như vậy có thể suy ra rằng: hàm f bị chặn trên D nếu tồn tại số $M \geq 0$ sao cho $|f(x)| \leq M, \forall x \in D$.

Giới hạn của hàm số:

Số thực l được gọi là *giới hạn* của hàm số f khi x dần đến x_0 nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in X$ mà $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Lúc đó kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ hay $f(x) \rightarrow l$ khi $x \rightarrow x_0$.

Định lý chuyển qua dãy: Điều kiện cần và đủ để $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ là với mọi dãy $(x_n)_n \subset X$ mà $x_n \rightarrow x_0$ khi $n \rightarrow \infty$ thì $f(x_n) \rightarrow l$ khi $n \rightarrow \infty$.

Giới hạn bằng vô cùng và giới hạn ở vô cùng:

Nếu với mỗi số $M > 0$ tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $f(x) > M$ ($f(x) < -M$) với mọi x thoả mãn bất đẳng thức $0 < |x - a| < \delta$ thì ta nói f có giới hạn bằng $+\infty$ ($-\infty$) khi x tiến tới a và ký hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty).$$

Bây giờ ta giả thiết rằng hàm f xác định trên tập không bị chặn.

Số L được gọi là giới hạn của f khi x tiến ra $+\infty$ ($-\infty$) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $M > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn bất đẳng thức $x > M$ ($x < -M$) ta có: $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$).

Nếu với mỗi số $E > 0$ tồn tại số $M > 0$ sao cho $f(x) > E$ ($f(x) < -E$) với mọi $x \in X$ thoả mãn $x > M$ thì ta nói hàm f có giới hạn $+\infty$ ($-\infty$) khi x tiến ra $+\infty$ và ký hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty).$$

Tương tự cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Hàm liên tục:

Hàm f được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu: Tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x); f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ thì

Hàm f được gọi là liên tục tại x_0 nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x: |x - x_0| < \delta$ ta có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tính chất hàm liên tục:

1) Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì có ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

2) Giả sử f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) = A \neq B = f(b)$. Khi ấy f nhận mọi giá trị trung gian giữa A và B . (Ta nói: f lấp đầy đoạn $[A, B]$).

Hàm số được gọi là liên tục đều trên tập $X \subset \mathbb{R}$ nếu như với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu

tùy ý), ta tìm được số dương δ sao cho

$$\forall x, y \in X, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Định lý Cantor: Hàm liên tục trên đoạn thì cũng liên tục đều trên đoạn đó.

Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Hơn nữa f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó, tức là có $\alpha, \beta \in [a, b]$ để

$$f(\beta) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \text{ và } f(\alpha) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Bài 1.1. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có nghiệm.
- Hãy tìm một hàm thoả mãn điều kiện trên nhưng không đồng nhất bằng x trên $\mathbb{R}$.

Bài 1.2. Cho $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ là một hàm liên tục sao cho $f(a) = a$, $f(b) = b$ và $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bài 1.3. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(f(x))) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Chứng minh rằng $f(x) = x$ trên $\mathbb{R}$. Hãy tìm bài toán tổng quát hơn.
- Tìm một hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(f(x))) = x$ nhưng $f(x)$ không đồng nhất bằng x .

Bài 1.4. Cho f là một hàm liên tục và đơn ánh trên (a, b) . Chứng minh rằng f là một hàm đơn điệu ngặt trên (a, b) .

Bài 1.5. Cho hàm số $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ thoả mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ với mọi } x \in [a, b], x \neq y.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có duy nhất nghiệm trên $[a, b]$.

Bài 1.6. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn một trong hai điều kiện sau:

- f là hàm đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$.
- f là một hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có nghiệm. Trong mỗi trường hợp, hãy xem điều kiện duy nhất nghiệm có được đảm bảo không ?

Bài 1.7. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thì phương trình $f(x) = x$ cũng có nghiệm.

Bài 1.8. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$|f(x)| < |x| \text{ với mọi } x \neq 0.$$

a) Chứng minh rằng $f(0) = 0$.

b) Chứng minh rằng nếu $0 < a < b$ thì tồn tại $K \in [0, 1)$ sao cho

$$|f(x)| \leq K|x|, \forall x \in [a, b].$$

Bài 1.9. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn một trong ba điều kiện dưới đây:

a) $f(x) + f(2x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = f(\sin x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Bài 1.10. Cho f là một hàm không âm, liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k < 1$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, +\infty)$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

UBND Tỉnh Quảng Bình
Trường Đại học Quảng Bình

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN, LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN

Biên soạn: Th.s Phan Trọng Tiến

Một số kiến thức nhắc lại:

MD Nếu f là một hàm liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

MD Nếu f, g là hai hàm liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

MD Nếu f là một hàm liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ và f không đồng nhất bằng 0 trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx > 0$.

MD Nếu f là một hàm liên tục trên $[a, b]$ thì $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Số thực $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ gọi là giá trị trung bình của hàm f trên $[a, b]$.

Mệnh đề: Nếu hàm f khả tích trên đoạn $[a, b]$ và $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ thì tồn tại số $\mu \in [m, M]$ sao cho $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

Hệ quả: Nếu f là một hàm liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

32. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$a) \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx.$$

b) $\int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx \leq \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}.$

c) Nếu $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, thì $\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$

HD b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx &= \int_0^1 \sqrt{x^n} \cdot \sqrt{x^n(1-x)} dx \leq \left(\int_0^1 x^n dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 x^n(1-x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\int_0^1 x^n dx - \int_0^1 x^{n+1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

33. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Chứng minh rằng nếu f là hàm chẵn thì F là hàm lẻ, nếu f là hàm lẻ thì F là hàm chẵn.

34. Cho f là một hàm liên tục và nhận giá trị dương trên $[0, 1]$.

a) Chứng minh rằng $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x) dx}{f(\sin x) + f(\cos x)} = \frac{\pi}{4}.$

b) Tính các tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + e^{\cos 2x}}; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sqrt{t} g x}.$

35. Cho f là một hàm chẵn liên tục trên $[-a, a], a > 0$; g là một hàm liên tục nhận giá trị dương trên $[-a, a]$ và $g(-x) = \frac{1}{g(x)}, \forall x \in [-a, a].$

a) Chứng minh rằng $\int_{-a}^a \frac{f(x) dx}{1 + g(x)} = \int_0^a f(x) dx.$

b) Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - x + \sqrt{x^2 + 1}} dx.$

c) Tính $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}.$

36. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$

b) $\int_0^{n\pi} f(\cos^2 x) dx = n \int_0^{\pi} f(\cos^2 x) dx.$

37. Cho f là một hàm liên tục nhận giá trị dương và tuần hoàn với chu kỳ bằng 1 trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x + \frac{1}{n})} dx \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

38. Cho f là một hàm khả vi liên tục trên $[a, b], f(a) = 0$ và $0 \leq f'(x) \leq 1, \forall x \in [a, b].$

Chứng minh rằng

a) $\int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{2} [(f(b))^2 - (f(a))^2];$ b) $\int_a^b (f(x))^3 dx \leq \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2.$

HD $F(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)^2 - \int_a^x (f(t))^3 dt, \quad x \in [a, b]. \quad F'(x) = 2 \cdot \int_a^x f(t)dt \cdot f(x) - (f(x))^3 = f(x) \left[2 \int_a^x f(t)dt - (f(x))^2 \right].$

Đặt $G(x) = 2 \int_x^x f(t)dt - (f(x))^2$. Ta có

$$G'(x) = 2f(x) - 2f(x) \cdot f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

39. Cho $f \in C_{[a,b]}$; $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b], k_1, k_2, \dots, k_n > 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho

$$k_1 \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx + k_2 \int_{x_o}^{x_2} f(x)dx + \dots + k_n \int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = 0.$$

Giải: Xét hàm

$$\varphi(x) = k_1 \int_x^{x_1} f(t)dt + k_2 \int_x^{x_2} f(t)dt + \dots + k_n \int_x^{x_n} f(t)dt.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được

$$k_1 \varphi(x_1) + k_2 \varphi(x_2) + \dots + k_n \varphi(x_n) = 0.$$

Mặt khác φ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và $k_i > 0$ với mọi $i = \overline{1, n}$, do đó tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$, hay $k_1 \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx + k_2 \int_{x_o}^{x_2} f(x)dx + \dots + k_n \int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = 0$.

40. Tìm tất cả các hàm f liên tục trên $[0, 1]$ sao cho $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$.

HD Lấy đạo hàm hai vế.

41. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b], f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng

a) $\int_a^b x f(x) \cdot f'(x) dx = -\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

b) Giả sử $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1$. Hãy chứng minh

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [x f(x)]^2 dx \geq \frac{1}{4}.$$

42. Cho f là hàm liên tục trên $[0, \pi]$ sao cho

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trong $(0, \pi)$.

Giải:

Giả sử rằng f có không quá một nghiệm trên $(0, \pi)$.

Th1: f vô nghiệm trên $(0, \pi)$. Do tính liên tục của f ta suy ra f không đổi dấu trên $(0, \pi)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$. Khi đó $\int_0^\pi f(x) \sin x dx > 0$, mâu thuẫn.

Th2: f có duy nhất nghiệm $x_o \in (0, \pi)$. Dễ thấy rằng hàm $g(x) = f(x) \sin(x - x_o)$ không đổi dấu trên $(0, \pi)$. Do đó

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x - x_o) dx > 0.$$

Mặt khác từ giả thiết đã cho ta có

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x - x_o) dx = \cos x_o \int_0^\pi f(x) \sin x dx - \sin x_o \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$$

Mâu thuẫn trên chứng tỏ f có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên $(0, \pi)$.

43. Cho f là hàm khả vi trên $[-1, 1]$ sao cho

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Giải:

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $x_1 \in [-1, 0]$,

$x_2 \in [0, 1]$ sao cho

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = f(x_1), \text{ và } \int_0^1 f(x) dx = f(x_2).$$

* Nếu $x_1 \neq 0$ hoặc $x_2 \neq 0$ thì $x_1 \neq x_2$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (x_1, x_2) \subset (-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

* Nếu $x_1 = x_2 = 0$, thì

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = f(0) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Nếu $f(x) \neq f(0)$, $\forall x \in (0, 1]$ thì $g(x) = f(x) - f(0) \neq 0$ với mọi $x \in (0, 1]$. Vì vậy $g(x)$ không đổi dấu trên $(0, 1]$ và

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx - f(0) \neq 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ tồn tại $x_1 \in (0, 1]$ sao cho

$$f(x_1) = f(0).$$

Lại áp dụng định lý Rolle ta có điều cần chứng minh.

44. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x)x^2 dx = \frac{1}{3}f(c).$$

Giải:

Do f là hàm liên tục trên $[0, 1]$ nên tồn tại $x_1, x_2 \in [0, 1]$

$$f(x_1) = \min_{x \in [0, 1]} f(x), \quad f(x_2) = \max_{x \in [0, 1]} f(x).$$

Do đó

$$x^2 f(x_1) \leq x^2 f(x) \leq x^2 f(x_2), \forall x \in [0, 1].$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}f(x_1) &\leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{3}f(x_2). \\ \Leftrightarrow f(x_1) &\leq 3 \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq f(x_2). \end{aligned}$$

Theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục, tồn tại $c \in [0, 1]$ để $f(c) = 3 \int_0^1 x^2 f(x) dx$.

45. Cho f là hàm liên tục trên $[0, n]$ và $\int_0^n f(x) dx = 0$, ($n \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, n-1]$ sao cho

$$\int_0^c f(x) dx = \int_0^{c+1} f(x) dx.$$

Giải:

Xét hàm

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{x+1} f(t) dt = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

Rõ ràng φ liên tục trên $[0, n-1]$ và

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n-1) = 0.$$

Ta dễ dàng suy ra tồn tại $c \in [0, n-1]$ để $\varphi(c) = 0$.

46. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, $f(a) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x) \cdot f'(x)| dx \leq \frac{(b-a)}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Lời giải:

Với mọi $x \in [a, b]$, ta có $f(x) = \int_a^x f'(t) dt$.

Do đó $|f(x) \cdot f'(x)| \leq \int_a^x |f'(t)| dt \cdot |f'(x)|$.

Suy ra

$$\int_a^b |f(x) \cdot f'(x)| dx \leq \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)| dt \right) |f'(x)| dx.$$

Ta có: $\left(\int_a^x |f'(t)| dt \right)' = |f'(x)|$. Do vậy

$$\int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)| dt \right) |f'(x)| dx = \frac{1}{2} \left(\int_a^x |f'(t)| dt \right)^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} \left(\int_a^b |f'(x)| dx \right)^2 \leq \frac{1}{2} (b-a) \cdot \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

47. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, $f(a) = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Giải: Ta có

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)| dt \leq \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Do đó

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \int_a^b |f'(x)| dx.$$

48. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b (f(x) - f(a))^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned}(f(x) - f(a))^2 &= \left(\int_a^x f'(t) dt \right)^2 \leq \int_a^x (f'(t))^2 dt \cdot \int_a^x 1^2 dt \leq (x - a) \int_a^x (f'(t))^2 dt \\ &\leq (x - a) \int_a^b (f'(x))^2 dx.\end{aligned}$$

Do đó

$$\int_a^b (f(x) - f(a))^2 dx \leq \int_a^b (x - a) dx \cdot \int_a^b (f'(x))^2 dx \leq \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$