

Bài toán:

Cho p đồng tiền trong đó chỉ có một đồng tiền giả có trọng lượng khác (nhẹ hoặc nặng hơn) với các đồng tiền thật có cùng trọng lượng.

Nếu $(3^{n-1} - 3)/2 < p \leq (3^n - 3)/2$, thế thì tồn tại n lần cân ta xác định được đồng tiền giả và chỉ ra nó giả nhẹ hoặc giả nặng so với các đồng tiền thật còn lại. (p nguyên ≥ 3 , n nguyên ≥ 2)

Điều này đã được chứng minh (CM) và mạnh hơn nữa đó là số lần cân “tốt nhất”. Có tài liệu tiếng Việt nói rằng (nhưng không đưa ra CM hay thuật toán) có thể sử dụng cơ số 3 và có cách cân mà lần cân sau không phụ thuộc và kết quả của lần cân trước.

Trong phần này sẽ “diễn nôm” cho dễ hiểu, có lẽ không giống các CM của những nhà toán học chuyên nghiệp ! Bài này viết khoảng năm 1985, chưa được người khác kiểm chứng.

Ta cần nêu một số bổ đề và hệ quả từ các bổ đề đó. Việc CM chủ yếu là qui nạp.

Để cho đơn giản ký hiệu, diễn tả trong CM và có một vài tính chất đơn giản:

- Đồng tiền sẽ gọi tắt là đồng. Đồng giả là nhẹ hay nặng ta gọi tương ứng là giả nhẹ hay giả nặng. Trong bài này chỉ giả sử có 1 đồng giả.

- Nhóm A là nhóm có chứa các đồng. Đôi khi gọi tắt là A nếu không có nhầm lẫn. Nếu có đồng giả nhẹ (hay nặng) trong A, ta gọi A giả nhẹ (hay nặng). $\{x\}$ là nhóm có một đồng x.

- Ký hiệu $A+B$ có nghĩa là bao gồm nhóm A và nhóm B. Dĩ nhiên A, B không chung đồng nào. $A-B$ là nhóm gồm các đồng của nhóm A nhưng không tính các đồng của nhóm B.

- $A < B$ có nghĩa là các đồng trong nhóm A nhẹ hơn các đồng của nhóm B. Tương tự cho $A > B$ và $A = B$ nếu không có gì nhầm lẫn.

- $|A|$ là số đồng của A.

- Trong A ta chọn được nhóm A' khi $|A'| \leq |A|$, $|A'|$ có thể là 0 hoặc $|A'| = |A|$. Khi A giả nhẹ (hay nặng) và nếu A' giả thì A' giả nhẹ (hay nặng).

- Ta có thể bổ sung A để có $|A'|$ bằng các đồng của B khác A khi $|A| \leq |A'|$ và $|B| \geq |A'| - |A|$. $|A|$ và $|A'|$ có thể bằng nhau (bổ sung 0 đồng). Khi A giả nhẹ (hay nặng) thì A' giả nhẹ (hay nặng).

Bổ đề 1:

Nếu biết đồng tiền giả có trọng lượng nhẹ (hoặc nặng) hơn các đồng tiền thật thì với $p = 3^n$ tồn tại n lần cân để xác định được đồng nào giả nhẹ (hoặc giả nặng) ($n \geq 1$).

Việc CM đơn giản.

Với $n = 1$, CM dễ dàng.

Giả sử Bổ đề 1 (BD1) đúng đến $n-1$ ($n > 1$) khi biết giả nhẹ hoặc nặng, ta CM BD1 đúng đến n với giả nhẹ hoặc giả nặng.

Chia p đồng thành 3 nhóm A, B, C, mỗi nhóm có đúng 3^{n-1} đồng: $|A| = |B| = |C| = 3^{n-1}$. Bao giờ cũng thực hiện được vì: $[3^{n-1}] + [3^{n-1}] + [3^{n-1}] = 3^n$

- Nếu $A=B$, thế thì đồng giả thuộc C (giả nhẹ hoặc giả nặng đã biết). Vì $|C| = 3^{n-1}$ nên theo giả thiết qui nạp, ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A < B$, thì vì $|A| = |B| = 3^{n-1}$ và đã biết giả nhẹ hay giả nặng nên theo giả thiết qui nạp ta cũng có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A > B$, lập luận tương tự $A < B$.

Như thế BD1 được CM với mọi $n \geq 1$.

Hệ quả:

Nếu biết đồng tiền giả có trọng lượng nhẹ (hoặc nặng) hơn các đồng tiền thật thì với $3^{n-1} < p \leq 3^n$ tồn tại n lần cân để xác định được đồng nào giả nhẹ (hoặc giả nặng) ($n \geq 1$).

Việc CM cũng đơn giản.

Với $n = 1$ ta có một cách cân: so sánh 2 đồng trong p đồng ($p=2$ hoặc $p = 3$) và cho kết quả ngay vì đã biết giả nhẹ hoặc giả nặng.

Giả sử hệ quả đúng đến $n-1$ ($n > 1$) cho cả trường hợp giả nhẹ hoặc giả nặng, ta CM đúng đến n .

- Nếu $3^{n-1} < p \leq 2 \cdot 3^{n-1}$, ta chọn nhóm A và B khác nhau sao cho số đồng của A và B bằng nhau và bằng phần nguyên của $p/2$: $|A| = |B| = [p/2]$. Bao giờ cũng thực hiện được điều này vì $|A| + |B| = [p/2] + [p/2] = p-1$ (nếu p lẻ), $|A| + |B| = [p/2] + [p/2] = p$ (nếu p chẵn). Trong p còn lại 1 đồng nếu p lẻ.

+ Nếu $A=B$ thì một đồng còn lại của p là giả khi p lẻ, nếu p chẵn sẽ không xảy ra $A=B$ vì trong p phải có đồng tiền giả.

+ Nếu $A < B$: Nếu đồng giả nhẹ thì giả trong nhóm A , ngược lại giả nặng trong nhóm B .

Ta có thể bổ sung trong nhóm A thành nhóm A' , nếu nhóm A giả (hoặc trong B nếu nhóm B giả và nhóm A thật) một số đồng tiền (0 đến $[p/2]$) từ nhóm B (hoặc A , nếu nhóm B giả) sao cho $|A'| = 3^{n-1}$. Điều này bao giờ cũng thực hiện được vì A (hoặc B) có số phần tử là $[p/2] \leq 3^{n-1}$ và $|B| = [p/2] \geq |A'| - |A| = 3^{n-1} - [p/2]$ (do $p > 3^{n-1}$ hay $p-1 \geq 3^{n-1}$). Theo giả thiết qui nạp ta có $n-1$ lần cân xác định được giả nhẹ hay giả nặng.

+ Nếu $A > B$: Lập luận tương tự $A < B$.

- Nếu $2 \cdot 3^{n-1} < p \leq 3^n$ thì ta có thể chọn trong p hai nhóm khác nhau A, B sao $|A| = |B| = 3^{n-1}$. Số còn lại lập thành nhóm C có $|C| = p - 2 \cdot 3^{n-1} > 0$. Bao giờ cũng thực hiện được điều này vì $[3^{n-1}] + [3^{n-1}] = 2 \cdot [3^{n-1}] < p$.

+ Nếu $A=B$, thì đồng giả thuộc nhóm C và ta có thể bổ sung vào nhóm C thành nhóm C' số đồng tiền thật từ nhóm A sao cho $|C'| = 3^{n-1}$ đồng. Bao giờ cũng thực hiện được điều này vì $|C| \leq 3^{n-1}$ và $|A| > |C'| - |C|$ (do $|C'| - |C| = 3^{n-1} - (p - 2 \cdot 3^{n-1}) < 3^{n-1}$).

Do biết C' có 3^{n-1} đồng và là giả nhẹ (hay giả nặng) nên theo giả thiết qui nạp ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

+ Nếu $A < B$, vì số đồng của A hoặc B là 3^{n-1} và đã biết giả nhẹ hoặc giả nặng nên theo qui nạp ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

+ Nếu $A > B$, lập luận tương tự.

Hệ quả 1 được CM với $n \geq 1$

Bổ đề 2:

Có $(3^n - 1)/2$ đồng tiền, trong đó chỉ có một đồng tiền giả có trọng lượng khác hơn các đồng tiền thật đồng thời xác định được 3^{n-1} đồng tiền thật ngoài các đồng tiền trên. Thế thì tồn tại n lần cân ta xác định được đồng tiền giả đó là đồng tiền giả nhẹ hoặc giả nặng ($n \geq 1$).

Với $n=1$, ta có 1 đồng thật và 1 đồng giả. Cân hai đồng này ta biết ngay giả nhẹ hay giả nặng.

Giả sử BD đúng tới $n-1$ ($n > 1$):

Cân lần thứ nhất bằng cách:

Trong $(3^n - 1)/2$ đồng trên chọn ra nhóm A gồm 3^{n-1} đồng. Còn lại là nhóm B có $(3^{n-1} - 1)/2$ đồng.

Bao giờ cũng chọn được vì $3^{n-1} < (3^n - 1)/2$.

Nhóm C gồm 3^{n-1} đồng thật đã biết.

Ta cân A và C:

- Nếu $A=C$, Nhóm B giả, B có $(3^{n-1}-1)/2$ đồng và có 3^{n-2} đồng thật đã biết (trong nhóm C) nên theo giả thiết qui nạp ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A < C$ thì A giả nhẹ. Hơn nữa A có 3^{n-1} đồng tiền nên theo BD1 ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A > C$: Lý luận tương tự trường hợp $A < C$.

Như thế BD2 được CM với $n \geq 1$.

Bổ đề 3:

Giả sử đĩa cân A và đĩa cân B chứa cùng số đồng tiền và đĩa cân A nhẹ (hoặc nặng) hơn đĩa cân B, sao cho trong đĩa cân A có $(3^n + 1)/2$ đồng tiền và đĩa cân B có $(3^n - 1)/2$ đồng tiền và một đồng tiền còn lại trong đĩa cân B là đồng tiền thật đã biết. Thế thì tồn tại n lần cân ta xác định được đồng tiền giả nhẹ (hoặc nặng hơn) ($n \geq 1$).

Nếu $n = 1$ đĩa A có 2 đồng, đĩa B có 2 đồng nhưng đã biết một đồng thật. Ta so sánh hai đồng của đĩa A. Nếu chúng thăng bằng thì đồng giả còn lại ở đĩa B và giả nặng (hoặc nhẹ). Nếu không thăng bằng, đĩa nào nhẹ (hay nặng) hơn thì đồng tiền ở đĩa đó là giả nhẹ (hay giả nặng).

Giả sử BD đúng đến $n-1$ ($n > 1$) cho cả đĩa A nặng hơn đĩa B.

Cân lần thứ nhất bằng cách:

Ta gọi B là nhóm đồng trong đĩa B trừ đồng thật đã biết.

a) Giả sử đĩa $A <$ đĩa B:

Trong đĩa cân A, ta chọn ra 2 nhóm A' và A'' khác nhau và $|A'| = |A''| = (3^{n-1} + 1)/2$. Nhóm còn lại là A''' có $|A'''| = [(3^n + 1)/2] - (3^{n-1} + 1) = (3^{n-1} - 1)/2$

Bao giờ cũng chọn được vì $[(3^{n-1} + 1)/2] + [(3^{n-1} + 1)/2] < (3^n + 1)/2$.

Trong đĩa cân B, ta chọn 2 nhóm B' và B'' khác nhau của B và $|B'| = |B''| = (3^{n-1} - 1)/2$. Nhóm còn lại là B''' có $|B'''| = [(3^n - 1)/2] - (3^{n-1} - 1) = (3^{n-1} + 1)/2$

Bao giờ cũng chọn được vì $[(3^{n-1} - 1)/2] + [(3^{n-1} - 1)/2] < (3^n - 1)/2$

Ta cân $A' + B'$ với $A'' + B''$:

- Nếu $A' + B' = A'' + B''$ thế thì đồng giả thuộc A''' hoặc B''' . Gọi x là đồng thật đã biết.

Ta cân B''' với $A''' + \{x\}$. Vì $|B'''| = (3^{n-1} + 1)/2$ đồng và nhẹ (hay nặng) hơn $A''' + \{x\}$, $|A'''| = (3^{n-1} - 1)/2$ nên theo giả thiết qui nạp ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả và đó là giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A' + B' < A'' + B''$: B' gồm các đồng thật vì nếu có đồng giả trong B' thì $A' + B' > A'' + B''$ (vì $B + \{x\} > A$). Mâu thuẫn! Tương tự A'' gồm các đồng thật. Như thế đồng giả thuộc A' hay B'' .

Nếu đồng giả thuộc A' thì giả nhẹ, nếu thuộc B'' thì giả nặng, $|A'| = (3^{n-1} + 1)/2$, $|B''| = (3^{n-1} - 1)/2$.

Ta cân A' và $B'' + \{x\}$: Theo giả thiết qui nạp ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A' + B' > A'' + B''$: Lập luận tương tự trường hợp $A' + B' < A'' + B''$.

b) Giả sử đĩa $A > B$: CM tương tự.

Vậy BD 3 được CM với $n \geq 1$

Bổ đề 4:

Nếu biết $(3^n - 1)/2$ đồng tiền ở nhóm A nhẹ hơn (hoặc nặng hơn) $(3^n - 1)/2$ đồng tiền ở nhóm B và biết ít nhất một đồng tiền thật ngoài các đồng tiền ở A và B . Thế thì tồn tại n lần cân ta xác định được trong tất cả các đồng tiền đó, đồng nào là đồng giả nhẹ (hoặc nặng hơn)

Với $n=1$, ta có: Nhóm A và B mỗi nhóm có 1 đồng. Cân A với 1 đồng tiền thật đã biết. Cân thăng bằng: đồng giả ở B và giả nặng. Cân không thăng bằng: đồng giả là đồng ở A và giả nhẹ. Tương tự cho $A > B$.

Giả sử BD đúng tới $n-1$ cho cả trường hợp nhẹ hơn và nặng hơn ($n > 1$).

a) Giả sử $A < B$:

Cân lần thứ nhất bằng cách:

Trong nhóm A ta chọn A' và A'' khác nhau với $|A'| = (3^{n-1} + 1)/2$ và $|A''| = (3^{n-1} - 1)/2$ đồng.

Bao giờ cũng chọn được vì $[(3^{n-1} + 1)/2] + [(3^{n-1} - 1)/2] < (3^n - 1)/2$.

Gọi nhóm còn lại trong A là A''' và $|A'''| = (3^n - 1)/2 - (3^{n-1} + 1)/2 = (3^{n-1} - 1)/2$ đồng.

Trong nhóm B ta chọn nhóm B' và B'' khác nhau với $|B'| = |B''| = (3^{n-1} - 1)/2$ đồng.

Bao giờ cũng chọn được vì $[(3^{n-1} - 1)/2] + [(3^{n-1} - 1)/2] < (3^n - 1)/2$.

Gọi một đồng thật đã biết ngoài các đồng trên là x .

Gọi nhóm còn lại trong B là B''' và $|B'''| = (3^n - 1)/2 - (3^{n-1} - 1)/2 = (3^{n-1} + 1)/2$.

Ta cân $A' + B'$ với $A'' + B'' + \{x\}$:

- Nếu $A' + B' = A'' + B'' + \{x\}$ thì đồng giả ở nhóm A''' hoặc B''' và khi đó $A''' < B''' + \{x\}$. Hơn nữa $|A'''| = (3^{n-1} - 1)/2$, $|B'''| = (3^{n-1} + 1)/2$ và tồn tại đồng thật x nên theo BD3 ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng tiền giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A' + B' < A'' + B'' + \{x\}$: vì $A < B$ nên A'' và B' thật. Do đó A' hoặc B'' chứa đồng giả. Vì $A' < B'' + \{x\}$, $|A'| = (3^{n-1} + 1)/2$, $|B''| = (3^{n-1} - 1)/2$, ngoài ra có ít nhất 1 đồng thật x nên theo BD3 ta có $n-1$ cách cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A' + B' > A'' + B'' + \{x\}$: Lập luận tương tự trường hợp $A' + B' < A'' + B'' + \{x\}$.

b) Giả sử $A > B$: Cũng lập luận tương tự $A < B$.

Như thế BD 4 được CM với $n \geq 1$.

Bổ đề 5:

Với $p = (3^n - 3)/2$, khi đó tồn tại n lần cân ta xác định được đồng tiền nào là đồng tiền giả và đó là giả nhẹ hoặc giả nặng ($n \geq 2$).

Với $n=2$ thì $p=3$ và ta có cách cân đơn giản sau: Trong $p=3$ đồng ta chia thành 3 nhóm A, B, C mỗi nhóm có đúng 1 đồng. Cân A và B.

Nếu $A=B$ thì A, B thật và đồng trong C giả. Cân đồng này với đồng thật trong A và xác định ngay giả nhẹ hoặc giả nặng.

Nếu $A<B$ thì C thật, cân A với C. Nếu $A=C$ thì B giả nặng. Nếu $A<C$ thì A giả nhẹ. $A>C$ không xảy ra (do $A<B$).

Nếu $A>B$: Lập luận tương tự $A<B$.

Giả sử BD đúng tới $n-1$ ($n>2$). Ta CM BD đúng đến n .

Ta có cách cân thứ nhất như sau:

Trong p đồng bao giờ cũng chia được thành 3 nhóm A, B, C khác nhau và $|A|=|B|=|C|=(3^{n-1}-1)/2$.

Bao giờ cũng chọn được 3 nhóm này vì $[(3^{n-1}-1)/2] + [(3^{n-1}-1)/2] + [(3^{n-1}-1)/2] = (3^n-3)/2$

Ta cân A với B:

- Nếu $A=B$ thì C giả. A và B thật, đồng thời $|A+B|=(3^{n-1}-1) \geq 3^{n-2}$.

Vì $|C|=(3^{n-1}-1)/2$ đồng và có 3^{n-2} đồng thật ngoài các đồng của C nên theo BD2, ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A<B$ thì C thật. Trong C có ít nhất 1 đồng thật và A hay B có cùng số đồng là $(3^{n-1}-1)/2$ nên theo BD4 ta có $n-1$ lần cân xác định được giả nhẹ hay giả nặng.

- Nếu $A>B$: Lập luận tương tự $A<B$.

Như thế BD được CM với $n \geq 3$.

Định lý:

Nếu $(3^{n-1}-3)/2 < p \leq (3^n-3)/2$, thế thì tồn tại n lần cân ta xác định được đồng tiền nào là đồng giả và là giả nhẹ hoặc giả nặng ($n \geq 2$).

Với $n=2$: $0 < p \leq 3$. Ta có cách cân dễ dàng.

Do đó giả sử $n>2$.

- Nếu $(3^{n-1}-3)/2 < p \leq (3^{n-1}-1)$:

Trong p đồng ta chọn ra nhóm C với $|C|=(3^{n-1}-3)/2$ (C có ít nhất 1 đồng x vì $n>2$). Trong số đồng tiền lại $q = [p - |C|] > 0$, ta phân thành nhóm A và B khác nhau sao cho:

Nhóm A và B có cùng số đồng tiền là $q/2$ nếu q chẵn. $|A|=|B|=q/2$.

Nhóm A có $(q+1)/2$ và nhóm B có $(q-1)/2$ nếu q lẻ. $|A|=(q+1)/2$, $|B|=(q-1)/2$

Bao giờ cũng chọn được hai nhóm A và B này, trong đó B có thể không có đồng nào khi q lẻ và $p=[(3^{n-1}-3)/2+1]$. Trong cả hai trường hợp q chẵn hay q lẻ ta đều có $|A|+|B|=q$.

Do $p \leq (3^{n-1}-1)$ nên $q \leq (3^{n-1}+1)/2$.

Ta cân lần thứ nhất như sau:

Cân A với B, nếu A và B có cùng số đồng. Ngược lại cân A với $B+\{x\}$, trong đó x là một đồng của C (chưa biết thật hay giả).

+ Nếu $A=B$ (hoặc $A=B+\{x\}$) thì C giả. Do $|C|=(3^{n-1}-3)/2$ nên theo BD5 ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

+ Nếu $A<B$ (hoặc $A<B+\{x\}$): Nhóm C thật. Nếu $A<B+\{x\}$ thì nhóm $C-\{x\}$ thật, khi q lẻ. Do $n \geq 3$, $q/2 \leq (3^{n-1} + 1)/4 < (3^{n-1} - 3)/2 = |C|$ và $(q+1)/2 \leq (3^{n-1} - 3)/2 = |C|$ nên trong nhóm C (hoặc $C-\{x\}$, khi q lẻ) tồn tại nhóm C' thật và $|C'|=q/2$ nếu q chẵn hoặc $|C'|=(q+1)/2$ nếu q lẻ.

Trong trường hợp này ta cân lần thứ hai giữa A và C' :

* Nếu $A=C'$: B giả nặng (nếu q chẵn) hoặc $B+\{x\}$ giả nặng (nếu q lẻ).

Vì $n \geq 3$, $q/2 \leq (3^{n-1} + 1)/4$ nên $|B|=q/2 < 3^{n-2}$ (nếu q chẵn), $|B|=(q-1)/2 \leq 3^{n-2}$ (nếu q lẻ) và $|A|+|C| > |A|+|C|-\{x\} \geq 3^{n-2} - |B|$ (suy ra từ $3^{n-2} \geq 3$ với $n \geq 3$). Từ đó ta có thể bổ sung một số đồng thật của A và C (khi q chẵn) hoặc từ $C-\{x\}$ (khi q lẻ) vào B để có nhóm B' và $|B'|=3^{n-2}$. B' giả nặng, nên theo BD1 ta có $n-2$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

* Nếu $A<C'$. Như thế A giả nhẹ, B và C thật. Vì $q/2 < (q+1)/2 \leq 3^{n-2}$ và $3^{n-2} - (q+1)/2 < 3^{n-2} - q/2 \leq q-1 < q$ nên $|B| \leq 3^{n-2}$ và $|B|+|C| > 3^{n-2} - |A|$ (suy ra từ $3^{n-2} \geq 3$ với $n \geq 3$). Từ đó ta có thể bổ sung một số đồng của B và C vào A để có nhóm A' có 3^{n-2} đồng. A' giả nhẹ, nên theo BD1 ta có $n-2$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay giả nặng.

* Nếu $A>C'$: Lập luận tương tự trường hợp $A<C'$.

+ Nếu $A>B$ (hoặc $A>B+\{x\}$): lập luận tương tự trường hợp $A<B$ (hoặc $A<B+\{x\}$).

- Nếu $(3^{n-1} - 1) < p \leq (3^n - 3)/2$:

Trong p đồng tiền ta chọn ra hai nhóm A và B khác nhau và $|A|=|B|=(3^{n-1} - 1)/2$. Bao giờ cũng chọn được vì $[(3^{n-1} - 1)/2] + [(3^{n-1} - 1)/2] < p$.

Còn lại ta gọi là nhóm C . $|C|=p - (3^{n-1} - 1)$.

Ta cân lần thứ nhất như sau:

Cân A với B :

* Nếu $A=B$. Thế thì A và B thật và đồng giả thuộc C . Do $|C|=p - (3^{n-1} - 1) \leq (3^{n-1} - 1)/2$ và $|A|+|B| > (3^{n-1} - 1)/2 - |C|$ (suy ra từ $|A|+|B|+|C| = p > (3^{n-1} - 1)/2$) nên ta có thể bổ sung C thành nhóm C' bằng các phần tử của A và B sao cho $|C'|=(3^{n-1} - 1)/2$. Vì số đồng thật của A và B là $3^{n-1} - 1 > 3^{n-2}$ nên có ít nhất 3^{n-2} đồng thật, theo BD2 ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hoặc nặng.

* Nếu $A<B$: Như thế C thật và do $|C|=p - (3^{n-1} - 1) > 0$ nên có ít nhất một đồng thật đã biết. Do $|A|=|B|=(3^{n-1} - 1)/2$ và có ít nhất một đồng thật đã biết nên theo BD4 ta có $n-1$ lần cân xác định được đồng giả nhẹ hay nặng.

* Nếu $A>B$: Lập luận tương tự trường hợp $A<B$.

Như thế ĐL được CM và bài toán được giải quyết.