

Chuyên đề 1

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1.1 Công thức lượng giác

Bài 1.1. Tính $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

Bài 1.2. Tính $\frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$

Bài 1.3. Rút gọn $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} - \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

Bài 1.4. Chứng minh rằng $\tan x \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$

Bài 1.5. Chứng minh các đẳng thức

1. $\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$

2. $\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)}$

Bài 1.6. Chứng minh rằng

$$\sin^2 x - 2 \cos^4 x + 3 \cos^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \tan x} + \sin x \cos x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

Bài 1.7. Chứng minh rằng $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

Bài 1.8. (THPTQG 2015) Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 3 \cos 2\alpha)(2 + 3 \cos 2\alpha)$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Bài 1.9. Cho $\sin x = -\frac{3}{5}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan^3 x + \cot^3 x$?

Bài 1.10. Cho $\cos x = -\frac{4}{5}$ và $0 < x < \pi$. Tính $(\sin x + \tan x)(\cos x + \cot x)$?

Bài 1.11. Cho $\tan x + \cot x = 3$. Tính $\sin^4 x + \cos^4 x$?

Bài 1.12. Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Tính $\sin^8 x + \cos^8 x$?

Bài 1.13. Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sin^3 x + 2 \cos x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$

Bài 1.14. Cho $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{25\pi}{4}\right)$.

Bài 1.15. Cho $\cos x + \cos y = 1$ và $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}$. Tính $\cos(x - y)$?

Bài 1.16. Chứng minh các đẳng thức

1. $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$

$$2. \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$3. \frac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x} = \cot^2 x + \tan^2 x$$

$$4. \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8\cos 2x$$

Bài 1.17. Chứng minh $\sin^6 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^6 x = \frac{1}{8}(1 - \cos^4 2x)$

Bài 1.18. Chứng minh $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \frac{2}{3}$.

Bài 1.19. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1. \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \tan^4 \alpha$$

$$3. \cot \alpha - \tan \alpha - 2\tan 2\alpha - 4\tan 4\alpha = 8\cot 8\alpha$$

$$2. \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2 \alpha - 4}{1 - 8\sin^2 \alpha - \cos 4\alpha} = \frac{1}{2}\cot^4 \alpha$$

$$4. \frac{\tan(x - \frac{\pi}{2})\cos(\frac{3\pi}{2} + x) - \sin^3(\frac{7\pi}{2} - x)}{\cos(x - \frac{\pi}{2})\tan(\frac{3\pi}{2} + x)} = \sin^2 x$$

Bài 1.20. Tính $\sin 12^\circ$

Bài 1.21. Tính $P = \frac{\sqrt{3}}{\cos 650^\circ} + \frac{1}{\sin 250^\circ}$

Bài 1.22. Tính $P = \sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \dots \sin 85^\circ$

Bài 1.23. Chứng minh $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Bài 1.24. Tính $S = \tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ, P = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$

Bài 1.25. Rút gọn $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left(1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}\right)$. Tính giá trị của A nếu $\cos x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Bài 1.26. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$1. A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x$$

$$2. B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$$

Bài 1.27. Cho $\tan \frac{b}{2} = 4 \tan \frac{a}{2}$. Chứng minh rằng $\tan \frac{b-a}{2} = \frac{3 \sin a}{5 - 3 \cos a}$

Bài 1.28. Cho $\sin x \neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{\sin 5x}{\sin x} = 2\cos 4x + 2\cos 2x + 1$.

Bài 1.29. Cho $\tan \alpha = 2$, tính $P = \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$

Bài 1.30. Chứng minh rằng $P = 27\sin^3 9^\circ + 9\sin^3 27^\circ + 3\sin^3 81^\circ + \sin^3 243^\circ = 20\sin 9^\circ$

Bài 1.31. Tính $P = (1 - \cot 1^\circ)(1 - \cot 2^\circ) \dots (1 - \cot 44^\circ)$

Bài 1.32. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$1. \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$3. \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$2. \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$4. \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

Bài 1.33. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = \cos B + \cos C$ thì ABC là tam giác vuông.

Bài 1.34. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = 2\sin B \cos C$ thì ABC là tam giác cân.

Bài 1.35. Cho tam giác ABC . Chứng minh $A = 2B \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$

Bài 1.36. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ thì ABC là tam giác đều.

Bài 1.37. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Tìm GTNN của biểu thức $P = \tan A \tan B \tan C$.

Bài 1.38. Cho a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng $-\sqrt{2} \leq a(c+d) + b(c-d) \leq \sqrt{2}$

Bài 1.39. Cho $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Bài 1.40. [IMO1985] Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ sao cho $x + y + z = xyz$. Chứng minh

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz$$

Bài 1.41. Chứng minh rằng, với mọi số thực x, y ta có $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$

Bài 1.42. [USA MO 2002]

Tìm GTLN của $S = (1-x_1)(1-y_1) + (1-x_2)(1-y_2)$ với $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2, c > 0$

Bài 1.43. Cho $x + y + z = xyz$ và $x, y, z \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 1.44. Cho $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

1.2 Phương trình lượng giác cơ bản

Bài 1.45. Giải các phương trình lượng giác sau

1. $\sin 4x = \frac{4}{3}$

5. $\cos(\pi - x) = -1$

2. $\cos x = \frac{1}{4}$

6. $\tan(2x + 20^\circ) + \sqrt{3} = 1$

3. $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. $\tan(2x + 1) - \tan(3x - 1) = 1$

4. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Bài 1.46. Giải các phương trình lượng giác sau

1. $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$

8. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

9. $\sin^2\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

3. $\sin(30^\circ - x) = \cos 2x$

10. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$

4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 5x = 0$

11. $\cos x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

5. $3 - 4\sin^2 2x = 0$

12. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

6. $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 0$

13. $4\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

7. $(3 - \sin x)(1 - 2\sin x) = 0$

Bài 1.47. Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

1. $\sin 2x = 0$ trên $[0, 2\pi]$

3. $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi)$

2. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ trên $[-\pi, 3\pi]$

4. $\cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ trên $(0, 5\pi)$

Bài 1.48. Tìm $x \in (0, 3\pi)$ sao cho: $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Bài 1.49. Giải phương trình $4x^3 - \sqrt{1-x^2} - 3x = 0$.

Bài 1.50. Giải phương trình $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$

Bài 1.51. [VMO 1984] Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{(1+x^3)} - \sqrt{(1-x)^3} \right) = 2 + \sqrt{1-x^2}$

1.3 Phương trình lượng giác thường gặp

1.3.1 Bài tập

Bài 1.52. Phương trình:.....

- | | |
|--|---|
| 1. $2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ | 9. $2\sin^2 x - 2\cos^2 x - 4\sin x = -2$ |
| 2. $2\sin(2x + 50^\circ) = -1$ | 10. $3\cos 2x + 4\cos^3 x - \cos 3x = 0$ |
| 3. $-\frac{2}{\cos x} = \tan x + \cot x$ | 11. $\sin 2x \sin 6x = \sin 3x \sin 5x$ |
| 4. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$ | 12. $\sin 5x \sin 3x = \sin 9x \sin 7x$ |
| 5. $6\sin^2 3x + \cos 12x = 14$ | 13. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x$ |
| 6. $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$ | 14. $\sin^2 2x + \sin^2 4x = \sin^2 6x$ |
| 7. $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$ | 15. $\cos 2x - \cos x = 2\sin^2 \frac{3x}{2}$ |
| 8. $7\tan x - 4\cot x = 12$ | |

Bài 1.53. Phương trình:.....

- | | |
|---|--|
| 1. $4\sin x - 3\cos x = 5$ | 4. $2\sin^2 2x + \sqrt{3}\sin 4x = 3$ |
| 2. $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ | 5. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos(\frac{\pi}{3} - x)$ |
| 3. $2\sin 2x + 3\cos 2x = \sqrt{13}\sin 4x$ | 6. $\cos(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ |

Bài 1.54. Phương trình:.....

- | | |
|---|--|
| 1. $\sin^2 x - 10\sin x \cos x + 21\cos^2 x = 0$ | 6. $\frac{1}{\sin x} = 4\cos x + 6\sin x$ |
| 2. $2\sin^2 2x - 3\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 2$ | 7. $3\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x$ |
| 3. $\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$ | 8. $2\cos^3 x + 3\cos x - 8\sin^3 x = 0$ |
| 4. $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$ | 9. $\cos^3 x - \sin^3 x - 3\cos x \sin^2 x + \sin x = 0$ |
| 5. $4\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 2\sin^2 x = \frac{5}{2}$ | 10. $2\sin^2(x - \frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + 2\cos^2(2x + \frac{3\pi}{2}) = 1$ |

Bài 1.55. Phương trình:.....

- | | |
|---|---|
| 1. $(\sin x + \cos x)^4 - 3\sin 2x - 1 = 0$ | 7. $\frac{3}{\sin x + \cos x} = \sin x \cos x$ |
| 2. $3(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 3 = 0$ | 8. $2(\sin^3 x + \cos^3 x) + \sin 2x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$ |
| 3. $2(\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x) + \cos 2x = -3$ | 9. $(\sin 2x + \cos 2x)(\sin^3 2x + \cos^3 2x) = 1$ |
| 4. $2\sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) = -8$ | 10. $\sin x + \cos x + 2 + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 0$ |
| 5. $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) - 4 = 0$ | 11. $3(\tan x + \cot x) - 2(\tan^2 x + \cot^2 x) - 2 = 0$ |
| 6. $\sin 2x + 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ | 12. $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6$ |

Bài 1.56. Cho phương trình $\cos^3 x - \sin^3 x = m$. Xác định m để phương trình có nghiệm.

1.4 Phương trình lượng giác khác

Bài 1.57. Giải phương trình $(1 + \sin x)(1 - 2 \sin x) + 2(1 + \sin x) \cos x = 0$

Bài 1.58. Giải phương trình $(1 + \sin x)(1 - 2 \sin x) + 2(1 + 2 \sin x) \cos x = 0$

Bài 1.59. Giải phương trình $\cos 5x - \sin 2x = \sin 4x - \cos 3x$

Bài 1.60. Giải phương trình $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x$

Bài 1.61. Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $\sin 2x + \sin 6x - \sin 8x = 0$

2. $\sin x + \sin 3x = \cos x + \cos 3x$

3. $(1 + \tan x)(1 - \sin 2x) = 1 - \tan x$

4. $1 + \sin x + 2 \cos x + \sin 2x = 0$

5. $2 \cos 2x + \sin 2x + 5 = 8 \cos x + \sin x$

6. $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

7. $\sin^2 x - \cos^2 2x = \sin^2 3x - \cos^2 4x$

8. $\cos 5x + \sin 5x - 2 \sin 3x + \sin x - \cos x = 0$

9. $\frac{3 \cos 2x + 20 \cos 3x \cos 2x - 10 \cos 5x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0$

10. $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{8}(5 + 6 \cos 7x \cos 3x)$

11. $\sin 5x = \cos x \tan 3x$

12. $\frac{1 - \sin 2x - 2 \sin x + 2 \cos x}{\sqrt{2} \cos x - 1} = 0$

13. $\cos 2x + \cos x(2 \tan^2 x - 1) = 2$

Bài 1.62. Giải phương trình $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

Bài 1.63. Giải phương trình $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

Bài 1.64. Giải phương trình $\cos 10x + 2 \cos^2 4x + 6 \cos 3x \cdot \cos x = \cos x + 8 \cos x \cos^3 3x$

Bài 1.65. Giải phương trình $\tan x \cdot \cos 3x + 2 \cos 2x - 1 = \sqrt{3}(1 - 2 \sin x)(\sin 2x + \cos x)$

Bài 1.66. Giải phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{7}{8} \tan(x + \frac{\pi}{6}) \tan(x - \frac{\pi}{3}) = 0$

Bài 1.67. Giải phương trình $2(\cot x - \cos x) - 3(\tan x - \sin x) = 1$

Bài 1.68. Giải phương trình $2 \sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x - 1 = 0$

Bài 1.69. Giải phương trình $\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + \sin x = 0$

Bài 1.70. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{2}} \cot x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2 \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Bài 1.71. Giải phương trình $\cot x = \tan x + \frac{2 \cos 4x}{\sin 2x}$

Bài 1.72. Giải phương trình $\frac{3(\cos 2x + \cot 2x)}{\cot 2x - \cos 2x} = 4 \sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(\frac{\pi}{4} - x)$

Bài 1.73. Giải phương trình $\tan^2 x \tan^2 3x \tan 4x = \tan^2 x - \tan^2 3x + \tan 4x$

Bài 1.74. Giải các phương trình

1. $\frac{1}{4} + \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$

2. $\cos^2 x = \cos \frac{4x}{3}$

3. $32 \cos^6(x + \frac{\pi}{4}) - \sin 6x = 1$

Bài 1.75. Giải phương trình $\sin(2x + \frac{17\pi}{2}) + 16 = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 20 \sin^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$

Bài 1.76. Giải phương trình $(1 + \tan x) \cos 5x - \sin x - \cos x - 2 \cos 4x + 2 \cos 2x = 0$

Bài 1.77. Giải phương trình $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 5x} = \frac{2}{\cot x - 3}$

Bài 1.78. Giải phương trình $(4 \cos^2(x + \frac{\pi}{12}) - 1) \sin 2x = 2(\sin 7x - \sin 3x) \cos(5x - \frac{\pi}{3})$

Bài 1.79. Giải các phương trình lượng giác sau

1. $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$
2. $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$
3. $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
4. $\sin^4(3x + \frac{\pi}{4}) + \sin^4(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
5. $\sin^2 x(1 + \tan x) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$
6. $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x \cos^3 x - \frac{1}{2}$
7. $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$
8. $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x$
9. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2x)\cot 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2}\cos 5x = 0$
10. $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8\sin 2x}$
11. $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$
12. $\sin x \cos 2x + \cos^2 x(\tan^2 x - 1) + 2\sin^3 x = 0$
13. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1$
14. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$
15. $3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x \cos^2 \frac{x}{2}$

Bài 1.80. Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$
2. $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$
3. $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$
4. $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$
5. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x + \frac{3\pi}{2})} = 4\sin(\frac{7\pi}{4} - x)$
6. $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$
7. $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$
8. $(1 + 2\sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$
9. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$
10. $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$
11. $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$
12. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$
13. $\cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4$
14. $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$
15. $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$
16. $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^2 x)$
17. $(1 + 2\sin^2 x)\cos x = 1 + \sin x + \cos x$
18. $\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})\tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$
19. $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
20. $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos(x - \frac{\pi}{4})\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \frac{3}{2} = 0$
21. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$
22. $(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$
23. $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$
24. $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$
25. $(1 + 2\sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$

Bài 1.81. [Học Viện Ngân Hàng] $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

Bài 1.82. [ĐH Mở Địa Chất] $\tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$

Bài 1.83. Giải phương trình: $\sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0$.

Bài 1.84. Giải phương trình $\frac{\sin 3x - 4\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3}{\sin 3x - 1} = 0$

Bài 1.85. Giải phương trình $2(1 + \cos x)(\cot^2 x + 1) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + \sin x}$

Bài 1.86. Giải phương trình $\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x + \sin x = 0$

Bài 1.87. Giải phương trình $\cos x = 8\sin^3(x + \frac{\pi}{6})$

Bài 1.88. Giải phương trình $\sin^4 x + \frac{1}{2}\cos^4 x = \frac{1}{3}$

Bài 1.89. Giải phương trình $4 \sin 3x \cos 2x = 1 + 6 \sin x - 8 \sin^3 x$

Bài 1.90. Giải phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$

Bài 1.91. Giải phương trình $4 \cos x + 2 \cos 2x + \cos 4x = -7$

Bài 1.92. Giải phương trình $8 \cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

Bài 1.93. Giải phương trình: $4 \sin 3x \cos 2x = 1 + 6 \sin x - 8 \sin^3 x$

Bài 1.94. Giải phương trình $\cos 3x + 2 \sin x - 1 = 0$

Bài 1.95. Giải phương trình $\cot x + \sin x = \frac{\cos x}{1 - \cos x} + \frac{1}{\sin x}$

Bài 1.96. Giải phương trình $\sin 3x + \sin 2x + \sin x + 1 = \cos 3x + \cos 2x - \cos x$

Bài 1.97. Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 3 \tan 2x + \sin 4x}{\tan 2x - \sin 2x} = 2$

Bài 1.98. Giải phương trình $(2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$

Bài 1.99. Một số đề thi của BDG.

1. (CĐ08) $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$

2. (CĐ09) $(1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$

3. (CĐ10) $4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$

4. (CĐ11) $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$

5. (A02) Tìm nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ của PT: $5(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x}) = \cos 2x + 3$

6. (A03) $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$

7. (A05) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

8. (A06) $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x}$

9. (A07) $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 - \sin 2x$

10. (A08) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x + \frac{3\pi}{2})} = 4 \sin(\frac{7\pi}{4} - x)$

11. (A09) $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = 3$

12. (A10) $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin(x + \frac{\pi}{4})}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

13. (A11) $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$

14. (A12) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$

15. (A13) $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$

16. (A14) $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$

17. (B02) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

18. (B03) $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

19. (B04) $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$

20. (B05) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$
21. (B06) $\cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4$
22. (B07) $2 \sin^2 x + \sin 7x - 1 = \sin x$
23. (B08) $\sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x = \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x$
24. (B09) $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$
25. (B10) $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x$
26. (B11) $\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$
27. (B12) $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$
28. (B13) $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$
29. (B14) $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$
30. (D02) Tìm x thuộc $[0; 14]$ thỏa mãn PT: $\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0$
31. (D03) $\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$
32. (D04) $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
33. (D05) $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos(x - \frac{\pi}{4}) \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \frac{3}{2} = 0$
34. (D06) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$
35. (D07) $(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$
36. (D08) $2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$
37. (D09) $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$
38. (D10) $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$
39. (D11) $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$
40. (D12) $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$
41. (D13) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

Bài 1.100. Giải phương trình $2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 + \sqrt{1 - x^2}$

ĐÁP SỐ

1.26. $A = 2, B = -1$.

$$4. x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi; k2\pi$$

1.80. Đáp số.

$$1. x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$5. x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{8} + k\pi; \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

$$2. x = \frac{k\pi}{2}$$

$$6. x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}$$

$$3. x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$$

$$7. x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$$

8. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi$
9. $x = \frac{k\pi}{9}; \frac{k\pi}{2}$
10. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$
11. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi$
12. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$
13. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi$
14. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$
15. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3} + k\pi$
16. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}$
17. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi$
18. $x = \pi + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi$
19. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi$
20. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
21. $x = k\pi; \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$
22. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi$
23. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi$
24. $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$
25. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi$
- 1.81. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$
- 1.82. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi$

HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI

Bài 1.6. Ta có

$$\begin{aligned}
 VT &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos^2 x(1 - \cos^2 x) = 1 + 2\sin^2 x \cos x \\
 VP &= \frac{1}{1 + \cot x} (\sin^2 x + \cot x \cos^2 x) + \sin x \cos x + 2\sin^2 x \cos x \\
 &= \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \left(\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x} \right) + \sin x \cos x + 2\sin^2 x \cos x \\
 &= 1 - \sin x \cos x + \sin x \cos x + 2\sin^2 x \cos x \\
 &= 1 + 2\sin^2 x \cos x
 \end{aligned}$$

Như vậy $VT = VP$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.14. Từ $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ tính được $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Lại có $\tan(\alpha - \frac{25\pi}{4}) = \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} =$ Do đó...

Bài 1.16.

1. Có $\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \dots$
2. Biến đổi $VT = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \dots$
3. Có $VP = (\cot x + \tan x)^2 - 2 = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2 = \dots$

Bài 1.22. Xét $Q = \sin 5^\circ \sin 10^\circ \sin 15^\circ \sin 20^\circ \sin 25^\circ \dots \sin 85^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2^9} \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \dots \sin 80^\circ$.

Từ đó có $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2^9} Q \Rightarrow P = \frac{\sqrt{2}}{2^9}$.

Bài 1.23. Có $VT = \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2 \sin(60^\circ - 20^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 40^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} = VP$.

Bài 1.25. $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left(\frac{\sin^2 x + 1 - 2 \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \frac{2}{\sin x}$. Khi... $A = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Bài 1.27. Đặt $\tan \frac{a}{2} = t$ thì $\tan \frac{b}{2} = 4t$, do đó $\tan \frac{b-a}{2} = \frac{\tan \frac{b}{2} - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{b}{2} \tan \frac{a}{2}} = \frac{3t}{1 + 4t^2}$

Mà $\frac{3 \sin a}{5 - 3 \cos a} = \frac{3 \frac{2t}{1+t^2}}{5 - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{3t}{1 + 4t^2}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.28. Nhân chéo, áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

Bài 1.30. Từ $\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x)$ ta có

$$P = 27 \frac{3 \sin 9^\circ - \sin 27^\circ}{4} + 9 \dots = \frac{81 \sin 9^\circ - \sin 729^\circ}{4} = \frac{81 \sin 9^\circ - \sin 9^\circ}{4} = 20 \sin 9^\circ.$$

Bài 1.31. Ta có

$$P = \left(1 - \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 2^\circ}{\sin 2^\circ}\right) \dots \left(1 - \frac{\cos 44^\circ}{\sin 44^\circ}\right) = \frac{(\sin 1^\circ - \cos 1^\circ)(\sin 2^\circ - \cos 2^\circ) \dots (\sin 44^\circ - \cos 44^\circ)}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ \dots \sin 44^\circ}$$

Dùng đẳng thức $\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin(a - 45^\circ)$ ta đưa về

$$\frac{\sqrt{2} \sin(1^\circ - 45^\circ) \sqrt{2} \sin(2^\circ - 45^\circ) \dots \sqrt{2} \sin(44^\circ - 45^\circ)}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ \dots \sin 44^\circ} = 2^{22}.$$

Bài 1.35. Có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ nên $a^2 = b^2 + bc \Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C \Leftrightarrow \dots$

Bài 1.37. Có $A + B = \pi - C$ nên $\tan(A + B) = \tan(\pi - C) \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$. Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương có

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3 \sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \Leftrightarrow P \geq 3 \sqrt[3]{P} \Leftrightarrow P \geq 3 \sqrt{3}$$

Bài 1.38. Đặt $a = \sin u, b = \cos u$ và $c = \sin v, d = \cos v$ thì $S = \sin u(\sin v + \cos v) + \cos u(\sin v - \cos v) = \sin(u + v) - \cos(u + v) = \sqrt{2} \sin\left((u + v) + \frac{\pi}{4}\right)$. Suy ra $-\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a(c + d) + b(c - d) \leq \sqrt{2}$.

Bài 1.39. Đặt $a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$ với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ thì ta có

$$\begin{aligned} \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 &= \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)^2 + \left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)^2 \\ &= (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) \left(1 + \frac{1}{\cos^4 \alpha \sin^4 \alpha}\right) + 4 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha\right) \left(1 + \frac{16}{\sin^4 2\alpha}\right) + 4 \geq \frac{25}{2} \quad (\text{vì } \sin 2\alpha \leq 1.) \end{aligned}$$

Bài 1.40. Rõ ràng đẳng thức đúng với $xyz = 0$, nên chúng ta chỉ cần chứng minh với $x, y, z \neq 0$. Chia hai vế cho $4xyz$ ta có

$$\frac{1-y^2}{2y} \frac{1-z^2}{2z} + \frac{1-z^2}{2z} \frac{1-x^2}{2x} + \frac{1-x^2}{2x} \frac{1-y^2}{2y} = 1$$

Từ điều kiện $x + y + z = xyz$ ta nghĩ đến việc lượng giác hóa bài toán bằng cách đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$ với A, B, C là 3 góc của một tam giác, ta đưa bài toán trở thành:

$$\begin{aligned} \cot 2B \cot 2C + \cot 2C \cot 2A + \cot 2A \cot 2B &= 1 \\ \Leftrightarrow \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C &= \tan 2A \tan 2B \tan 2C \end{aligned}$$

Đây rõ ràng là đẳng thức đúng vì $\tan(2A + 2B + 2C) = \tan 2\pi = 0$. Bài toán được chứng minh.

Bài 1.41. Đặt $x = \tan a, y = \tan b$ ta có ngay $-1 \leq \sin 2(a+b) \leq 1$

Bài 1.42. Nhận thấy hai điểm có tọa độ (x_1, x_2) và (y_1, y_2) nằm trên đường tròn (O, c) nên có thể đặt $(x_1, x_2) = (c \cos \phi, c \sin \phi)$ và $(y_1, y_2) = (c \cos \psi, c \sin \psi)$. Khi đó

$$\begin{aligned} S &= 2 - c(\cos \phi + \sin \phi + \cos \psi + \sin \psi) + c^2(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ &= 2 + c\sqrt{2} \left(-\sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\psi + \frac{\pi}{4} \right) \right) + c^2 \cos(\phi - \psi) \end{aligned}$$

Do đó $S \leq 2 + 2c\sqrt{2} + c^2 = \left(c + \sqrt{2} \right)^2$. Nên GTLN của S là $\left(c + \sqrt{2} \right)^2$ đạt được khi $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Bài 1.43. Đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$ với A, B, C là 3 góc của một tam giác, bài toán trở thành

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 1.44. Nhân hai vế với 2 được

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} \geq 3\sqrt{3}$$

Từ điều kiện $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$ ta đặt $x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}$ với A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. Bài toán trở thành

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

Bài 1.49. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$ nên đặt $x = \cos t$ với $t \in [0, \pi]$ được phương trình $\cos 3t = \sin t$. Đáp số $x = \cos \frac{\pi}{8}, x = \cos \frac{5\pi}{8}$.

Bài 1.50. Điều kiện $x \geq -2$. Có nhận xét: Nếu $x > 2$ thì $x^3 - 3x > 4x - 3x = x > \sqrt{x+2}$ nên $x \leq 2$. Vậy $-2 \leq x \leq 2$ do đó đặt $x = 2 \cos \alpha$ với $\alpha \in [0, \pi]$. Phương trình trở thành

$$2 \cos 3\alpha = \sqrt{2(1 + \cos \alpha)} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

Giải phương trình này tìm được $\alpha = 0, \frac{4\pi}{7}, \frac{4\pi}{5}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2, x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = 2 \cos \frac{4\pi}{7}$.

Bài 1.51. Điều kiện $x \in [-1, 1]$ nên đặt $x = \cos \alpha$ với $\alpha \in [0, \pi]$ được phương trình

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \left(\sqrt{(1 + \cos \alpha)^3} - \sqrt{(1 - \cos \alpha)^3} \right) = 2 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow &\sqrt{1 + \sin \alpha} \left(\sqrt{8 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)^3} - \sqrt{8 \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2} \right)^3} \right) = 2 + \sin \alpha \\ \Leftrightarrow &2\sqrt{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = 2 + \sin \alpha \\ \Leftrightarrow &\sqrt{2} \cos \alpha (2 + \sin \alpha) = 2 + \sin \alpha \\ \Leftrightarrow &\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 1.57. Biến đổi thành $(1 + \sin x)(1 - 2 \sin x + 2 \cos x) = 0$

Bài 1.58. Biến đổi $1 + \sin x - 2 \sin x - 2 \sin^2 x + 2 \cos x + 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + 2 \sin 2x = \sin x - 2 \cos x \Leftrightarrow \sqrt{5} \sin(2x + \alpha) = \sqrt{5} \sin(x + \beta)$

Bài 1.62. Biến đổi thành $(\sin x - 1)(\sin x + \cos x + 2) = 0$

Bài 1.63. Biến đổi $(1 - 2\sin^2 2x) = \sin 7x - \sin x \Leftrightarrow \cos 4x = 2\cos 4x \sin 3x$

Bài 1.64. Hạ bậc và nhóm $(\cos 10x + \cos 8x) + 1 = \cos x + 2\cos x(4\cos^3 3x - 3\cos 3x) \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$.

Bài 1.65. $\sin x(1 - 4\sin^2 x) + 1 - 4\sin^2 x = \sqrt{3}\cos x(1 - 4\sin^2 x) \Leftrightarrow (1 - 4\sin^2 x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1) = 0$

Bài 1.66. PT $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \frac{7}{8}\tan(x + \frac{\pi}{6})\cot(x + \frac{\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

Bài 1.67. Tách và nhóm thành $2(\cot x - \cos x + 1) - 3(\tan x - \sin x + 1) = 0$ sau đó qui đồng...

Bài 1.68. Biến đổi $\sin x + \cos x = \sin 2x + 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$

Bài 1.69. $\cos^3 x - \sin^2 x \cos x + \sin x - 2\sin^2 x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x(\cos x - \sin x)^2 = 0$

Bài 1.70. $\frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin x} + \frac{2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = 2\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}\sin x} + \frac{2\sin x}{\sin x + \cos x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x - 2\sqrt{2}\sin x \cos x + \cos x = 0 \end{cases}$

Bài 1.71. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 4x}{\sin x \cos x} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x$

Bài 1.72. $\frac{3(\cos 2x + \cot 2x)}{\cot 2x - \cos 2x} = 2\sin 2x + 2 \Leftrightarrow \frac{3(\sin 2x + 1)}{1 - \sin 2x} = 2(\sin 2x + 1)$

Bài 1.74.

1. Đặt $t = \frac{x}{3}$.
2. Đặt $t = \frac{2x}{3}$
3. Đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$

Bài 1.75. Biến đổi thành $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 5\cos(x + \frac{\pi}{6}) + 3 = 0$ sau đó áp dụng công thức nhân đôi.

Bài 1.76. Biến đổi thành $(\cos 5x - \cos x)(\sin x + \cos x) = -2\cos x(\cos 4x - \cos x) \Leftrightarrow -2\sin 3x \sin 2x(\sin x + \cos x) = 2\cos x(-2\sin 3x \sin x)$

Bài 1.77. Biến đổi $(\sin x + \cos x)(\cos x - 3\sin x) = 2\sin x \cos 5x \Leftrightarrow \cos 2x - 2\sin^2 x = \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x \Leftrightarrow 2\cos 2x - 1 = \sin 4x(2\cos 2x - 1)$

Bài 1.78. $(2\cos(2x + \frac{\pi}{6}) + 1)\sin 2x = 4\cos 5x \sin 2x \cos(5x - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin 2x(\dots) = 2\sin 2x(\cos(10x - \frac{\pi}{3}) + \cos \frac{\pi}{3})$

Bài 1.79.

1. Đưa về phương trình bậc ba...
2. $2\cos x(2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4) = 0$. Đáp số $\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.
3. Biến đổi $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$. Đáp số $\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi$.
4. Hạ bậc, đưa về góc $6x$. Đặt $t = \sin 6x$, được phương trình $(1+t)^2 + (1-t)^2 = 2$. Đáp số $x = k\frac{\pi}{6}$.
5. Chia hai vế cho $\cos^2 x$ được $t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0$. Đáp số $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.
6. Biến đổi thành $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x(\cos 9x + 3\cos 3x) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = \cos 8x + \cos 10x + 3\cos 4x + 3\cos 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 10x = 1/2$
7. Đặt $t = \tan x$ được phương trình... Đáp số $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.
8. Đẳng cấp bậc ba. Đáp số $k\frac{\pi}{4}$.

9. Qui đồng, nhóm thành $\cos 5x(1 - \sqrt{2}\sin 3x) = 0$. Đáp số $\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$.
10. Đặt $t = \cos 2x$. Đáp số $\pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.
11. Đưa về phương trình bậc hai của $\cos 2x$. Đáp số $k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.
12. Đưa về phương trình bậc hai của $\cos x$. Đáp số $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.
13. Phương trình đối xứng.
14. Qui đồng, biến đổi thành $(\sin x - \cos x)(1 + \sin 2x) = 0$. Đáp số $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$.
15. Hạ bậc, đưa về phương trình bậc hai của $\sin x$. Đáp số $\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Bài 1.82. Chia hai vế cho $\sin^2 x$

Bài 1.83. Biến đổi thành

$$\begin{aligned} & \sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\sin x\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 6\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sqrt{3} + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(-2\cos^2 x - 6\cos x + 8) = 0 \end{aligned}$$

Bài 1.84. Điều kiện $\sin 3x \neq 1$. Biến đổi $\cos(3x - \frac{\pi}{2}) - 4\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3(x - \frac{\pi}{6}) - 7\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3 = 0$

Bài 1.85. $2(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = (\sin x - 1)\sin^2 x \Leftrightarrow 2(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = (\sin x - 1)(1 - \cos x)(1 + \cos x)$

Bài 1.86. Phương trình đẳng cấp bậc ba.

Bài 1.87. Biến đổi thành $\cos x = (\sqrt{3}\sin x + \cos x)^3$ là phương trình đẳng cấp bậc ba.

Bài 1.88. $\sin^4 x + \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{6} = 0$

Bài 1.89. Nhận xét $\cos x = 0$ không là nghiệm nên nhân hai vế của phương trình với $\cos x$ được $2\sin 3x(4\cos^2 - 3)\cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

Bài 1.90. Nhận xét $VT \leq \sqrt{2} \leq VP$. Phương trình vô nghiệm.

Bài 1.91. Phương trình tương đương với $4(\cos x + 1) + 2(\cos 2x + 2) + (\cos 4x + 1) = 0$. Đánh giá, phương trình vô nghiệm.

Bài 1.92. Biến đổi thành $(2\cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$.

Bài 1.93. PT $\Leftrightarrow 2\sin 5x + 2\sin x = 1 + 2\sin 3x$

Kiểm tra thấy $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Nhân hai vế của PT với $\cos x$ ta được

$$PT \Leftrightarrow 2\sin 5x\cos x + \sin 2x = \cos x + 2\sin 3x\cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \cos x$$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}$ và $\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}$

Bài 1.94. $\cos x(1 - 4\sin^2 x) - (1 - 2\sin x) = 0$.

Bài 1.95. Ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{1 - \cos x} \right) + \left(\sin x - \frac{1}{\sin x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1 - \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} - \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x (\sin x (1 - \cos x) - (1 + \cos x)) = 0 \end{aligned}$$

Đáp số $\pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Bài 1.96. $(\sin 3x + \sin x) + (1 + \sin 2x) - (\cos 3x - \cos x) = \cos 2x \Leftrightarrow 2 \sin 2x (\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$.
Đáp số: $\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k2\pi, \pi + k2\pi, \frac{-\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Bài 1.97. $2 \sin 2x \cos 2x + 3 \sin 2x + \tan 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x (2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1) = 0$. Đáp số: $\pm \frac{\pi}{3}$

Bài 1.98. $\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1 - (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$. Đáp số:
 $k2\pi, \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$

Bài 1.100. Đặt $x = \sin t$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ được phương trình $2 \sin t + (4 \sin^2 t - 1) \cdot \cos t = 4 \sin^3 t + \cos t \Leftrightarrow (\sin 2t - 1)(\sin t + \cos t) = 0$