

Mục lục

1	PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	3
1.1	Công thức lượng giác	3
1.1.1	Kiến thức cơ bản	3
1.1.2	Các dạng toán và ví dụ	4
1.1.3	Bài tập	6
1.2	Phương trình lượng giác cơ bản	11
1.2.1	Kiến thức cơ bản	11
1.2.2	Các dạng toán và ví dụ	11
1.2.3	Bài tập	12
1.3	Phương trình lượng giác thường gặp	13
1.3.1	Phương trình đa thức đối với một hàm số lượng giác	13
1.3.2	Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$	15
1.3.3	Phương trình thuần nhất (đẳng cấp) đối với $\sin x$ và $\cos x$	16
1.3.4	Phương trình đối xứng	17
1.3.5	Bài tập	19
1.4	Phương trình lượng giác khác	20
1.4.1	Kiến thức cơ bản	20
1.4.2	Các dạng toán và ví dụ	20
1.4.3	Bài tập	23
1.5	Bài tập tổng hợp	24

Chuyên đề 1

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1.1 Công thức lượng giác

1.1.1 Kiến thức cơ bản

1. Các công thức cơ bản

- Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$.
- Giá trị lượng giác của các cung có liên quan: *cos đối - sin bù - phụ chéo - khác π tan; hơn nhau ở tuổi 90...; hơn kém chẵn π thì sin-cos...*
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \tan x \cot x = 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

2. Công thức cộng

- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

3. Công thức nhân

- Nhân đôi: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
- Hạ bậc: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
- Công thức biểu diễn theo $t = \tan \frac{x}{2}$: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$
- Nhân ba: $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

4. Công thức biến đổi tổng-tích

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
- $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

1.1.2 Các dạng toán và ví dụ

Ví dụ 1.1. Biểu diễn các cung có số đo: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, 60^\circ + k120^\circ$ trên đường tròn lượng giác.

Ví dụ 1.2. Tính $\tan 300^\circ, \sin(-780^\circ), \cos(-990^\circ), \tan(-\frac{2\pi}{3}), \cot \frac{11\pi}{6}$.

Ví dụ 1.3. Rút gọn các biểu thức

$$1. A = 5 \tan 540^\circ + 2 \cos 1170^\circ + 4 \sin 990^\circ - 3 \cos 540^\circ$$

$$3. C = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ$$

$$2. B = 3 \sin \frac{25\pi}{6} - 3 \tan \frac{13\pi}{4} + 2 \cos \frac{14\pi}{3}$$

$$4. D = \sin(x + \pi) - \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cot(2\pi - x) + \tan(\frac{3\pi}{2} - x)$$

Solution. $A = -1, B = -\frac{5}{2}, C = 1, D = -2 \sin x$

Ví dụ 1.4. Chứng minh các đẳng thức

$$1. \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$3. \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$2. \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$4. \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

Ví dụ 1.5. Rút gọn

$$1. A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$$

$$3. C = \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$2. B = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$$

$$4. D = \frac{\cos x \tan x}{\sin^2 x} - \cot x \cos x$$

Solution. $A = 4, B = \sin^2 x, C = \frac{1}{\cos x}, D = \sin x$

Ví dụ 1.6. Cho $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$?

Solution. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \cot \alpha = \frac{4}{3}$.

Ví dụ 1.7. Cho $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $\sin(\alpha + 45^\circ)$?

Solution. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

Ví dụ 1.8. Tính giá trị biểu thức $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ biết $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Solution. $P = 31/49$

Ví dụ 1.9. Chứng minh các đẳng thức:

$$1. \tan^2 a - \tan^2 b = \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$$

$$2. \cos(a-b) \cos(a+b) = \cos^2 b - \sin^2 a$$

$$3. \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2} \sin a$$

$$4. \frac{\cos(a+b) \cos(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = 1 - \tan^2 a \tan^2 b$$

Ví dụ 1.10. Rút gọn

$$1. A = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$2. B = \sin 4x \cot 2x - \cos 4x$$

$$3. D = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Solution.

$$1. A = \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$2. B = \frac{\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x}{\sin 2x} = 1$$

$$3. D = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x + x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{7\pi}{12}$$

Ví dụ 1.11. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$1. \sin 2x \tan x = 1 - \cos 2x$$

$$2. 4\cos^4 x - 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{3}{2}$$

$$3. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}$$

$$4. 5 + 3\cos 4x = 8(\sin^6 x + \cos^6 x)$$

$$5. \cot x - \tan x = 2\cot 2x$$

$$6. \sin 2x(\tan x + \cot x) = 2$$

$$7. \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{\sin 4x}{4}$$

$$8. \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8\cos 2x$$

$$9. \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$10. \frac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x} = \cot^2 x + \tan^2 x$$

Solution.

$$9. \text{Biến đổi } VT = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}. \text{ Sau đó áp dụng công thức nhân đôi...}$$

$$10. \text{Biến đổi } VP = \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \dots$$

Ví dụ 1.12. Rút gọn

$$1. A = \frac{\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x}{\cos x}$$

$$2. B = \frac{2}{\sin 4x} - \cot 2x$$

$$3. C = \frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4}$$

$$4. D = \frac{\cot \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2}}{\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}}$$

$$5. E = \frac{2\cos^2 a - 1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$$

$$6. F = \frac{\sin(60^\circ + a)}{4\sin\left(15^\circ + \frac{a}{4}\right)\sin\left(75^\circ - \frac{a}{4}\right)}$$

Solution. $A = -2\sin x, B = \tan 2x, C = \tan^4 x, D = \frac{1}{\cos x}, E = 1, F = ?$

Ví dụ 1.13. Tính $\sin 18^\circ$

Solution. Ta có $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ nên:

$$\begin{aligned} 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ &= 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ \\ \Leftrightarrow 4\cos^2 18^\circ - 3 &= 2\sin 18^\circ \quad (\text{vì } \cos 18^\circ \neq 0) \\ \Leftrightarrow 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Giải phương trình này, với chú ý $\sin 18^\circ > 0$, ta tìm được $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

Ví dụ 1.14. [ĐH Đà Nẵng 1998] Chứng minh

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

Solution. Đặt $A = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$. Nhân hai vế của A với $2 \sin \frac{\pi}{7}$ ta được

$$\begin{aligned} 2A \sin \frac{\pi}{7} &= \sin \frac{2\pi}{7} - 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \\ &= \sin \frac{2\pi}{7} - \left(\sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{-\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{-2\pi}{7} \right) \\ &= \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \\ &= \sin \frac{\pi}{7} \quad (\text{vì } \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7}) \end{aligned}$$

Do đó $A = \frac{1}{2}$ hay $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.15. Biến đổi thành tích

- $\cos^2 a - \cos^2 3a$
- $\sin 3x + \sin 2x$
- $\cos(60^\circ + x) \cos(60^\circ - x) + \cos 3x$
- $\sin 70^\circ - \sin 20^\circ + \sin 50^\circ$
- $\cos 46^\circ - \cos 22^\circ - 2 \cos 78^\circ$
- $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$
- $\cos a + \cos b + \sin(a + b)$
- $1 + \sin x - \cos 2x$
- $1 - 2 \cos x + \cos 2x$
- $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$

Ví dụ 1.16. Chứng minh đẳng thức

- $\cos x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 5x = 8 \sin^2 x \cos^3 x$
- $\sin x(1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) = \sin 7x$

1.1.3 Bài tập

Bài 1.1. Tính $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

Bài 1.2. Tính $\frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$

Bài 1.3. Rút gọn $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} - \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

Bài 1.4. Chứng minh rằng $\tan x \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$

Bài 1.5. Chứng minh các đẳng thức

- $\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$
- $\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)}$

Bài 1.6. Chứng minh rằng

$$\sin^2 x - 2 \cos^4 x + 3 \cos^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \tan x} + \sin x \cos x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

Hint. Ta có

$$VT = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cos^2 x(1 - \cos^2 x) = 1 + 2 \sin^2 x \cos x$$

$$\begin{aligned} VP &= \frac{1}{1 + \cot x} (\sin^2 x + \cot x \cos^2 x) + \sin x \cos x + 2 \sin^2 x \cos x \\ &= \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \left(\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x} \right) + \sin x \cos x + 2 \sin^2 x \cos x \\ &= 1 - \sin x \cos x + \sin x \cos x + 2 \sin^2 x \cos x \\ &= 1 + 2 \sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

Như vậy $VT = VP$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.7. Chứng minh rằng $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

Bài 1.8. (THPTQG 2015) Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 3 \cos 2\alpha)(2 + 3 \cos 2\alpha)$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Bài 1.9. Cho $\sin x = -\frac{3}{5}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan^3 x + \cot^3 x$?

Bài 1.10. Cho $\cos x = -\frac{4}{5}$ và $0 < x < \pi$. Tính $(\sin x + \tan x)(\cos x + \cot x)$?

Bài 1.11. Cho $\tan x + \cot x = 3$. Tính $\sin^4 x + \cos^4 x$?

Bài 1.12. Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Tính $\sin^8 x + \cos^8 x$?

Bài 1.13. Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sin^3 x + 2 \cos x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$

Bài 1.14. Cho $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{25\pi}{4}\right)$.

Hint. Từ $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ tính được $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Lại có $\tan\left(\alpha - \frac{25\pi}{4}\right) = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} =$ Do đó...

Bài 1.15. Cho $\cos x + \cos y = 1$ và $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}$. Tính $\cos(x - y)$?

Hint. Từ $\cos x + \cos y = 1$ và $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}$ suy ra

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = 1 \\ \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cộng từng vế hai đẳng thức này được

$$1 + 1 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \cos(x - y) = -\frac{2}{8}$$

Bài 1.16. Chứng minh các đẳng thức

1. $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$

3. $\frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x} = \cot^2 x + \tan^2 x$

2. $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

4. $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8 \cos 2x$

Hint.

1. Có $\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \dots$

2. Biến đổi $VT = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \dots$

3. Có $VP = (\cot x + \tan x)^2 - 2 = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2 = \dots$

Bài 1.17. Chứng minh $\sin^6 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^6 x = \frac{1}{8}(1 - \cos^4 2x)$

Bài 1.18. Chứng minh $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \frac{2}{3}$.

Bài 1.19. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1. \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \tan^4 \alpha$$

$$3. \cot \alpha - \tan \alpha - 2\tan 2\alpha - 4\tan 4\alpha = 8\cot 8\alpha$$

$$2. \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2 \alpha - 4}{1 - 8\sin^2 \alpha - \cos 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot^4 \alpha$$

$$4. \frac{\tan(x - \frac{\pi}{2}) \cos(\frac{3\pi}{2} + x) - \sin^3(\frac{7\pi}{2} - x)}{\cos(x - \frac{\pi}{2}) \tan(\frac{3\pi}{2} + x)} = \sin^2 x$$

Bài 1.20. Tính $\sin 12^\circ$

Bài 1.21. Tính $P = \frac{\sqrt{3}}{\cos 650^\circ} + \frac{1}{\sin 250^\circ}$

Bài 1.22. Tính $P = \sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \dots \sin 85^\circ$

Hint. Xét $Q = \sin 5^\circ \sin 10^\circ \sin 15^\circ \sin 20^\circ \sin 25^\circ \dots \sin 85^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2^9} \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \dots \sin 80^\circ$.

Từ đó có $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2^9} Q \Rightarrow P = \frac{\sqrt{2}}{2^9}$.

Bài 1.23. Chứng minh $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Hint. Có $VT = \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2 \sin(60^\circ - 20^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 40^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} = VP$.

Bài 1.24. Tính $S = \tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ$, $P = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$?

Bài 1.25. Rút gọn $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left(1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} \right)$. Tính giá trị của A nếu $\cos x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Hint. $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left(\frac{\sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \frac{2}{\sin x}$. Khi... $A = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Bài 1.26. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$1. A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x$$

$$2. B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$$

Key. $A = 2, B = -1$.

Bài 1.27. Cho $\tan \frac{b}{2} = 4 \tan \frac{a}{2}$. Chứng minh rằng $\tan \frac{b-a}{2} = \frac{3 \sin a}{5 - 3 \cos a}$

Hint. Đặt $\tan \frac{a}{2} = t$ thì $\tan \frac{b}{2} = 4t$, do đó $\tan \frac{b-a}{2} = \frac{\tan \frac{b}{2} - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{b}{2} \tan \frac{a}{2}} = \frac{3t}{1 + 4t^2}$

Mà $\frac{3 \sin a}{5 - 3 \cos a} = \frac{3 \frac{2t}{1+t^2}}{5 - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{3t}{1 + 4t^2}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.28. Cho $\sin x \neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{\sin 5x}{\sin x} = 2\cos 4x + 2\cos 2x + 1$.

Hint. Nhân chéo, áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

Bài 1.29. Cho $\tan \alpha = 2$, tính $P = \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$

Bài 1.30. Chứng minh rằng $P = 27 \sin^3 9^\circ + 9 \sin^3 27^\circ + 3 \sin^3 81^\circ + \sin^3 243^\circ = 20 \sin 9^\circ$

Hint. Từ $\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x)$ ta có

$$P = 27 \frac{3 \sin 9^\circ - \sin 27^\circ}{4} + 9 \dots = \frac{81 \sin 9^\circ - \sin 729^\circ}{4} = \frac{81 \sin 9^\circ - \sin 9^\circ}{4} = 20 \sin 9^\circ.$$

Bài 1.31. Tính $P = (1 - \cot 1^\circ)(1 - \cot 2^\circ) \dots (1 - \cot 44^\circ)$

Hint. Ta có

$$P = \left(1 - \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 2^\circ}{\sin 2^\circ}\right) \dots \left(1 - \frac{\cos 44^\circ}{\sin 44^\circ}\right) = \frac{(\sin 1^\circ - \cos 1^\circ)(\sin 2^\circ - \cos 2^\circ) \dots (\sin 44^\circ - \cos 44^\circ)}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ \dots \sin 44^\circ}$$

Dùng đẳng thức $\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin(a - 45^\circ)$ ta đưa về

$$\frac{\sqrt{2} \sin(1^\circ - 45^\circ) \sqrt{2} \sin(2^\circ - 45^\circ) \dots \sqrt{2} \sin(44^\circ - 45^\circ)}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ \dots \sin 44^\circ} = 2^{22}.$$

Bài 1.32. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
2. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
3. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
4. $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

Bài 1.33. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = \cos B + \cos C$ thì ABC là tam giác vuông.

Bài 1.34. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = 2 \sin B \cos C$ thì ABC là tam giác cân.

Bài 1.35. Cho tam giác ABC . Chứng minh $A = 2B \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$

Hint. Có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ nên $a^2 = b^2 + bc \Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C \Leftrightarrow \dots$

Bài 1.36. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ thì ABC là tam giác đều.

Bài 1.37. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Tìm GTNN của biểu thức $P = \tan A \tan B \tan C$.

Hint. Có $A + B = \pi - C$ nên $\tan(A + B) = \tan(\pi - C) \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$. Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương có

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3 \sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \Leftrightarrow P \geq 3 \sqrt[3]{P} \Leftrightarrow P \geq 3 \sqrt{3}$$

Bài 1.38. Cho a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng $-\sqrt{2} \leq a(c + d) + b(c - d) \leq \sqrt{2}$

Hint. Đặt $a = \sin u, b = \cos u$ và $c = \sin v, d = \cos v$ thì $S = \sin u(\sin v + \cos v) + \cos u(\sin v - \cos v) = \sin(u + v) - \cos(u + v) = \sqrt{2} \sin\left(u + v + \frac{\pi}{4}\right)$. Suy ra $-\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a(c + d) + b(c - d) \leq \sqrt{2}$.

Bài 1.39. Cho $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Hint. Cách 1. Đặt $a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$ với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ thì ta có

$$\begin{aligned} \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 &= \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)^2 + \left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)^2 \\ &= (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) \left(1 + \frac{1}{\cos^4 \alpha \sin^4 \alpha}\right) + 4 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha\right) \left(1 + \frac{16}{\sin^4 2\alpha}\right) + 4 \geq \frac{25}{2} \quad (\text{vì } \sin 2\alpha \leq 1.) \end{aligned}$$

Cách 2. Từ $a^2 + b^2 = 1$ suy ra $-1 \leq a, b \leq 1$.

Theo Cauchy có

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 \geq 2 \left(a^2 b^2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{a^2 b^2}\right) = 2 \left(a^2 b^2 + \frac{1}{16 a^2 b^2} + \frac{15}{16 a^2 b^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Lại có $1 = a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^2 b^2} \geq \frac{1}{4}$ và $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}} = 2$.

Do đó

$$2 \left(a^2 b^2 + \frac{1}{16 a^2 b^2} + \frac{15}{16 a^2 b^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \geq 2 \left(2 \sqrt{\frac{1}{16}} + \frac{15}{16} \cdot 4 + 2\right) = \frac{25}{2}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.40. [IMO1985] Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ sao cho $x + y + z = xyz$. Chứng minh

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz$$

Hint. Rõ ràng đẳng thức đúng với $xyz = 0$, nên chúng ta chỉ cần chứng minh với $x, y, z \neq 0$. Chia hai vế cho $4xyz$ ta có

$$\frac{1-y^2}{2y} \frac{1-z^2}{2z} + \frac{1-z^2}{2z} \frac{1-x^2}{2x} + \frac{1-x^2}{2x} \frac{1-y^2}{2y} = 1$$

Từ điều kiện $x + y + z = xyz$ ta nghĩ đến việc lượng giác hóa bài toán bằng cách đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$ với A, B, C là 3 góc của một tam giác, ta đưa bài toán trở thành:

$$\begin{aligned} \cot 2B \cot 2C + \cot 2C \cot 2A + \cot 2A \cot 2B &= 1 \\ \Leftrightarrow \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C &= \tan 2A \tan 2B \tan 2C \end{aligned}$$

Đây rõ ràng là đẳng thức đúng vì $\tan(2A + 2B + 2C) = \tan 2\pi = 0$. Bài toán được chứng minh.

Bài 1.41. Chứng minh rằng, với mọi số thực x, y ta có $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$

Hint. Đặt $x = \tan a, y = \tan b$ ta có $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \sin 2(a+b)$. Mà $-1 \leq \sin 2(a+b) \leq 1$ nên suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.42. [USA MO 2002]

Tìm GTLN của $S = (1-x_1)(1-y_1) + (1-x_2)(1-y_2)$ với $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2, c > 0$

Hint. Nhận thấy hai điểm có tọa độ (x_1, x_2) và (y_1, y_2) nằm trên đường tròn (O, c) nên có thể đặt $(x_1, x_2) = (c \cos \phi, c \sin \phi)$ và $(y_1, y_2) = (c \cos \psi, c \sin \psi)$. Khi đó

$$\begin{aligned} S &= 2 - c(\cos \phi + \sin \phi + \cos \psi + \sin \psi) + c^2(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ &= 2 + c\sqrt{2} \left(-\sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\psi + \frac{\pi}{4} \right) \right) + c^2 \cos(\phi - \psi) \end{aligned}$$

Do đó $S \leq 2 + 2c\sqrt{2} + c^2 = \left(c + \sqrt{2} \right)^2$. Nên GTLN của S là $\left(c + \sqrt{2} \right)^2$ đạt được khi $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Bài 1.43. Cho $x + y + z = xyz$ và $x, y, z \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Hint. Đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$ với A, B, C là 3 góc của một tam giác, bài toán trở thành

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 1.44. Cho $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Hint. Nhân hai vế với 2 được

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} \geq 3\sqrt{3}$$

Từ điều kiện $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$ ta đặt $x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}$ với A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. Bài toán trở thành

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

1.2 Phương trình lượng giác cơ bản

1.2.1 Kiến thức cơ bản

1. Phương trình $\sin x = a$

- Nếu $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|a| \leq 1$: Biến đổi phương trình thành $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}$

2. Phương trình $\cos x = a$

- Nếu $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|a| \leq 1$: Biến đổi phương trình thành $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi$

3. Phương trình $\tan x = a$: Biến đổi thành $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

4. Phương trình $\cot x = a$: Biến đổi thành $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

1.2.2 Các dạng toán và ví dụ

Ví dụ 1.1. [B2013] Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

Solution. $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin 5x = -\cos 2x \Leftrightarrow \sin 5x = \sin(2x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}$

Ví dụ 1.2. Giải các phương trình lượng giác sau

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ | 5. $\sin 3x + \cos 2x = 0$ | 9. $\cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0$ |
| 2. $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 6. $\tan 4x \cot 2x = 1$ | 10. $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 3. $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ | 7. $2\cos(x - \frac{\pi}{6}) + 1 = 0$ | 11. $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ |
| 4. $\sin 3x - \cos 2x = 0$ | 8. $\tan(2x + \frac{\pi}{3}) + \tan 3x = 0$ | 12. $\cos x = \pi$ |

Solution.

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ | 5. Bạn đọc tự làm. | 9. $\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ |
| 2. $\pm \frac{3\pi}{8} + k\pi$ | 6. $k\frac{\pi}{2}$ | 10. $\pm \frac{\pi}{8} + k\pi$ |
| 3. $\frac{7\pi}{12} + k\pi$ | 7. $\frac{5\pi}{6} + k2\pi, -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ | 11. $-\frac{\pi}{3} + k4\pi, \pi + k4\pi$ |
| 4. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$ | 8. $-\frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}$ | 12. $\emptyset$ |

Ví dụ 1.3. Giải phương trình $\sin(\pi \cos x) = 1$

Solution. Ta có $\sin(\pi \cos x) = 1 \Leftrightarrow \pi \cos x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} + 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Mà luôn có $|\cos x| \leq 1$ nên $\left| \frac{1}{2} + 2k \right| \leq 1$.
 Kết hợp với $k \in \mathbb{Z}$, suy ra $k = 0$. Do đó, $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1.4. [SPHN2 2000] Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})\right) = 1$

Solution. Giả sử x là số nguyên thỏa mãn phương trình, khi đó có:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}) &= k2\pi \\ \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 160x + 800} &= 3x - 16k \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 16k \geq 0 \\ x = \frac{8k^2 - 25}{3k + 5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 16k \geq 0 \\ 9x = 24k - 40 - \frac{25}{3k + 5} \end{cases} \Rightarrow 3k + 5 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Từ đó tìm được $k = -2, x = -7$ hoặc $k = -10, x = -31$.

Ví dụ 1.5. Giải phương trình $\tan x = \tan 3x$

Solution. Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow x = 3x + k\pi \Leftrightarrow x = -k\frac{\pi}{2}$$

Kết hợp điều kiện được đáp số $x = k\pi$.

Lưu ý 1.1. Phương trình $\tan A = \tan B$ xác định khi A hoặc B xác định.

1.2.3 Bài tập

Bài 1.45. Giải các phương trình lượng giác sau

- | | | |
|-----------------------------------|---|---|
| 1. $\sin 4x = \frac{4}{3}$ | 4. $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 7. $\tan(2x + 20^\circ) + \sqrt{3} = 1$ |
| 2. $\cos x = \frac{1}{4}$ | 5. $\cos(\pi - x) = -1$ | 8. $\tan(2x + 1) - \tan(3x - 1) = 1$ |
| 3. $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 6. $\tan(45^\circ - 3x) = -\sqrt{3}$ | 9. $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ |

Bài 1.46. Giải các phương trình lượng giác sau

- | | |
|---|---|
| 1. $\cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 2x$ | 8. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ |
| 2. $\sin(\frac{\pi}{3} - x) - \sin(3x + \frac{\pi}{6}) = 0$ | 9. $\sin^2(5x + \frac{2\pi}{3}) = \cos^2(3x - \frac{\pi}{4})$ |
| 3. $\sin(30^\circ - x) = \cos 2x$ | 10. $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos x$ |
| 4. $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \sin 5x = 0$ | 11. $\cos x = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$ |
| 5. $3 - 4\sin^2 2x = 0$ | 12. $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$ |
| 6. $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 0$ | 13. $4\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ |
| 7. $(3 - \sin x)(1 - 2\sin x) = 0$ | |

Bài 1.47. Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

- | | |
|--|---|
| 1. $\sin 2x = 0$ trên $[0, 2\pi]$ | 3. $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi)$ |
| 2. $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ trên $[-\pi, 3\pi]$ | 4. $\cot(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$ trên $(0, 5\pi)$ |

Bài 1.48. Tìm $x \in (0; 3\pi)$ sao cho: $\sin(x - \frac{\pi}{3}) + 2\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0$.

Hint. Biến đổi $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}) = -\sin(x - \frac{\pi}{3})$. Suy ra $x = \frac{\pi}{3} - k\pi$. Mà $x \in (0; 3\pi)$ nên $k \in \{-2, -1, 0\}$.

Bài 1.49. Giải phương trình $4x^3 - \sqrt{1 - x^2} - 3x = 0$.

Hint. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$ nên đặt $x = \cos t$ với $t \in [0, \pi]$ được phương trình $\cos 3t = \sin t$. Đáp số $x = \cos \frac{\pi}{8}, x = \cos \frac{5\pi}{8}$.

Bài 1.50. Giải phương trình $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$

Hint. Điều kiện $x \geq -2$. Có nhận xét: Nếu $x > 2$ thì $x^3 - 3x > 4x - 3x = x > \sqrt{x+2}$ nên $x \leq 2$. Vậy $-2 \leq x \leq 2$ do đó đặt $x = 2\cos\alpha$ với $\alpha \in [0, \pi]$. Phương trình trở thành

$$2\cos 3\alpha = \sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$$

Giải phương trình này tìm được $\alpha = 0, \frac{4\pi}{7}, \frac{4\pi}{5}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2, x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = 2\cos\frac{4\pi}{7}$.

Bài 1.51. [VMO 1984] Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{(1+x^3)} - \sqrt{(1-x)^3}) = 2 + \sqrt{1-x^2}$

Hint. Điều kiện $x \in [-1, 1]$ nên đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0, \pi]$ được phương trình

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\left(\sqrt{(1+\cos\alpha)^3} - \sqrt{(1-\cos\alpha)^3}\right) = 2 + \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{1+\sin\alpha}\left(\sqrt{8\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^3} - \sqrt{8\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^3}\right) = 2 + \sin\alpha \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = 2 + \sin\alpha \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2}\cos\alpha(2 + \sin\alpha) = 2 + \sin\alpha \\ \Leftrightarrow & \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.3 Phương trình lượng giác thường gặp

1.3.1 Phương trình đa thức đối với một hàm số lượng giác

Dạng $f(t) = 0$ trong đó t là một hàm số lượng giác, chú ý điều kiện cho ẩn phụ nếu có (ví dụ $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$ thì cần điều kiện $|t| \leq 1$)

Ví dụ 1.6. Giải phương trình $2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

Solution. Ta có $2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(\cos x - 1)(\cos x + \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{3}{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi.$

Ví dụ 1.7. Giải các phương trình lượng giác sau

1. $2\cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

5. $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 2$

2. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$

6. $\tan x + 4\cot x + 5 = 0$

3. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$

7. $\frac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2\tan^2 x$

4. $2\cos 3x \cos x - 4\sin^2 2x = 0$

8. $\cos^2 x - 2\cos x + \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 1$

Solution.

$$1. x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$$

$$2. x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$3. x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$4. x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{6} + k\pi$$

$$5. x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{5\pi}{4} + k\pi$$

$$6. x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-4) + k\pi$$

$$7. x = k\pi$$

$$8. x = \pm \arccos \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + k2\pi$$

Ví dụ 1.8. Giải các phương trình sau:

$$1. 4\sin^3 x - 8\sin^2 x + \sin x + 3 = 0$$

$$3. (\text{Luật 2000}) 4(\sin 3x - \cos 2x) = 5(\sin x - 1)$$

$$2. (\text{CĐSPHN05}) 4\cos^3 x - 2\cos x - 1 = \cos 2x$$

$$4. \sin 2x + 2\tan x = 3$$

Solution.

$$1. \frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

$$3. \frac{\pi}{2} + k2\pi, \arcsin(-\frac{1}{4}) + k2\pi, \pi - \arcsin(-\frac{1}{4}) + k2\pi$$

$$2. \frac{\pi}{2} + k\pi, k2\pi, \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$4. \text{Sử dụng } \sin 2x \text{ theo } \tan x. \text{ Đáp số } x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Ví dụ 1.9. [NNHN 2000] Giải phương trình $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$

Solution. Điều kiện $\cos x \neq 0$. Đặt $t = \cos x$ ta được phương trình

$$4t^3 - 8t^2 + 5t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Ví dụ 1.10. Giải các phương trình sau:

$$1. \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$$

$$5. \cos 2(x + \frac{\pi}{3}) + 4\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{5}{2}$$

$$2. 1 - \cos(\pi + x) - \sin(\frac{3\pi + x}{2}) = 0$$

$$6. \cos^2(3x + \frac{\pi}{2}) - \cos^2 3x - 3\cos(\frac{\pi}{2} - 3x) + 2 = 0$$

$$3. \frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$$

$$7. \sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 2x$$

$$4. \cot(\frac{3\pi}{2} + x) - \tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$$

$$8. 8\cos^3(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 3x$$

Solution.

$$1. -2(\sin x - \sqrt{2})(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$2. 1 + \cos x + \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, \pm \frac{4\pi}{3} + k4\pi$$

$$3. \text{Đưa về phương trình bậc hai theo } \cos 2x. \text{ Đáp số } \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (loại)}$$

$$4. \text{Đưa về phương trình theo } \tan x. \text{ Đáp số } k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$5. 1 - 2\sin^2(x + \frac{\pi}{3}) + 4\sin(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) = \frac{5}{2}. \text{ Đáp số } -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

$$6. \text{Đưa về phương trình bậc hai theo } \sin 3x. \text{ Đáp số } \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}.$$

$$7. \text{Đưa về phương trình trùng phương theo } \sin 2x. \text{ Đáp số } \pm \frac{\pi}{8} + k\pi, \pm \frac{3\pi}{8} + k\pi.$$

$$8. 8\cos^3(x + \frac{\pi}{3}) = -\cos(3x + \pi) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi, \pm \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi.$$

1.3.2 Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

- **Dạng:** $a \sin x + b \cos x = c$, ($a^2 + b^2 \neq 0$)
- **Cách giải:** Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Đặt $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ đưa về phương trình $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

- **Chú ý:** Phương trình có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$

Ví dụ 1.11. Giải các phương trình sau:

- $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$
- $\sin x + \cos x = 1$
- $3 \sin x + 4 \cos x = 5$
- $\sin x + 2 \cos x = 3$
- (CĐ08) $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$
- $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$
- $3 \cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$
- $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$
- $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$
- $\sin x(1 - \sin x) = \cos x(\cos x - 1)$
- $(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 - 5 = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$
- $\cos^4 x + \sin^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$
- $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$
- $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$

Solution.

- Bạn đọc tự làm.
- Bạn đọc tự làm.
- Bạn đọc tự làm.
- Phương trình vô nghiệm.
- Đưa về $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin 2x$. Đáp số $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}$.
- Đáp số $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.
- Hạ bậc, đưa về $2 \cos 2x - \sin 2x = -1$.
- Bạn đọc tự làm.
- Biến đổi thành $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 1$
- Nhân vào được $\sin x + \cos x = 1$. Đáp số $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
- Đưa về phương trình bậc hai của $\cos(2x - \frac{\pi}{6})$. Đáp số $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$.
- Hạ bậc, đưa về phương trình $\sin 2x + \cos 2x = -1$. Đáp số $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Qui đồng được $3 \cos x - 4 \cos x \cos 2x = \sqrt{3} \sin x$. Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng được phương trình $2 \cos 3x = \cos x - \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(x - \frac{\pi}{3})$. Đáp số $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.
- Hạ bậc, đưa về phương trình $\cos(4x - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3}$. Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

1.3.3 Phương trình thuần nhất (đẳng cấp) đối với $\sin x$ và $\cos x$

- **Dạng:** $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$
- **Cách giải:** Ta xét hai trường hợp.
 - ✓ Nếu $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$. Ta thay vào phương trình xem có thỏa mãn không?
 - ✓ Nếu $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ đưa về phương trình bậc hai đối với $\tan x$.
- **Chú ý:**
 - ✓ Có thể hạ bậc để đưa về phương trình bậc nhất với $\sin 2x$ và $\cos 2x$.
 - ✓ Phương trình $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ cũng giải tương tự bằng cách xét hai trường hợp, khi đó sử dụng $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
 - ✓ Phương trình đẳng cấp bậc ba, cách giải tương tự.

Ví dụ 1.12. Giải các phương trình sau:

- $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x - 3 = 0$
- $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$
- $4\sqrt{3} \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + \frac{5}{2}$
- $\cos^2 x + \frac{3}{2} \sin 2x + 1 = 0$
- (An Ninh 98) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$
- $3 \sin^2(3\pi - x) + 2 \sin(\frac{5\pi}{2} + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) - 5 \sin^2(\frac{3\pi}{2} + x) = 0$

Solution.

- $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$
- $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(\frac{1}{2}) + k\pi.$
- $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \arctan(\frac{-\sqrt{3}}{9}) + k\pi.$
- $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-2) + k\pi.$
- $x = k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$
- $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 5 \sin^2 x = 0$. Đáp số $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan \frac{5}{3} + k\pi.$

Ví dụ 1.13. [Đại học Y Dược Thành phố Hồ Chí Minh 1997] Giải phương trình: $\sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x$

Solution. Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 4 \sin^3 x - 3 \sin x - 2 \sin^2 x \cos x + 6 \cos^3 x = 0$$

Tìm được $\tan x = 2, \tan x = \pm \sqrt{3}$.

Ví dụ 1.14. [TS Nha Trang 2000] Cho phương trình $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - m = 0$

- Giải phương trình khi $m = 1$.
- Giải và biện luận theo m .

Solution.

- Khi $m = 1$, đáp số $x = k\pi, x = \arctan(-\frac{1}{3}) + k\pi.$

2. Ta xét hai trường hợp

- Nếu $\cos^2 x = 0$ thì PT $\Leftrightarrow 2\sin^2 x = m$. Do đó, phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$.
 Khi đó nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Nếu $\cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$ thì ta chia hai vế của phương trình đã cho cho $\cos^2 x$ được

$$1 - \tan x - 2\tan^2 x - m(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)\tan^2 x + \tan x + m - 1 = 0$$

là phương trình bậc hai có $\Delta = -4m^2 - 4m + 9$. Từ đó có kết luận: Khi $m \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{10}}{2}, +\infty) \setminus \{-2\}$ thì phương trình vô nghiệm và có nghiệm trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 1.15. Giải các phương trình sau:

- (NT96) $\cos^3 x - 3\sin^3 x + \sin x \cos^2 x = 3\cos x \sin^2 x$
- (LHN96) $4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x = \sin^2 x \cos x$
- (YHN99) $\sin x + \cos x - 4\sin^3 x = 0$
- (QGHN96) $1 + 3\sin 2x = 2\tan x$
- (QGHN98) $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$
- $2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

Solution.

- Chia hai vế cho $\cos^3 x$ được phương trình $-3\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x + 1 = 0$. Đáp số $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.
- Chia hai vế cho $\cos^3 x$ được phương trình $(\tan x - 1)(\tan^2 x - 3) = 0$. Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.
- Chia hai vế cho $\cos^3 x$, được phương trình $(\tan x - 1)(3\tan^2 x + 2\tan x + 1) = 0$. Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
- Điều kiện $\cos x \neq 0$. Chia hai vế cho $\cos^2 x$, được phương trình

$$(\tan x + 1)(2\tan^2 x - 3\tan x - 1) = 0$$

$$\text{Đáp số } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} + k\pi.$$

- Biến đổi thành $(\cos x - \sqrt{3}\sin x)^3 - 3\cos x + 4\cos^3 x = 0$. Chia hai vế cho $\cos^3 x$ được phương trình

$$3\sqrt{3}\tan^3 x - 12\tan^2 x + 3\sqrt{3}\tan x = 0$$

$$\text{Đáp số } x = k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

- Điều kiện $\sin x \cos x \neq 0$. Qui đồng rồi chia hai vế cho $\cos^3 x$ được phương trình

$$\sqrt{3}\tan x - \tan^2 x - \sqrt{3}\tan x + 1 = 0$$

$$\text{Đáp số } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

1.3.4 Phương trình đối xứng

- **Dạng:** Khi thay $\sin x$ bởi $\cos x$ và $\cos x$ bởi $\sin x$ thì phương trình không thay đổi.
- **Cách giải:** Đặt $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin(x \pm \frac{\pi}{4})$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$ thì $\sin x \cos x = \pm \frac{t^2 - 1}{2}$ đưa về phương trình đa thức đối với t .

Ví dụ 1.16. Đánh giá lời giải sau:

Giải phương trình: $\cos x - \sin x + \sin x \cos x = 1$.

Đặt $t = \cos x - \sin x$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, thì $\sin 2x = 1 - t^2$. Phương trình trở thành $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Do đó $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$.

Solution. Sai vì ở bước $t = \cos x - \sin x$ ta bình phương để suy ra $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$ là phép biến đổi hệ quả!

Lưu ý 1.2. Tìm được t , ta thay vào $t = \sqrt{2} \sin(x \pm \frac{\pi}{4})$, không được thay vào $\sin x \cos x = \pm \frac{t^2 - 1}{2}$.

Ví dụ 1.17. Giải các phương trình sau:

1. $\sin x + \cos x - 2 \sin x \cos x - 1 = 0$

4. $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $(1 - \sin x \cos x)(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\sin x - \cos x + 7 \sin 2x = 1$

3. $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$

6. $(1 + \sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cos x = 1 + \sqrt{2}$.

7. (NNHN2000) $\sin 2x + \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$.

Solution.

1. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, được phương trình $t - t^2 = 0$. Đáp số $x = \dots$

2. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, được phương trình

$$t^3 - 3t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}t - 1) = 0.$$

Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + k2\pi, x = \frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + k2\pi$.

3. Điều kiện $\sin x \cos x \neq 0$. Qui đồng, đặt $t = \dots$ Đáp số $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{2 - \sqrt{19}}{3\sqrt{2}} + k2\pi$.

4. Đưa về phương trình $t^3 + 3t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow -(t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}t - 1) = 0$.

Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + k2\pi, x = \frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + k2\pi$.

5. Đưa về PT $-7t^2 + t + 6 = 0$. Đáp số $x = -\pi + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos(\frac{3\sqrt{2}}{7}) + k2\pi$.

6. Đưa về phương trình $t^2 - (1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0$. Đáp số $x = -\pi + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

7. Đưa về phương trình $-t^2 + t = 0$. Đáp số $x = \pi_k 2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Ví dụ 1.18. [Vô địch New York 1973] Giải phương trình $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{97}{128}$

Solution. Hạ bậc, đưa về phương trình

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1)^4 + (\cos 2x - 1)^4 = \frac{97}{8}$$

Đặt $t = \cos 2x$. Đáp số $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$

Ví dụ 1.19. Giải các phương trình:

1. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$

2. $3(\tan x + \cot x) = 2(2 + \sin 2x)$

Solution.1. Điều kiện $\sin x \cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(\sin x + \cos x) &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) &= \frac{2}{\sin 2x}\end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, được phương trình

$$t^3 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}t + 1) = 0.$$

Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

2. Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

1.3.5 Bài tập**Bài 1.52.** Giải các phương trình sau:

1. $2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

9. $2\sin^2 x - 2\cos^2 x - 4\sin x = -2$

2. $2\sin(2x + 50^\circ) = -1$

10. $3\cos 2x + 4\cos^3 x - \cos 3x = 0$

3. $-\frac{2}{\cos x} = \tan x + \cot x$

11. $\sin 2x \sin 6x = \sin 3x \sin 5x$

4. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$

12. $\sin 5x \sin 3x = \sin 9x \sin 7x$

5. $6\sin^2 3x + \cos 12x = 14$

13. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x$

6. $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$

14. $\sin^2 2x + \sin^2 4x = \sin^2 6x$

7. $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

15. $\cos 2x - \cos x = 2\sin^2 \frac{3x}{2}$

8. $7\tan x - 4\cot x = 12$

Bài 1.53. Giải các phương trình sau:

1. $4\sin x - 3\cos x = 5$

4. $2\sin^2 2x + \sqrt{3}\sin 4x = 3$

2. $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

5. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos(\frac{\pi}{3} - x)$

3. $2\sin 2x + 3\cos 2x = \sqrt{13}\sin 4x$

6. $\cos(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

Bài 1.54. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^2 x - 10\sin x \cos x + 21\cos^2 x = 0$

6. $\frac{1}{\sin x} = 4\cos x + 6\sin x$

2. $2\sin^2 2x - 3\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 2$

7. $3\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x$

3. $\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$

8. $2\cos^3 x + 3\cos x - 8\sin^3 x = 0$

4. $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$

9. $\cos^3 x - \sin^3 x - 3\cos x \sin^2 x + \sin x = 0$

5. $4\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 2\sin^2 x = \frac{5}{2}$

10. $2\sin^2(x - \frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + 2\cos^2(2x + \frac{3\pi}{2}) = 1$

Bài 1.55. Giải các phương trình sau:

1. $(\sin x + \cos x)^4 - 3 \sin 2x - 1 = 0$

2. $3(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 3 = 0$

3. $2(\sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x) + \cos 2x = -3$

4. $2 \sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) = -8$

5. $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) - 4 = 0$

6. $\sin 2x + 2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$

7. $\frac{3}{\sin x + \cos x} = \sin x \cos x$

8. $2(\sin^3 x + \cos^3 x) + \sin 2x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$

9. $(\sin 2x + \cos 2x)(\sin^3 2x + \cos^3 2x) = 1$

10. $\sin x + \cos x + 2 + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 0$

11. $3(\tan x + \cot x) - 2(\tan^2 x + \cot^2 x) - 2 = 0$

12. $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6$

Bài 1.56. Cho phương trình $\cos^3 x - \sin^3 x = m$. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Hint. Đưa về khảo sát hàm số bậc ba.

1.4 Phương trình lượng giác khác

1.4.1 Kiến thức cơ bản

- **Các phương pháp** chính để giải phương trình lượng giác:
 - ✓ Phân tích thành nhân tử gồm các *phương trình lượng giác thường gặp*.
 - ✓ Đặt ẩn phụ.
 - ✓ Đánh giá.
- **Lưu ý**
 - ✓ Ưu tiên đưa về cùng một cung (góc) trước khi đưa về cùng một hàm.
 - ✓ Thường biến đổi tổng - tích nếu có thể.
 - ✓ Có lũy thừa bậc chẵn thì sử dụng $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 - ✓ Có $\sin x, \cos x, \tan x$ thì thay $\tan x = \sin x / \cos x, \cot x = \cos x / \sin x$

1.4.2 Các dạng toán và ví dụ

1. Phương pháp phân tích thành nhân tử

Một số biến đổi hay sử dụng:

- $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2, \cos 2x = (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x), 1 + \tan x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}, 1 + \cot x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ có nhân tử chung là $\sin x + \cos x$.
- $1 - \sin 2x, \cos 2x, 1 - \tan x, 1 - \cot x$ có nhân tử chung là $\cos x - \sin x$.
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ nên có nhân tử chung $1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$.
- $\cos^2 x, \cot^2 x$ có nhân tử chung là $1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$.

Ví dụ 1.20. Giải các phương trình

1. $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

4. $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$

2. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$

5. $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x$

3. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

6. $\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = -1$

7. $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$
8. $(\cos x - \sin x)\sin x \cos x = \cos x \cos 2x$
9. $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 x + \cos^2 4x$
10. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$
11. $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0$
12. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$
13. $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$
14. $\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x = 0$

Solution.

1. Nhóm thành $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x - \sin x) = 0$
2. $(\cos x + \cos 4x) + (\cos 3x + \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0$. Đáp số $\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}, \pi + k2\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi$.
3. Đưa về phương trình bậc ba: $\cos x(-2 + 2\cos x + 2\cos^2 x) = 0$. Đáp số $\frac{\pi}{2} + k\pi, \pm \arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + k2\pi$.
4. $3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x + 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x + \cos x) = 0$. Đáp số $k\pi, \pi + k2\pi, -\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$.
5. $\sin x \cdot 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1 - \cos x = 0$. Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k2\pi$.
6. $(\sin x + \cos x) + (1 + \sin 2x) + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$. Đáp số $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.
7. Nhân ra và nhóm $2\sin^2 x(2\cos x - 1) - \sin x(2\cos x - 1) = 0$. Đáp số $k\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
8. $\cos x(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x - \sin x) = 0$. Đáp số $\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$.
9. Hạ bậc, nhóm thành $(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$. Đáp số $\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$.
10. $\sin 2x + 2\sin 2x \cos x = \cos 2x + 2\cos 2x \cos x \Leftrightarrow (\sin 2x - \cos 2x)(1 + 2\cos x) = 0$.
11. $(\cos 10x - \cos 6x) - \cos 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow -4\sin 4x \cos 4x \sin 2x + 2\sin^2 4x = 0$
12. $\sin x + 2\sin x \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 1 + \cos x + 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow (2 + \cos x - 2\sin^2 x)(2\sin x - 1) = 0$.
13. Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$1 + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos^2 2x} \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x)(1 + \cos 2x) = \sin 2x$$

$$\text{Đáp số } \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

14. $\cos^2 x + \sin x(1 - \cos^2 x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos x + \sin x - \sin x \cos x) = 0$.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Khi phép phân tích thành tích không thực hiện được, ta cố gắng biểu diễn tất cả các số hạng bằng một hàm số lượng giác duy nhất, và đó sẽ là ẩn của phương trình rồi đưa về phương trình lượng giác cơ bản để giải. Có thể chọn ẩn bằng các quy tắc sau:

- Nếu phương trình không thay đổi khi ta thế:

- ✓ x bởi $-x$, chọn ẩn là $\cos x$
- ✓ x bởi $\pi - x$, chọn ẩn là $\sin x$
- ✓ x bởi $x + \pi$, chọn ẩn là $\tan x$

- Nếu cả ba cách trên đều thực hiện được, chọn ẩn là $\cos 2x$
- Nếu cả ba cách trên đều không thực hiện được, chọn ẩn là $\tan \frac{x}{2}$ và sử dụng công thức biểu diễn

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ví dụ 1.21. Giải phương trình $3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = 6$

Solution. $x = -\arctan \frac{3}{4} + k\pi, x = \alpha + l2\pi$

Ví dụ 1.22. Giải phương trình $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1 \quad (1)$

Solution. $x = k\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 1.23. Giải phương trình $2\tan 2x + 2\sin 2x = 3\cot x$

Solution. Đặt $t = \tan x$ phương trình trở thành

$$\frac{4t}{1-t^2} + \frac{4t}{1+t^2} = \frac{3}{t} \quad (\text{điều kiện } t \neq 0, t \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow 3t^4 + 8t^2 - 3 = 0$$

Ví dụ 1.24. Giải phương trình:

1. $\sin 2x + 2\tan x = 3$
2. $\sin x + \cot \frac{x}{2} = 2$
3. $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$
4. $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x$

Solution.

1. Điều kiện $\cos x \neq 0$. Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ được phương trình $2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
2. Điều kiện $\sin \frac{x}{2} \neq 0$. Xét hai khả năng:
 - Nếu $\cos \frac{x}{2} = 0 \dots$
 - Nếu $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ được phương trình $-2t^3 + 3t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
3. Đặt $t = \cos 2x$, điều kiện $|t| \leq 1$ ta được phương trình $-t^3 + 3t^2 - 2t = 0$. Đáp số $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
4. Đặt $t = \cos 2x$, điều kiện $|t| \leq 1$ ta được phương trình $1 + 3t^2 = 2(1 + t^2) \Leftrightarrow t = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$.

3. Phương pháp đánh giá

Ví dụ 1.25. Giải phương trình $3\tan^2 x + 4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 4\sin x + 2 = 0$

Solution.

$$3\tan^2 x + 4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 4\sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 1 + 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\tan x - 1)^2 + (2\sin x - 1)^2 = 0$$

Đáp số $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Ví dụ 1.26. Giải phương trình

$$x^2 - 2x\cos x - 2\sin x + 2 = 0 \quad (1.1)$$

Solution. Ta có

$$\begin{aligned}(1.1) &\Leftrightarrow x^2 - 2x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \\&\Leftrightarrow (x - \cos x)^2 + (\sin x - 1)^2 = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x - \cos x = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = x \\ \sin x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1.27. Giải phương trình

$$\sin^4 x + \cos^{15} x = 1 \quad (1.2)$$

Solution. Ta có $(1.2) \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^{15} x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^2 x - 1) = \cos^2 x(1 - \cos^{13} x)$

$$\text{Nhận xét } VT \leq 0, VP \geq 0 \text{ nên } \begin{cases} \sin^2 x(\sin^2 x - 1) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos^{13} x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

Đáp số $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

1.4.3 Bài tập

Bài 1.57. Giải các phương trình lượng giác sau

- $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$
- $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$
- $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
- $\sin^4(3x + \frac{\pi}{4}) + \sin^4(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
- $\sin^2 x(1 + \tan x) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$
- $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x \cos^3 x - \frac{1}{2}$
- $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$
- $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + 2x)\cot 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2}\cos 5x = 0$
- $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8\sin 2x}$
- $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$
- $\sin x \cos 2x + \cos^2 x(\tan^2 x - 1) + 2\sin^3 x = 0$
- $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1$
- $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$
- $3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x \cos^2 \frac{x}{2}$

Hint.

- Đưa về phương trình bậc ba...
- $2\cos x(2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4) = 0$. Đáp số $\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.
- Biến đổi $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$. Đáp số $\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi$.
- Hạ bậc, đưa về góc $6x$. Đặt $t = \sin 6x$, được phương trình $(1+t)^2 + (1-t)^2 = 2$. Đáp số $x = k\frac{\pi}{6}$.
- Chia hai vế cho $\cos^2 x$ được $t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0$. Đáp số $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.
- Biến đổi thành $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x(\cos 9x + 3\cos 3x) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = \cos 8x + \cos 10x + 3\cos 4x + 3\cos 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 10x = 1/2$

7. Đặt $t = \tan x$ được phương trình... Đáp số $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.
8. Đẳng cấp bậc ba. Đáp số $k\frac{\pi}{4}$.
9. Qui đồng, nhóm thành $\cos 5x(1 - \sqrt{2}\sin 3x) = 0$. Đáp số $\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$.
10. Đặt $t = \cos 2x$. Đáp số $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.
11. Đưa về phương trình bậc hai của $\cos 2x$. Đáp số $k\pi, \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.
12. Đưa về phương trình bậc hai của $\cos x$. Đáp số $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.
13. Phương trình đối xứng.
14. Qui đồng, biến đổi thành $(\sin x - \cos x)(1 + \sin 2x) = 0$. Đáp số $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$.
15. Hạ bậc, đưa về phương trình bậc hai của $\sin x$. Đáp số $\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Bài 1.58. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|---|---|
| 1. $\sin 2x + \sin 6x - \sin 8x = 0$ | 8. $\cos 5x + \sin 5x - 2\sin 3x + \sin x - \cos x = 0$ |
| 2. $\sin x + \sin 3x = \cos x + \cos 3x$ | 9. $\frac{3\cos 2x + 20\cos 3x \cos 2x - 10\cos 5x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0$ |
| 3. $(1 + \tan x)(1 - \sin 2x) = 1 - \tan x$ | 10. $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{8}(5 + 6\cos 7x \cos 3x)$ |
| 4. $1 + \sin x + 2\cos x + \sin 2x = 0$ | 11. $\sin 5x = \cos x \tan 3x$ |
| 5. $2\cos 2x + \sin 2x + 5 = 8\cos x + \sin x$ | 12. $\frac{1 - \sin 2x - 2\sin x + 2\cos x}{\sqrt{2}\cos x - 1} = 0$ |
| 6. $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$ | 13. $\cos 2x + \cos x(2\tan^2 x - 1) = 2$ |
| 7. $\sin^2 x - \cos^2 2x = \sin^2 3x - \cos^2 4x$ | |

1.5 Bài tập tổng hợp

Bài 1.59. Giải phương trình $(1 + \sin x)(1 - 2\sin x) + 2(1 + \sin x)\cos x = 0$

Hint. Biến đổi thành $(1 + \sin x)(1 - 2\sin x + 2\cos x) = 0$

Bài 1.60. Giải phương trình $(1 + \sin x)(1 - 2\sin x) + 2(1 + 2\sin x)\cos x = 0$

Hint. Biến đổi

$$\begin{aligned}
 &1 + \sin x - 2\sin x - 2\sin^2 x + 2\cos x + 2\sin 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin 2x = \sin x - 2\cos x \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{5}\sin(2x + \alpha) = \sqrt{5}\sin(x + \beta)
 \end{aligned}$$

Bài 1.61. Giải phương trình $\cos 5x - \sin 2x = \sin 4x - \cos 3x$

Bài 1.62. Giải phương trình $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$

Bài 1.63. Giải phương trình $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

Hint. Biến đổi thành $(\sin x - 1)(\sin x + \cos x + 2) = 0$

Bài 1.64. Giải phương trình $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

Hint. Biến đổi $(1 - 2\sin^2 2x) = \sin 7x - \sin x \Leftrightarrow \cos 4x = 2\cos 4x \sin 3x$

Bài 1.65. Giải phương trình $\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x \cdot \cos x = \cos x + 8\cos x \cos^3 3x$

Hint. Hạ bậc và nhóm $(\cos 10x + \cos 8x) + 1 = \cos x + 2\cos x(4\cos^3 3x - 3\cos 3x) \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$.

Bài 1.66. Giải phương trình $\tan x \cdot \cos 3x + 2\cos 2x - 1 = \sqrt{3}(1 - 2\sin x)(\sin 2x + \cos x)$

Hint. $\sin x(1 - 4\sin^2 x) + 1 - 4\sin^2 x = \sqrt{3}\cos x(1 - 4\sin^2 x) \Leftrightarrow (1 - 4\sin^2 x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1) = 0$

Bài 1.67. Giải phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{7}{8}\tan(x + \frac{\pi}{6})\tan(x - \frac{\pi}{3}) = 0$

Hint. PT $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \frac{7}{8}\tan(x + \frac{\pi}{6})\cot(x + \frac{\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

Bài 1.68. Giải phương trình $2(\cot x - \cos x) - 3(\tan x - \sin x) = 1$

Hint. Tách và nhóm thành $2(\cot x - \cos x + 1) - 3(\tan x - \sin x + 1) = 0$ sau đó qui đồng...

Bài 1.69. Giải phương trình $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x - 1 = 0$

Hint. Biến đổi $\sin x + \cos x = \sin 2x + 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$

Bài 1.70. Giải phương trình $\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x + \sin x = 0$

Hint. $\cos^3 x - \sin^2 x \cos x + \sin x - 2\sin^2 x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x(\cos x - \sin x)^2 = 0$

Bài 1.71. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2\sin(x + \frac{\pi}{2})$

Hint. $\frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin x} + \frac{2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = 2\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}\sin x} + \frac{2\sin x}{\sin x + \cos x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x - 2\sqrt{2}\sin x \cos x + \cos x = 0 \end{cases}$

Bài 1.72. Giải phương trình $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

Hint. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 4x}{\sin x \cos x} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x$

Bài 1.73. Giải phương trình $\frac{3(\cos 2x + \cot 2x)}{\cot 2x - \cos 2x} = 4\sin(\frac{\pi}{4} + x)\cos(\frac{\pi}{4} - x)$

Hint. $\frac{3(\cos 2x + \cot 2x)}{\cot 2x - \cos 2x} = 2\sin 2x + 2 \Leftrightarrow \frac{3(\sin 2x + 1)}{1 - \sin 2x} = 2(\sin 2x + 1)$

Bài 1.74. Giải phương trình $\tan^2 x \tan^2 3x \tan 4x = \tan^2 x - \tan^2 3x + \tan 4x$

Hint. Ta có $\tan^2 x - \tan^2 3x + \tan 4x(1 - \tan x \tan 3x)(1 + \tan x \tan 3x) = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan^2 3x + \frac{\tan^2 3x - \tan^2 x}{\tan 2x} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x - \tan^2 3x = 0 \\ \tan 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan 3x \\ \tan x = \tan(-3x) \\ \tan 2x = 1 \end{cases}$$

Bài 1.75. Giải các phương trình

1. $\frac{1}{4} + \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2}\sin^2 \frac{x}{2}$

2. $\cos^2 x = \cos \frac{4x}{3}$

3. $32\cos^6(x + \frac{\pi}{4}) - \sin 6x = 1$

Hint.

1. Đặt $t = \frac{x}{3}$.

2. Đặt $t = \frac{2x}{3}$

3. Đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$

Bài 1.76. Giải phương trình $\sin(2x + \frac{17\pi}{2}) + 16 = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 20\sin^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$

Hint. Biến đổi thành $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 5\cos(x + \frac{\pi}{6}) + 3 = 0$ sau đó áp dụng công thức nhân đôi.

Bài 1.77. Giải phương trình $(1 + \tan x) \cos 5x - \sin x - \cos x - 2 \cos 4x + 2 \cos 2x = 0$

Hint. Biến đổi thành $(\cos 5x - \cos x)(\sin x + \cos x) = -2 \cos x (\cos 4x - \cos x) \Leftrightarrow -2 \sin 3x \sin 2x (\sin x + \cos x) = 2 \cos x (-2 \sin 3x \sin x)$

Bài 1.78. Giải phương trình $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 5x} = \frac{2}{\cot x - 3}$

Hint. Biến đổi $(\sin x + \cos x)(\cos x - 3 \sin x) = 2 \sin x \cos 5x \Leftrightarrow \cos 2x - 2 \sin^2 x = \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x \Leftrightarrow 2 \cos 2x - 1 = \sin 4x(2 \cos 2x - 1)$

Bài 1.79. Giải phương trình $(4 \cos^2(x + \frac{\pi}{12}) - 1) \sin 2x = 2(\sin 7x - \sin 3x) \cos(5x - \frac{\pi}{3})$

Hint. $(2 \cos(2x + \frac{\pi}{6}) + 1) \sin 2x = 4 \cos 5x \sin 2x \cos(5x - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin 2x(\dots) = 2 \sin 2x (\cos(10x - \frac{\pi}{3}) + \cos \frac{\pi}{3})$ **Bài 1.80.** Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$

12. $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$

2. $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$

13. $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^2 x)$

3. $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$

14. $(1 + 2 \sin^2 x) \cos x = 1 + \sin x + \cos x$

4. $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$

15. $\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

5. $(1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$

16. $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

6. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

17. $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos(x - \frac{\pi}{4}) \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \frac{3}{2} = 0$

7. $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

18. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

8. $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$

19. $(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

9. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

20. $2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$

10. $\cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4$

21. $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$

11. $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

22. $(1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$

Key. Đáp số.

1. $x = \frac{k\pi}{2}$

7. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

2. $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

8. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

3. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi; k2\pi$

9. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

4. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}$

10. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi$

5. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi$

11. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$

6. $x = \frac{k\pi}{9}; \frac{k\pi}{2}$

12. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3} + k\pi$

13. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}$

18. $x = k\pi; \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

14. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi$

19. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

15. $x = \pi + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi$

20. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi$

16. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi$

21. $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

17. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

22. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Bài 1.81. [Học Viện Ngân Hàng] $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$ **Key.** $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ **Bài 1.82.** [ĐH Mở Địa Chất] $\tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$ **Hint.** Chia hai vế cho $\sin^2 x$ **Key.** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi$ **Bài 1.83.** Giải phương trình: $\sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0$.**Hint.** Biến đổi thành

$$\begin{aligned} & \sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\sin x \cos^2 x + 6\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 6\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sqrt{3} + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(-2\cos^2 x - 6\cos x + 8) = 0 \end{aligned}$$

Bài 1.84. Giải phương trình $\frac{\sin 3x - 4\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3}{\sin 3x - 1} = 0$ **Hint.** Điều kiện $\sin 3x \neq 1$. Biến đổi $\cos(3x - \frac{\pi}{2}) - 4\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3(x - \frac{\pi}{6}) - 7\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3 = 0$ **Bài 1.85.** Giải phương trình $2(1 + \cos x)(\cot^2 x + 1) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + \sin x}$ **Hint.** $2(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = (\sin x - 1)\sin^2 x \Leftrightarrow 2(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = (\sin x - 1)(1 - \cos x)(1 + \cos x)$ **Bài 1.86.** Giải phương trình $\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x + \sin x = 0$ **Hint.** Phương trình đẳng cấp bậc ba.**Bài 1.87.** Giải phương trình $\cos x = 8\sin^3(x + \frac{\pi}{6})$ **Hint.** Biến đổi thành $\cos x = (\sqrt{3}\sin x + \cos x)^3$ là phương trình đẳng cấp bậc ba.**Bài 1.88.** Giải phương trình $\sin^4 x + \frac{1}{2}\cos^4 x = \frac{1}{3}$ **Hint.** $\sin^4 x + \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{6} = 0$ **Bài 1.89.** Giải phương trình $4\sin 3x \cos 2x = 1 + 6\sin x - 8\sin^3 x$ **Hint.** Nhận xét $\cos x = 0$ không là nghiệm nên nhân hai vế của phương trình với $\cos x$ được

$$2\sin 3x(4\cos^2 - 3)\cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

Đáp số $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}$ và $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}$.

Bài 1.90. Giải phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$

Hint. Nhận xét $VT \leq \sqrt{2} \leq VP$. Phương trình vô nghiệm.

Bài 1.91. Giải phương trình $4\cos x + 2\cos 2x + \cos 4x = -7$

Hint. Phương trình tương đương với $4(\cos x + 1) + 2(\cos 2x + 2) + (\cos 4x + 1) = 0$. Đánh giá, phương trình vô nghiệm.

Bài 1.92. Giải phương trình $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

Hint. Biến đổi thành $(2\cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$.

Bài 1.93. Giải phương trình $\sin^2 x \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{17}{4}$

Hint. Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ta có

$$\sin^2 x \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \left(\sin^2 x \cos^2 x + \frac{1}{16 \sin^2 x \cos^2 x} \right) + \frac{15}{16 \sin^2 x \cos^2 x} \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{16 \sin^2 x \cos^2 x} \\ \sin^2 x = \cos^2 x \end{cases}$$

Bài 1.94. Giải phương trình $\cos 3x + 2\sin x - 1 = 0$

Hint. $\cos x(1 - 4\sin^2 x) - (1 - 2\sin x) = 0$.

Bài 1.95. Giải phương trình $\cot x + \sin x = \frac{\cos x}{1 - \cos x} + \frac{1}{\sin x}$

Hint. Ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{1 - \cos x} \right) + \left(\sin x - \frac{1}{\sin x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1 - \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} - \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x (\sin x(1 - \cos x) - (1 + \cos x)) = 0 \end{aligned}$$

Đáp số $\pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Bài 1.96. Giải phương trình $\sin 3x + \sin 2x + \sin x + 1 = \cos 3x + \cos 2x - \cos x$

Hint. $(\sin 3x + \sin x) + (1 + \sin 2x) - (\cos 3x - \cos x) = \cos 2x \Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$.

Đáp số: $\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k2\pi, \pi + k2\pi, \frac{-\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Bài 1.97. Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 3 \tan 2x + \sin 4x}{\tan 2x - \sin 2x} = 2$

Hint. $2\sin 2x \cos 2x + 3\sin 2x + \tan 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1) = 0$. Đáp số: $\pm \frac{\pi}{3}$

Bài 1.98. Giải phương trình $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$

Hint. $\sin 2x + 2\cos^2 x - 1 - (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$. Đáp số: $k2\pi, \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$

Bài 1.99. Một số đề thi của BDG.

1. (CD08) $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$

2. (CĐ09) $(1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$
3. (CĐ10) $4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$
4. (CĐ11) $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$
5. (A02) Tìm nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ của PT: $5(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x}) = \cos 2x + 3$
6. (A03) $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$
7. (A05) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$
8. (A06) $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x}$
9. (A07) $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 - \sin 2x$
10. (A08) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x + \frac{3\pi}{2})} = 4 \sin(\frac{7\pi}{4} - x)$
11. (A09) $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$
12. (A10) $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin(x + \frac{\pi}{4})}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$
13. (A11) $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$
14. (A12) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$
15. (A13) $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$
16. (A14) $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$
17. (B02) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$
18. (B03) $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$
19. (B04) $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$
20. (B05) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$
21. (B06) $\cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4$
22. (B07) $2 \sin^2 x + \sin 7x - 1 = \sin x$
23. (B08) $\sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x = \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x$
24. (B09) $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$
25. (B10) $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x$
26. (B11) $\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$
27. (B12) $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$
28. (B13) $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$
29. (B14) $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$
30. (D02) Tìm x thuộc $[0; 14]$ thỏa mãn PT: $\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0$

$$31. (D03) \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$32. (D04) (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

$$33. (D05) \cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$$

$$34. (D06) \cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$$

$$35. (D07) \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$36. (D08) 2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$$

$$37. (D09) \sqrt{3} \cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$$

$$38. (D10) \sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$39. (D11) \frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$$

$$40. (D12) \sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$41. (D13) \sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$$

Bài 1.100. Giải phương trình $2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 + \sqrt{1 - x^2}$

Hint. Đặt $x = \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ được phương trình

$$2\sin t + (4\sin^2 t - 1) \cdot \cos t = 4\sin^3 t + \cos t \Leftrightarrow (\sin 2t - 1)(\sin t + \cos t) = 0$$