

Từ trước đến nay, câu Bất đẳng thức, hay các bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất luôn là câu khó nhất trong đề, dùng để phân loại học sinh và giúp học sinh lấy điểm 9,10 trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, hay bây giờ là kì thi THPTQG. Và đạo hàm chính là công cụ quan trọng nhất trong chương trình Toán THPT, sự kết hợp giữa đạo hàm và các bài toán tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất đã, đang và sẽ là xu hướng ra đề. Nhân đây mình đã tổng hợp được một số bài toán mang dáng dấp như thế, giúp các bạn lớp 12 có thêm tài liệu nhỏ để ôn tập. Điều đặc biệt ở đây chính là các bài toán được lấy ở trên **diendantoanhoc.net/forum**, chủ yếu ở Box **Toán Trung học Phổ thông và ôn thi Đại học – Bất đẳng thức và cực trị** (khoảng 50 pages đầu). Các bài toán đều được giải chi tiết cũng như hướng dẫn một cách cụ thể nhất. Do trình độ còn hạn hẹp cũng như thời gian không cho phép nên tài liệu còn khá sơ sài, đây cũng là lời cảm ơn của mình dành cho diễn đàn đã giúp đỡ mình trong suốt thời gian qua.

Khối A-2012: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$

Khối B-2012: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = x^5 + y^5 + z^5$

Khối A-2013: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a + c)(b + c) = 4c^2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$

Khối B-2013: Cho a, b, c là các số thực dương

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$

Khối A-2014: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y + z}{x + y + z + 1} - \frac{1 + yz}{9}$

Khối B-2014: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a + b)c > 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \frac{c}{2(a+b)}$

THPTQG -2015: Cho các số thực $a, b, c \in [1; 3]$ và $a + b + c = 6$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{abc}{2}$

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = (abc)^2$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{(a + b + c)^3}$

Bài 3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + 6c^2 = 4c(a + b)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^3}{b(a + c)^3} + \frac{b^3}{a(b + c)^3} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = xy + yz + zx$

Bài 5: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + 1 = z$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^3}{x + yz} + \frac{y^3}{y + xz} + \frac{z^3}{z + xy} + \frac{14}{(x + 1)\sqrt{(y + 1)(z + 1)}}$

Bài 6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a = b + c + abc$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{(c + c\sqrt{ab})^2}{(a + b)(c^2 + 1)} + \frac{2c}{(c^2 + 1)\sqrt{c^2 + 1}}$

Bài 7: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2 + y^2) + \frac{1}{xy} = 5$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{3}{1 + x^2} + \frac{3}{1 + y^2} - \frac{4}{1 + 2xy}$

Bài 8: Cho $a \geq b \geq c > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{(3ab + bc)^2}{b^4} + \frac{121b^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 8ac}$

Bài 9: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + 2b = 12$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a - b)^4}$

Bài 10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a + b + c)^3 = 32abc$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a + b + c)^4}$

Bài 11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{ab + bc + ca + 1}{2}$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{|a - b| + |b - c| + |c - a|}{2}$

Bài 12: Cho $1 \leq a, b, c \leq 4$ và $a + b + 2c = 8$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = a^3 + b^3 + 2c^3$

Bài 13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{16}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + 1} + \frac{ab + bc + ca + 1}{a + b + c}$

Bài 14: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = 6(y + z - x) + 27xyz$

Bài 15: Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $\sqrt{x^2 + y^2 + 2(x + y) + 1} + z = 3$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = x^4 + y^4 + z^4$

Bài 16: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + 3bc + 5ca = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{(a - b)^2} + \frac{1}{(b - c)^2} + \frac{1}{(c - a)^2}$

Bài 17: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + z^2} = 5$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = 2x^3 + y^3 + z^3$

Bài 18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a(b^2 + c^2) = b + c$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(c + a)^2} + \frac{4}{(1 + a)(1 + b)(1 + c)}$

Bài 19: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + z^3$

Bài 20: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{xy}{1 + z^2} + \frac{yz}{1 + x^2} - \frac{y^3(x^3 + z^3)}{24x^3y^3}$

Bài 21: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

Bài 22: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (xy + yz + 2xz)^2 - \frac{8}{(x + y + z)^2 - xy - yz + 2}$

Bài 23: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)}$

Bài 24: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a + b - c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}) = 4$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (a^4 + b^4 + c^4)(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4})$

Bài 25: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2y^2 = 4x^2 + 5y^2$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

Bài 26: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq 2$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{x^2y + y^2z + z^2x}{x^4 + y^4 + z^4}$

Bài 27: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$

Bài 28: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2}{|a - b|} + \frac{2}{|b - c|} + \frac{2}{|c - a|} + \frac{5}{\sqrt{ab + bc + ca}}$

Bài 29: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = a(b - c)^4 + b(c - a)^4 + c(a - b)^4$

Bài 30: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xy - 2(x + y)z - 2 = 0$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{y}{y^2 + 2} - \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2z^2 + 1}$

Bài 31: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2x + 4y + 7z = 2xyz$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y + z$

Bài 32: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3y$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{4}{(y + 2)^2} + \frac{8}{(z + 3)^2}$

Bài 33: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^3 + b^3 = c(c - 1)$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}$

Bài 34: Cho $a, b, c \in [2; 4]$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc(a+b+c)}$

Bài 35: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$

Bài 36: Cho $a, b, c \in [\frac{1}{2}; 2]$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Bài 37: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 10 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 + b^2 + c^2$

Bài 38: Cho x, y là các số thực dương.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{xy + \sqrt{x^4 + 9x^2y^2}}{x^2 + 8y^2}$

Bài 39: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a \geq b \geq c, a^2 + b^2 + c^2 = 5$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

Bài 40: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{5}{2}(a+1)(b+1)(c+1)$

Bài 41: Cho $a, b \in (0; 1)$ thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{8(1-a)}{1+a} + 9\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}$

Bài 42: Cho $x, y, z \in [1; 2]$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + \frac{4(x+y)}{\sqrt{z^2 + 4xy}} + \frac{3z^2}{z^2 + 4xy}$

Bài 43: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc + a + c = b$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} - \frac{4c}{\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{3c}{(c^2 + 1)\sqrt{c^2 + 1}}$

Bài 44: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x - 4y - 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = 2(x+z) - y$

Bài 45: Cho $x, y, z \in [1; 4], x \geq y, x \geq z$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z}$

Bài 46: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{2(a+b+c)} - (a^2 + b^2)$

Bài 47: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + ab = 2c(a + b)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Bài 48: Cho a, b, c là các số thực dương

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$

Bài 49: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{c^2} = 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Bài 50: Cho a, b là các số thực dương

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a+b-1}{\sqrt{a+b}} + \frac{2016}{2014a + 2006b + 6\sqrt{ab}}$

Bài 51: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} + \frac{4c^2}{2 + \sqrt{a^2 + b^2}}$

Bài 52: Cho a, b, c là các số thực dương

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4a + 5}} - \frac{1}{(a-1)(b+1)(c+1)}$

Bài 53: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x + y + z)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} - \frac{1}{xy + yz + zx}\right)$

Bài 54: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{72}{\sqrt{a+b+c+1}}$

Bài 55: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = (x+2)(y+2)(z+2)$

Bài 56: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $7(a^2 + b^2 + c^2) = 11(ab + bc + ca)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Bài 57: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab = 3(a + b + c)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 6(a+b) + c^2 + \frac{2015}{\sqrt{a+c}} + \frac{2015}{\sqrt{b+2}}$

Bài 58: Cho a, b, c là các số thực dương

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{(a+b+c)^2 + 1}$

Bài 59: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{5-4x} + 2\sqrt{4-2(x+y+z)}$

Bài 60: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy \geq 1; z \geq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{z^3}{3(xy+1)}$

Bài 61: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{ab}{c^2+1} + \frac{bc}{a^2+1} - \frac{(ab+bc)^2}{32(abc)^2}$

Bài 62: Cho a, b, c là các số thực không âm và $a^2 + b^2 > 0$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2c + 2}} - \frac{4}{3\sqrt{(x+y)^3(z+2)^3}}$

Bài 63: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + 1 = c$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2+16}{\sqrt{c+ab}}$

Bài 64: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)^2 + 4a^2b^2 + 1 = (2c^2 + 1)^2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{16a^3}{(b+c)^3} + \frac{16b^3}{(c+a)^3} + \frac{3(ab+1)}{c^2+1}$

Bài 65: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab \geq 1, c(a+b+c) \geq 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$

Bài 66: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+z \leq 2y, x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - y^3\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{z^3}\right)$

Bài 67: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 3c^2 + 4$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{(b+c)^2(a-c)}{a+c} + \frac{(a+c)^2(b-c)}{b+c} - c^3$

Bài 68: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5)$

Bài 69: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $3b^2c^2 + a^2 = 2(a + bc)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^2}{bc} + \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(a+c)^2}$

Bài 70: Cho $x, y, z \in [0;1]$ thỏa mãn $\frac{1}{4x+5} + \frac{2}{4y+5} + \frac{4}{4z+5} = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = xy^2z^3$

Bài 71: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{ab}{2+c^2} + \frac{bc}{2+a^2})} - \frac{1}{64}(\frac{a^4b^4 + b^4c^4}{a^4c^4})$

Bài 72: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $xyz < 0, x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = 2(x + y + z) - xyz$

Bài 73: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $\sqrt{1+2a^2} + \sqrt{1+2b^2} + \sqrt{1+2c^2} = 5$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = 4\sqrt{2}a^3 + b^6 + c^6$

Bài 74: Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho c là số nhỏ nhất

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \sqrt{a + b + c}$

Bài 75: Cho x, y, z là các số thực dương

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{z^3}{(x+y)^3} \left[\frac{x}{(y+z)^2} + \frac{y}{(x+z)^2} \right] + \frac{x+y}{8z}$