

ĐỀ THI HỌC KỲ I NĂM HỌC 2009-2010.

Môn học: Giải tích 1.

Thời gian làm bài: 90 phút. Đề thi gồm 7 câu.

HÌNH THỨC THI: TỰ LUẬN

CA 1

Câu 1 : Tính giới hạn (trình bày lời giải cụ thể) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - x \cot x - x^2/3}{x \cos x - \sin x}$.

Câu 2 : Khảo sát và vẽ đồ thị của đường cong $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Câu 3 : Tìm và phân loại tất cả các điểm gián đoạn của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\ln|x-1|}$.

Câu 4 : Giải phương trình vi phân $y' - x^2y = \frac{x^5 + x^2}{3}$ với điều kiện $y(0) = 0$.

Câu 5 : Tính tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{19/3} \cdot \sqrt[3]{1+x^2}}$

Câu 6 : Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + y = \sin(2x) \cdot \cos x$.

Câu 7 : Giải hệ phương trình vi phân bằng phương pháp khử hoặc trị riêng, vectơ riêng.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = x + y + 3z \end{cases}$$

Đáp án. Câu 1(1 điểm). Khai triển Maclaurin $\sqrt[3]{1+x^3} - x \cot(x) - \frac{x^2}{3} = \frac{x^3}{3} + o(x^3); x \cos x - \sin x = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\rightarrow I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - x \cot x - x^2/3}{x \cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -1.$$

Câu 2(1.5 điểm). Tập xác định $x > 0$, đạo hàm: $y' = x^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) \rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq e$.

Hàm tăng trên $(0, e)$, giảm trên $(e, +\infty)$, cực đại tại $x = e, f_{cd} = e^{1/e}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0$, không có tiệm cận đứng, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Lập bảng biến thiên, tìm vài điểm đặc biệt, vẽ.

Câu 3(1.5đ). Miền xác định $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \rightarrow x = 1$ là điểm gián đoạn loại 1, khử được;

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty \rightarrow x = 2$ là điểm gián đoạn loại 2.

Câu 4(1.5đ). $y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right); y = e^{\int x^2 dx} \left(\int \frac{x^5+x^2}{3} \cdot e^{\int x^2 dx} dx + C \right)$

$$y = e^{\frac{x^3}{3}} \left(\int \frac{x^5+x^2}{3} \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} dx + C \right) = e^{\frac{x^3}{3}} \left(-\frac{x^3+4}{3} \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + C \right); y(0) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{4}{3}.$$

Câu 5 (1.5đ) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{19} + x^{21}}} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^7 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}}}$. Đặt $t = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow t^3 = 1 + \frac{1}{x^2}$

$$I = \int_{\sqrt[3]{2}}^1 \frac{-3}{2} t(t^3 - 1)^2 dt = \frac{3}{10} \cdot \sqrt[3]{4} - \frac{27}{80}$$

Câu 6(1.5đ). Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$. Tìm nghiệm riêng:
 $y_r = y_{r_1} + y_{r_2}$, với $y_{r_1} = \frac{3}{100} \cos(3x) - \frac{1}{25} \sin(3x)$ là nghiệm riêng của $y'' - 2y' + y = \frac{\sin(2x)}{2}$
 $y_{r_2} = \frac{\cos x}{4}$ là nghiệm riêng của $y'' - 2y' + y = \frac{\sin(x)}{2}$. Kết luận: $y_{tq} = y_0 + y_{r_1} + y_{r_2}$.

Câu 7(1.5đ). Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Chéo hóa $A = PDP^{-1}$,

với $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

Hệ phương trình $X' = A \cdot X \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$, đặt $X = P^{-1}Y$, có hệ

$Y' = DY \Leftrightarrow y'_1 = 6y_1; y'_2 = 2y_2; y'_3 = 2y_3 \rightarrow y_1(t) = C_1 e^{6t}; y_2(t) = C_2 e^{2t}; y_3(t) = C_3 e^{2t}$

Kết luận: $X = PY \Leftrightarrow x_1(t) = C_1 e^{6t} - C_2 e^{2t} - C_3 e^{2t}; x_2(t) = 2C_1 e^{6t} + C_2 e^{2t}; x_3(t) = C_1 e^{6t} + C_3 e^{2t}$