

TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ, TÍNH CHẤT HÌNH HỌC NỘI TIẾNG

LÂM MINH TRIẾT – TRẦN NGỌC PHÚ SANG

Lời nói đầu

Hình học là một trong những lĩnh vực cổ xưa nhất của toán học, một vẻ đẹp kì diệu làm say mê bao lớp người yêu toán. Cùng với sự phát triển của hình học mà những định lí, tính chất tuyệt đẹp dần được hé lộ qua thời gian bởi những nhà toán học kiệt xuất. Những đường thẳng, định lí, các điểm đặc biệt mang đến cho bài toán một vẻ đẹp thú vị. Sau đây chúng tôi xin trình bày các tính chất nổi tiếng của hình học, giúp bạn đọc khám phá sâu hơn về các bài toán đẹp, tạo nên nhiều ý tưởng mới từ các vấn đề quen thuộc. Dù rất cố gắng nhưng file vẫn không tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc thông cảm và gửi các góp ý về địa chỉ lamminhtriet1997@yahoo.com.

Chúc các bạn một năm mới hạnh phúc, khỏe mạnh và may mắn !

Mục lục:

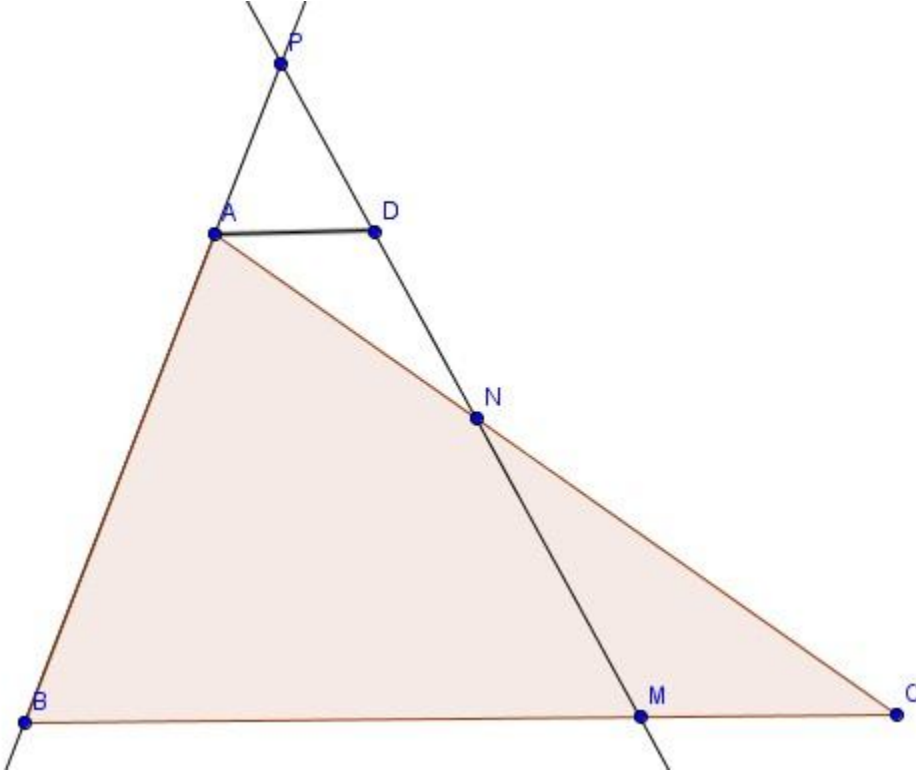
1. Định lí Menelaus	3
2. Định lí Ceva.....	7
3. Định lí Carnot.....	11
4. Đường tròn Euler.....	14
5. Đường thẳng Euler.....	20
6. Định lý con bướm.....	24
7. Đường thẳng Simson	29
8. Đường thẳng Steiner.....	33
9. Định lý Ptoleme	37

1. Định lí Menelaus:

Cho $\triangle ABC$ và AM, BN, CP (M, N, P thuộc CB, CA, AB). M, N, P thẳng hàng khi và

chỉ khi: $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ (1)

Chứng minh: Điều kiện cần: Giả sử P, N, M thẳng hàng. Vẽ $AD \parallel BC$ sao cho D thuộc BC .



Ta có: $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{DA}}; \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BM}}$

Từ đây dễ dàng ta có (1).

Điều kiện đủ: PN cắt BC tại K . Khi đó ta có:

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

Suy ra $K \equiv M$ tức P, N, M thẳng hàng ta có điều phải chứng minh.

Định lí Menelaus trong tứ giác:

Cho tứ giác ABCD, đường thẳng d cắt AB, BC, CD, DA tại M, N, P, Q. Chứng minh

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$$

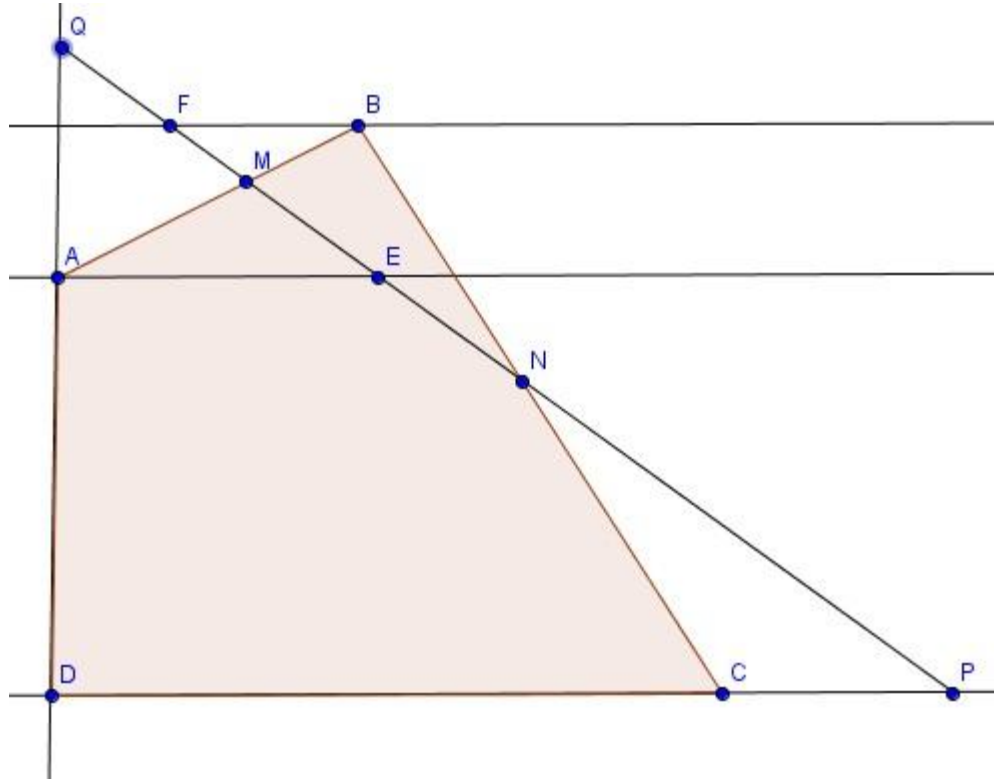
Từ A, B vẽ
AE và BF //
DC (E, F
thuộc D)

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}}$$

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CP}}$$

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{AE}}$$

Từ đây ta có
dpcm.



Bài tập:

- 1) Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AD. Lấy M thuộc AD, BM cắt AC tại E, CM cắt AB tại F. Chứng minh $EF \parallel BC$.

Gợi ý: $\triangle ABD$ có cát tuyến FMC, $\triangle ADC$ có cát tuyến BME.

- 2) Trên 2 cạnh AD, AC của $\triangle ABC$ đều, lấy 2 điểm E, D sao cho $EA = 2BE$, $DC = 2AD$, BD cắt CE tại O. Chứng minh $\widehat{AOC} = 90^\circ$

Gợi ý: Lấy F thuộc BC sao cho $FB = 2FC$, AF cắt BD, CE tại P và Q

- 3) Cho tứ giác ABCD lồi có M và N là giao điểm của AB và CD, AD và BC. Đường thẳng AC cắt BD, MN tại I, J. Chứng minh $\frac{IA}{IC} = \frac{JA}{JC}$

Gợi ý: $\triangle ACM$ có cát tuyến DIB, $\triangle ADC$ có cát tuyến JNM, $\triangle ADM$ có cát tuyến NBC.

- 4) Cho tứ giác ABCD lồi, AD cắt BC tại E, AB cắt DC tại F. Gọi I, J, K là trung điểm BD, AC, FE. Chứng minh I, J, K thẳng hàng (**đường thẳng Gauss**).

Gợi ý: Gọi M, N, P là trung điểm EC, ED, DC. Dễ thấy các hệ điểm sau thẳng hàng (K;M;N), (N;I;P), (M;J;P) và $\triangle EDC$ có cát tuyến ABF.

- 5) Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. M, N, P là giao điểm của AB và $A'B'$, AC và $A'C'$, BC và $B'C'$. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi AA' , BB' , CC' đồng qui (**định lý Desargues**).

Gợi ý:

Điều kiện đủ: Giả sử AA' , BB' , CC' đồng qui tại O

Tam giác OAC có cát tuyến $NA'C'$, tương tự cho tam giác CBO và BAO

Nhân ba hệ thức lại ta có M, N, P thẳng hàng.

Điều kiện đủ: Giả sử M, N, P thẳng hàng

Xét hai tam giác MBB' và NCC' có MN, BC, $B'C'$ đồng qui tại P, O là giao điểm của BB' và CC' , A là giao điểm của MB và NC, A' là giao điểm của MB' và NC' . Theo chứng minh trên ta có O, A, A' thẳng hàng

- 6) Cho A, B, C cùng nằm trên đường thẳng a, X, Y, Z cùng nằm trên đường thẳng b. Gọi M, N, P là giao điểm của các cặp (AY, BX), (AZ, CX), (CY, BZ). Chứng minh M, N, P thẳng hàng (**định lý Pappus**).

Gợi ý:

Cách 1: Gọi T, Q là giao điểm của (BX, AZ); (CX, BZ). Khi đó ta có: (BTMX)=(BZBQ)

Trường hợp a//b dùng định lý Thales

Trường hợp a giao b tại S.

Áp dụng phép chiếu xuyên tâm tại A:

$$(BTMX)=(SZYX)$$

Áp dụng phép chiếu xuyên tâm tại C:

$$(SZYX)=(BZPQ)$$

Từ đây ta có đpcm.

Cách 2: Áp dụng hệ thức Menelaus vào 5 tam giác, xin dành lại cho bạn đọc.

- 7) Cho 3 đường tròn với bán kính khác nhau, không có đường tròn nào hoàn toàn nằm trong một đường tròn khác. Từng cặp có một đôi tiếp tuyến chung giao nhau tại một điểm. Chứng minh rằng 3 điểm đó nằm trên một đường thẳng.

Gợi ý: Gọi ba đường tròn tâm A, B, C với 3 điểm D, E, F (giao điểm của các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn). Tam giác ABC có cát tuyến DEF.

- 8) (Tập chí toán học và tuổi trẻ - số 362)

Giả sử O là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. AO cắt BC tại M, BO cắt AC tại N, CO cắt AB tại P. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$\frac{OA \cdot AP}{OP} \cdot \frac{OB \cdot BM}{OM} \cdot \frac{OC \cdot CN}{ON} \text{ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.}$$

Gợi ý: Cách 1:

$$\text{Ta có: } \frac{S(AOP)}{S(AOP) + S(BOP)} = \frac{AP}{AB}$$

$$\text{Mà } \frac{S(AOP) + S(BOP)}{S(BOM)} = \frac{OA}{OM}$$

$$\text{Suy ra } \frac{S(AOP)}{S(BOM)} = \frac{OA \cdot AP}{AB \cdot OM} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{S(BOM)}{S(CON)} = \frac{OB \cdot BM}{BC \cdot ON} \quad (2)$$

$$\text{Và } \frac{S(CON)}{S(AOP)} = \frac{OC \cdot CN}{AC \cdot OP} \quad (3)$$

$$\text{Nhân (1), (2), (3) ta được } \frac{OA \cdot AP}{OP} \cdot \frac{OB \cdot BM}{OM} \cdot \frac{OC \cdot CN}{ON} = abc \text{ (const)}$$

Cách 2: Áp dụng hệ thức Menelaus vào tam giác AMC với cát tuyến BON; tam giác BNC với cát tuyến AOM; tam giác BPC với cát tuyến AOM.

2. Định lí Ceva:

Cho $\triangle ABC$, D, E, F lần lượt nằm trên BC, AC, AB. Chứng minh AD, BE, CF đồng qui

hoặc đôi một song song khi và chỉ khi $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$

Điều kiện cần:

Giả sử AD, BE,
CF đồng qui:

Từ A vẽ đường
song song với
BC cắt BE, CF
tại I và H

Theo định lý
Thales ta có:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{HA}}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IA}}$$

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BC}}$$

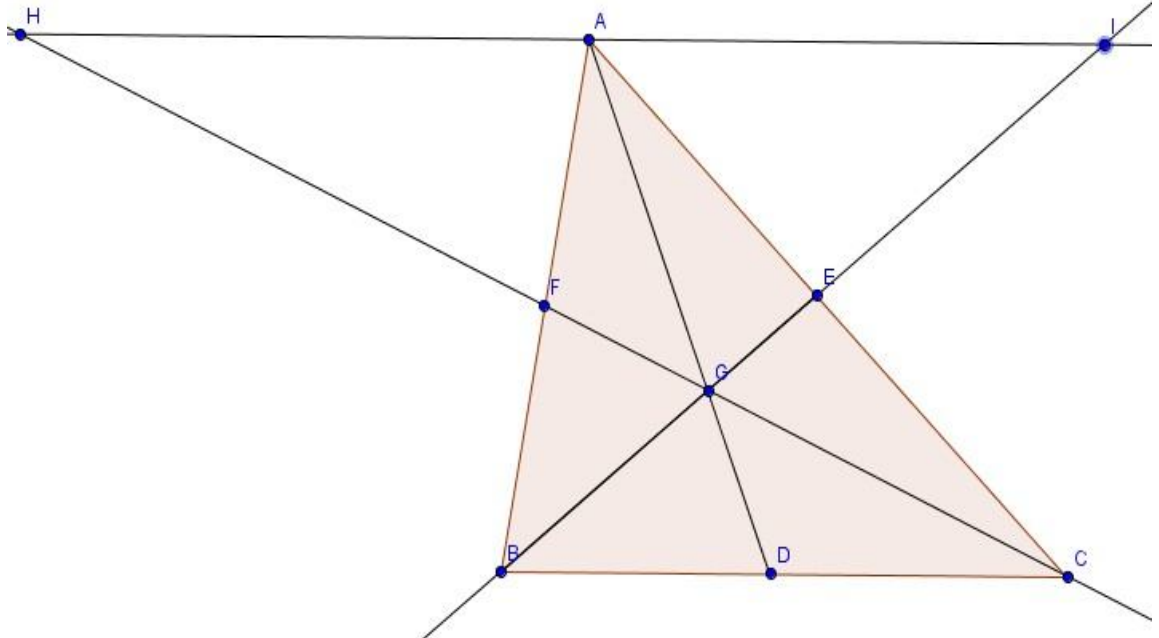
Do đó $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$

Với trường hợp AD// BE// CF, áp dụng định lý Thales ta cũng có kết quả $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$

Điều kiện đủ: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$ (1)

AD cắt BE tại G, CG cắt AB tại F', các điểm H, I như trên

Suy ra $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}} = -1$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $\equiv F'$, ta có điều phải chứng minh

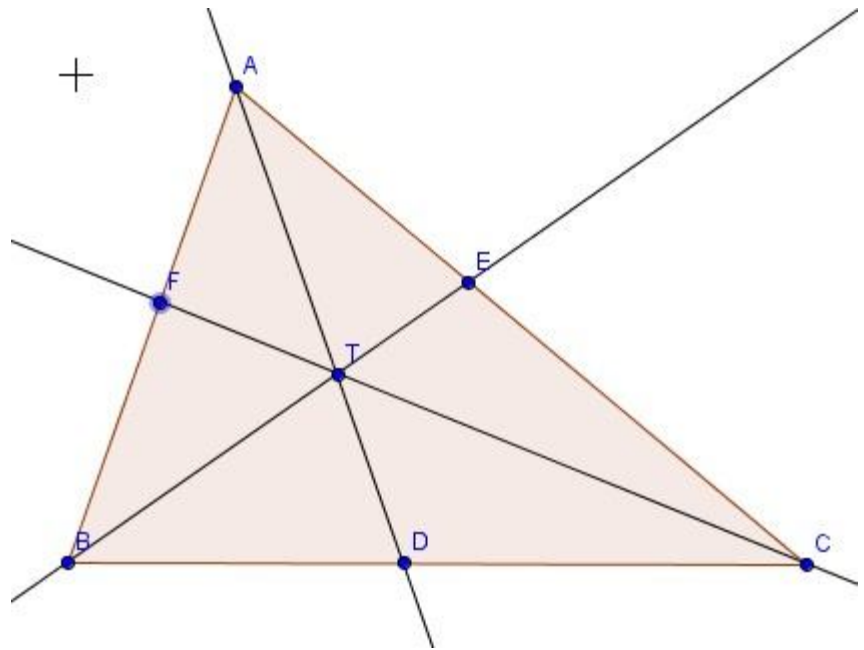
Định lí Ceva sin:

Cho $\triangle ABC$, D, E, F lần lượt nằm trên BC, AC, AB. Chứng minh AD, BE, CF đồng qui

khi và chỉ khi $\frac{\sin(ABE)}{\sin(EBC)} \cdot \frac{\sin(BCF)}{\sin(ACF)} \cdot \frac{\sin(CAD)}{\sin(DAB)} = 1$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{S(ABD)}{S(ACD)} = \frac{AB \cdot \sin(BAD)}{AC \cdot \sin(CAD)}$$

Tương tự cho các hệ thức còn lại ta có đpcm.



Bài tập: Qui ước các đường thẳng AA' , BB' , CC' của $\triangle ABC$ đồng qui là 3 đường thẳng Ceva, đoạn thẳng AA' , BB' , CC' là 3 đoạn thẳng Ceva, điểm đồng qui là điểm Ceva.

- 1) Các đường thẳng đi qua đỉnh của tam giác và tiếp điểm của cạnh đối diện với đường tròn nội tiếp thì đồng qui (điểm **Gergonne**).

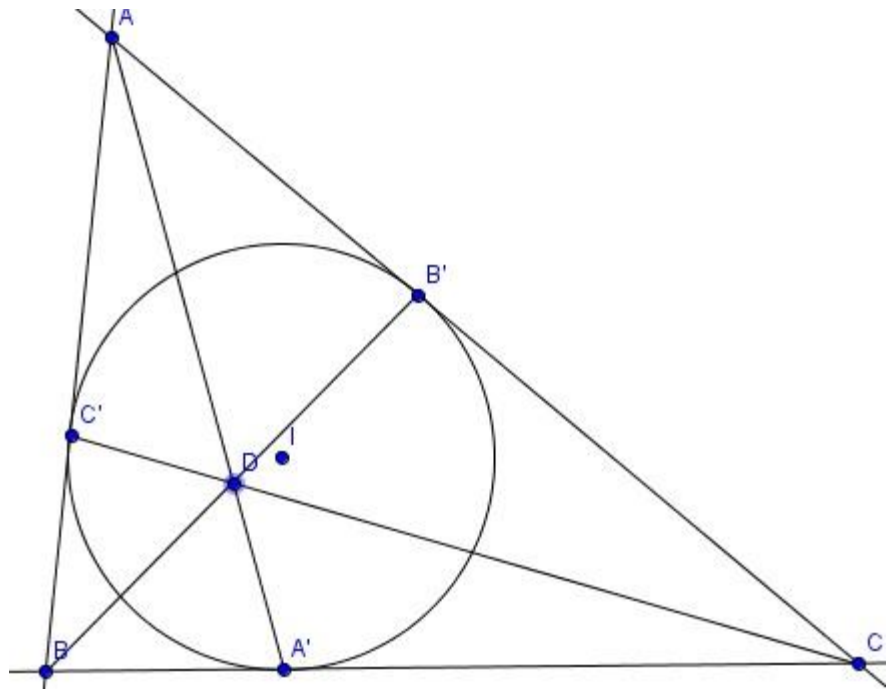
Gợi ý:

$$AB' = AC'$$

$$BC' = BA'$$

$$CA' = CB'$$

Nên AA' , BB' , CC' đồng qui theo định lí Ceva đảo.



- 2) Các đường thẳng đi qua đỉnh của tam giác và tiếp điểm của cạnh đối diện với đường tròn bàng tiếp, đồng quy (tại điểm gọi là **điểm Nagel**).

Gợi ý: Gọi D,E là tiếp điểm của AB, BC với đường tròn bàng tiếp góc B, A',B',C' lần lượt là tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp với các cạnh đối diện góc tương ứng.

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-a}{p-b} = 1$$

- 3) Trong tam giác ABC, nếu có ba đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại K nằm trong tam giác thì $\frac{AK}{KA'} = \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{AC'}{C'B}$ (**định lí Van Oben**).

Gợi ý: Từ A vẽ đường song song BC cắt BB', CC' tại E, D

Các trường hợp đặc biệt:

- K là trọng tâm tam giác khi AA', BB', CC' là đường trung tuyến
 - K là điểm Gergonne: A', B', C' là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh của tam giác.
 - K là điểm Nagel khi A', B', C' là các tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp tương ứng.
- 4) Trên ba cạnh của tam giác ABC, dựng phía ngoài các tam giác đều ABD, ACE, BCF. Chứng minh AF, BE, CD đồng qui.

Gợi ý: Các tỉ số trong hệ thức tỉ lệ với diện tích của tam giác tương ứng.

- 5) Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I;r), các tiếp điểm tại D, E, F với BC, CA, AB. Lấy X nằm trong tam giác sao cho đường tròn nội tiếp tam giác XBC tiếp xúc XB, XC, BC tại Z, Y, D. Chứng minh tứ giác EFZY nội tiếp.

Gợi ý: Ta có: AD, BE, CF đồng qui (bài 1); XD, BY, CZ đồng qui theo Ceva.

Nếu EF cắt BC tại K thì (KDBC)=-1.

Nếu YZ cắt BC tại K' thì (K'DBC)=-1.

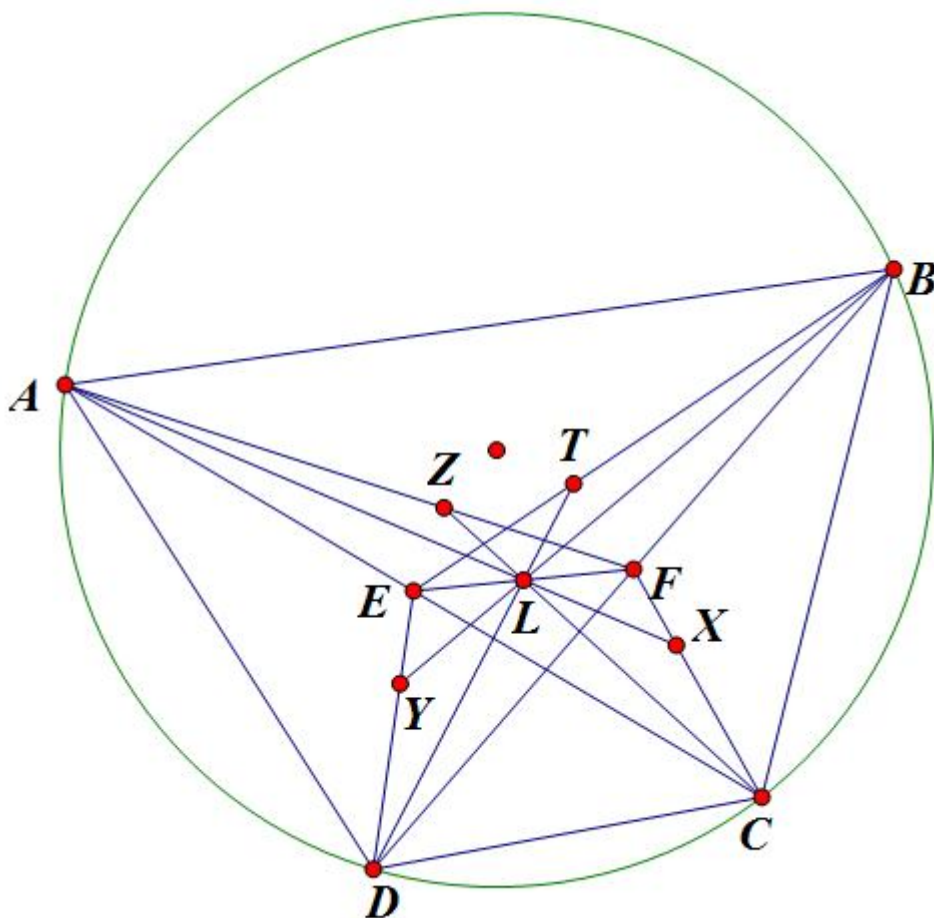
Suy ra K trùng với K'.

Suy ra EF, YZ, BC đồng qui.

Suy ra $KE.KF=KD^2=KY.KZ$

Suy ra EFZY nội tiếp.

- 6) Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Lấy M,N,P,Q lần lượt là điểm đối xứng của A,B,C,D qua O. Gọi X,Y,Z,K lần lượt là trọng tâm của các tam giác tạo bởi 3 đỉnh của tứ giác không chứa A,B,C,D. Chứng minh AX,DY,CZ,DK đồng qui tại điểm



Gợi ý: Gọi E, F là trung điểm AC, BD. L là giao điểm của AX và CZ.

Áp dụng định lý Ceva đảo vào tam giác AFC suy ra AX, CZ, FE đồng qui tại L.

Tam giác ECF có cát tuyến ALX suy ra $LF=LE$

Áp dụng định lý Menelaus đảo vào tam giác FEB suy ra D, L, T thẳng hàng.

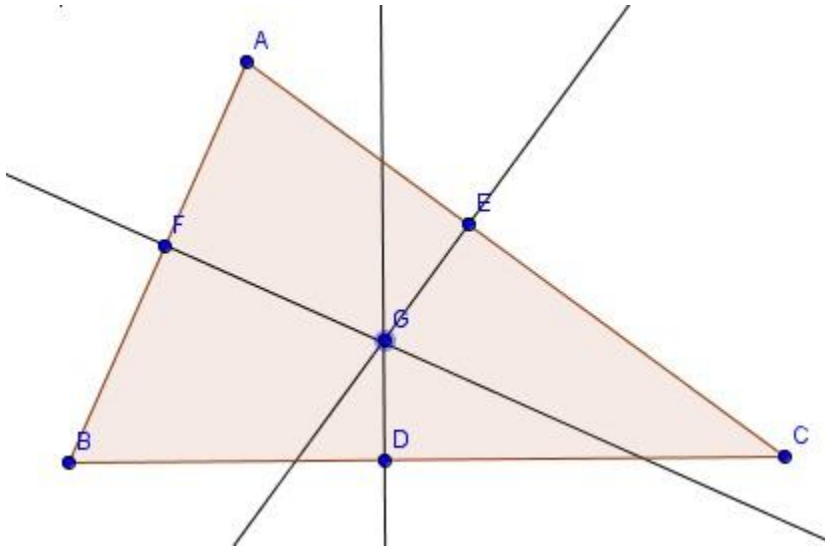
Tương tự với tam giác FED suy ra Y, L, B thẳng hàng.

Vậy AX,DY,CZ,DK đồng qui tại điểm L

Nhận xét: OL vuông góc với DC tại trung điểm của DC.

3. Định lí Carnot:

Cho $\triangle ABC$, D, E, F lần lượt là các điểm trên BC, CA, AB. Gọi x, y, z lần lượt là các đường thẳng đi qua D, E, F và vuông góc BC, CA, AB. x, y, z đồng qui khi và chỉ khi $DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$



Điều kiện đủ: Giả sử x, y, z đồng qui. Gọi G là điểm đồng qui

$$GB^2 - GC^2 + GC^2 - GA^2 + GA^2 - GB^2 = 0$$

$$\text{Tương đương: } DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

Điều kiện cần: Giả sử $DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$ (1)

Vẽ đường vuông góc GF' (F' thuộc AB) tại F'

$$\text{Tương đương: } DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + F'A^2 - F'B^2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } FA^2 - FB^2 = F'A^2 - F'B^2$$

Ta sẽ chứng minh bổ đề: Cho A, B phân biệt và một số k. Chứng minh tồn tại duy nhất điểm F thuộc AB sao cho $FA^2 - FB^2 = k$

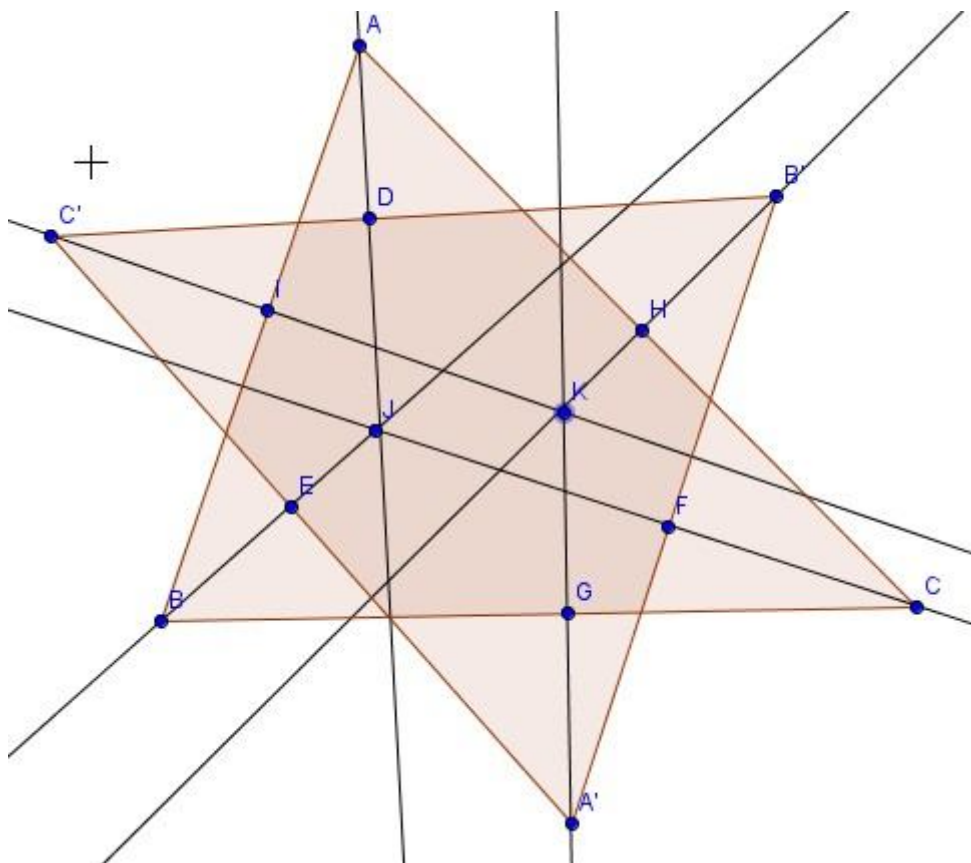
Gọi I là trung điểm AB

$$FA^2 - FB^2 = k \Leftrightarrow 2\overline{BA} \cdot \overline{FI} = k$$

Vậy F là điểm duy nhất thuộc AB thỏa hệ thức. Từ bổ đề này suy ra F trùng F'

Bài tập:

- 1) Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$. Các đường vuông góc hạ từ A', B', C' lên BC, CA, AB là a, b, c . Các đường vuông góc hạ từ A, B, C lên $B'C', C'A', A'B'$ là x, y, z . Chứng minh a, b, c đồng qui khi và chỉ khi x, y, z đồng qui.



Điều kiện cần: Giả sử a, b, c đồng qui

$$\text{Suy ra } GB^2 - GC^2 + HC^2 - HA^2 + IA^2 - IB^2 = 0$$

$$\text{Tương đương: } A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$$

Suy ra x, y, z đồng qui

Điều kiện cần: Giả sử x, y, z đồng qui (chứng minh tương tự)

- 2) M nằm trong $\triangle ABC$. A', B', C' là hình chiếu của M lên BC, CA, AB . D, E, F là hình chiếu của A, B, C lên $B'C', A'C', A'B'$. Chứng minh AD, BE, CF đồng qui.

$$\text{Gợi ý: } AD, BE, CF \text{ đồng qui tương đương: } DB'^2 - DC'^2 + EC'^2 - EA'^2 + FA'^2 - FC'^2 = 0$$

$$\text{Tương đương: } AB'^2 - AC'^2 + BC'^2 - BA'^2 + CA'^2 - CB'^2 = 0 \text{ (định lý Carnot)}$$

- 3) Cho $\triangle ABC$ và đường thẳng d . Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C lên d . Gọi x, y, z lần lượt là các đường thẳng qua A', B', C' vuông góc với BC, CA, AB . Chứng minh x, y, z đồng qui.

Gợi ý: Viết hệ thức Carnot khi x, y, z thẳng hàng rồi dùng định lý Pythagoras cho các tam giác.

- 4) Cho 3 đường tròn $(X), (Y), (Z)$. $(X), (Y); (X), (Z); (Y), (Z)$ giao nhau tại $A, B; C, D; E; F$. Chứng minh AD, BE, CF đồng qui.

Gợi ý: Sử dụng định lý Carnot với tam giác XYZ (AB, CD, EF lần lượt vuông góc với các cạnh của tam giác này).

- 5) Cho $\triangle ABC$, về phía ngoài dựng các tam giác cân $BA'C, AB'C, AC'B$ cân tại A', B', C' . Chứng minh các đường thẳng qua A, B, C vuông góc với $B'C', C'A', A'B'$ đồng qui.

Các đường thẳng qua A, B, C vuông góc với $B'C', C'A', A'B'$ tại M, P, N .

Gợi ý: Áp dụng định lý Pythagoras cho các tam giác MAC', MAB', BPC', CNB' ta có hệ thức: $B'N^2 + NC^2 - C'P^2 - BP^2 = MB'^2 - MC'^2$

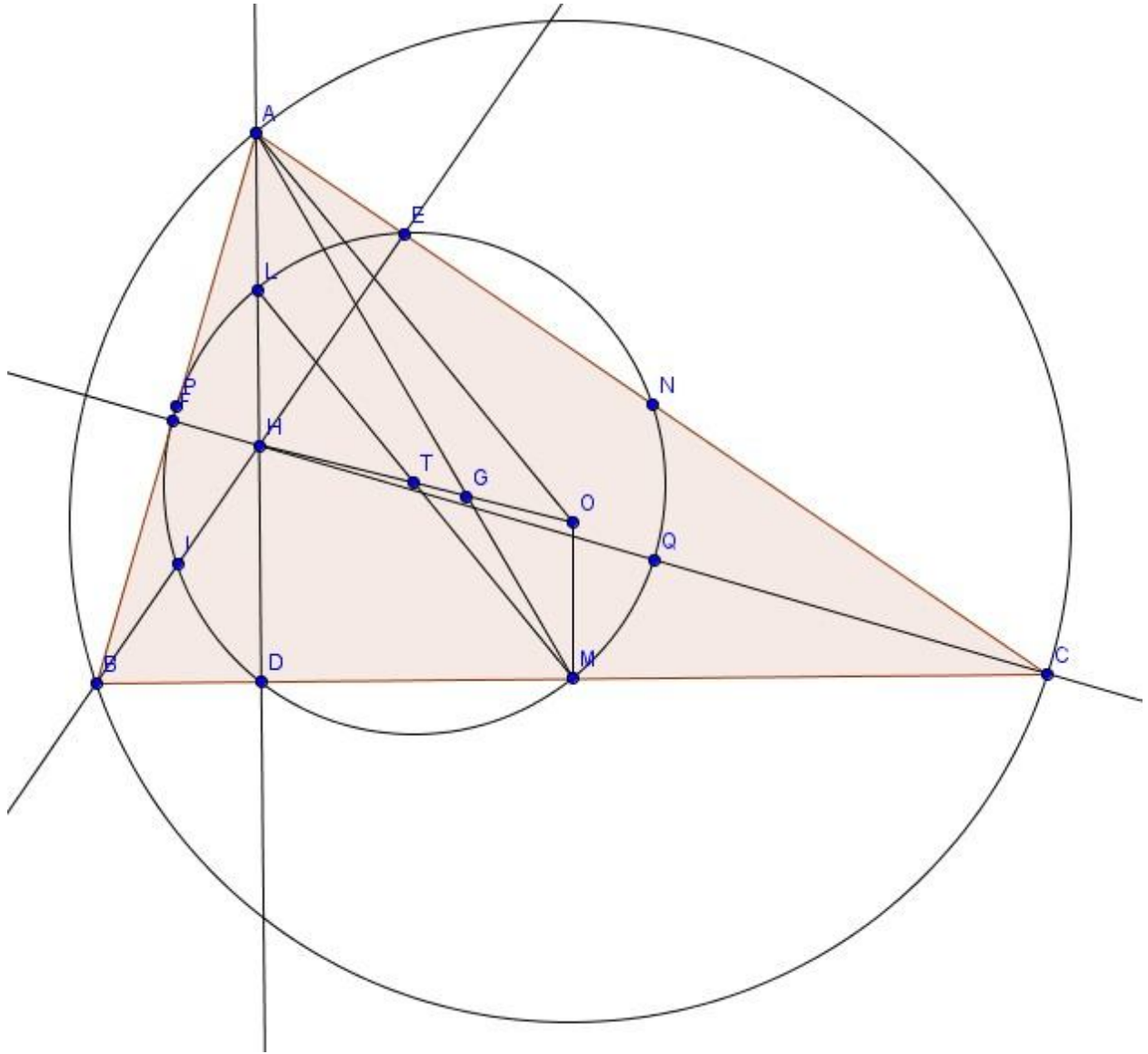
Tương tự cho các hệ thức khác ta có dpcm.

- 6) AA', BB', CC' là các đường cao $\triangle ABC$. Trên AA', BB', CC' lấy các điểm A_1, B_1, C_1 khác trục tâm và không thẳng hàng. Chứng minh các đường thẳng qua A, B, C vuông góc B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 đồng qui.

Gợi ý: Áp dụng định lý Pythagoras cho các tam giác $AA'A_1, CA'A_1$ và các tam giác tương tự. Cộng các hệ thức ta có dpcm.

4. Đường tròn Euler:

Trong một tam giác, trung điểm các cạnh, chân các đường cao, trung điểm các đoạn thẳng nối các đỉnh của tam giác với trực tâm là 9 điểm cùng nằm trên một đường tròn (gọi là đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler).



Ta có: PNQI, PLQM là hình chữ nhật

Suy ra 6 điểm P,N,Q,I,L,M thuộc đường tròn đường kính PQ

Các điểm D,E,F nhìn các đường kính với góc vuông nên D,E,F, P,N,Q,I,L,M cùng thuộc một đường tròn.

- Các tính chất của đường tròn Euler:

a) Tâm T của đường tròn Euler là trung điểm HO (O là tâm đường tròn ngoại tiếp)

Ta có: LH//OM và LH=OM

Suy ra LOMH là hình bình hành

T là trung điểm LM suy ra T là trung điểm OH

b) Đường kính đường tròn Euler bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp:

LT là đường trung bình tam giác AHO suy ra AOML là hình bình hành.

c) Trọng tâm G trên đường thẳng Euler thì $OG=2TG$ (đường thẳng Euler sẽ được chứng minh sau)

$$2TG = 2(OT - OG) = 2\left(\frac{OD}{2} - \frac{OD}{3}\right) = OG$$

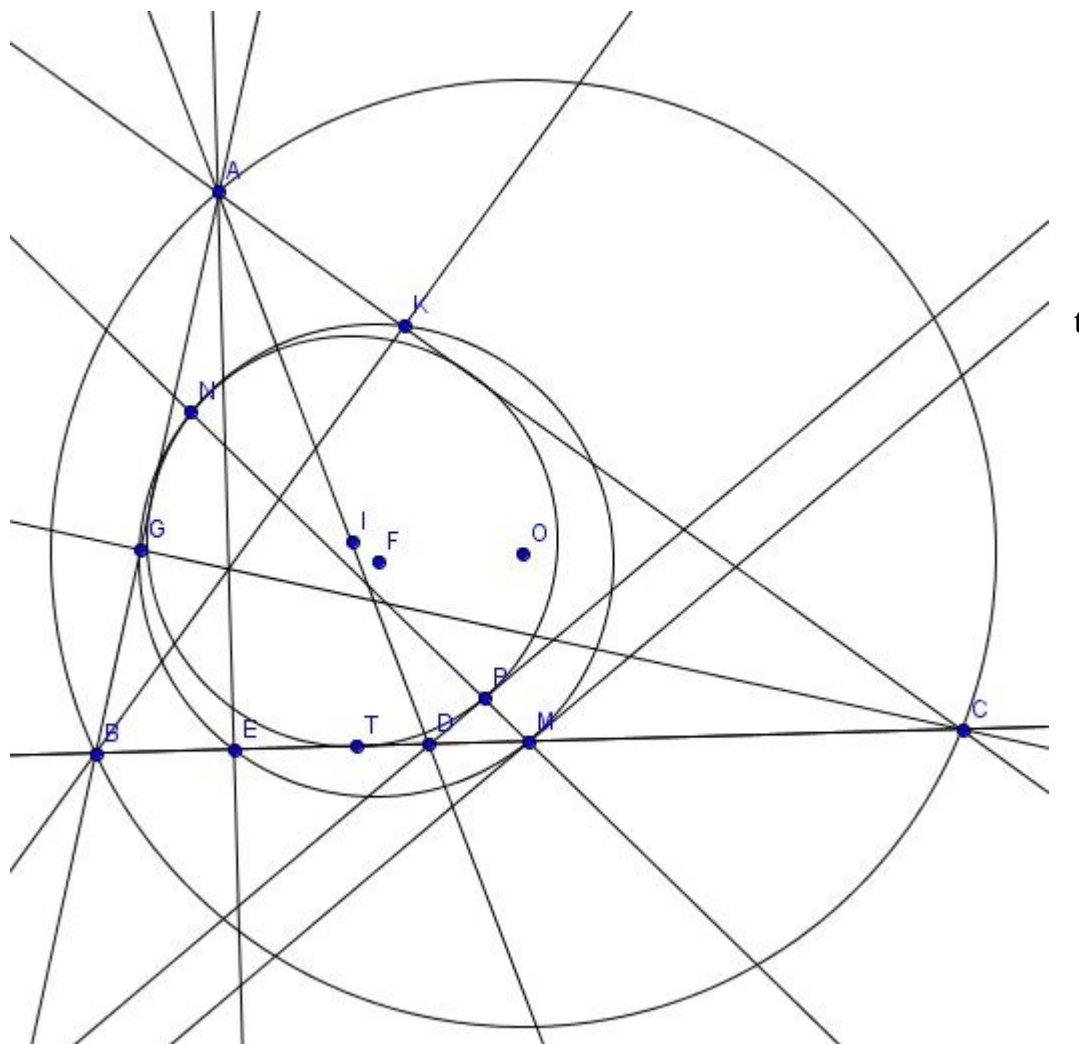
Từ đó ta có $(HGTO) = -1$

d) Khoảng cách từ tâm đường tròn Euler đến trọng tâm tam giác:

$$EG = \frac{1}{6} \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Từ hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ bình phương, sử dụng định lý hàm cos cho các tích vector ta có dpcm.

e) Đường tròn Euler tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp của tam giác (**định lý Feuerbach**).



Gợi ý: Cách 1: F là tâm Euler

- Chứng minh tiếp tuyến Mt của (F) tạo nên $\widehat{tMC} = \hat{B} - \hat{C}$
- DP là tiếp tuyến (F). Chứng minh DP//Mt
- MP cắt (I) tại N. Chứng minh N thuộc (F)
- Chứng minh tiếp tuyến tại N của (I) và (F) trùng nhau

Tương tự cho đường tròn bàng tiếp

Cách 2:

Ta có: $OI^2 = R^2 - 2Rr$

F là trung điểm OH, $IH^2 = 4R^2 - \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c}$

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Ta có: } r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = (ab+bc+ca) - \frac{(a+b+c)^2}{4} - \frac{2abc}{a+b+c}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } IF = \frac{R}{2} - r$$

$$\text{Tương đương } IF^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2$$

$$\text{Tương đương } \frac{2IH^2 + 2IO^2 - OH^2}{4} = \frac{R^2}{4} - Rr + r^2$$

$$\text{Tương đương } 2IH^2 + R^2 = 4r^2 + OH^2$$

Thay OH, IH, R, r bằng các hệ thức trên ta có đpcm

Suy ra đường tròn Euler tiếp xúc với đường tròn nội tiếp, tương tự cho các đường tròn bàng tiếp.

Mở rộng: Nếu H là trực tâm của tứ giác ABCD nội tiếp (O), bán kính R thì đường tròn với tâm E là trung điểm OH, bán kính R/2 được gọi là đường tròn Euler của tứ giác ABCD. Vậy 4 điểm O, M, E, H nằm trên đường thẳng Euler của tứ giác nội tiếp ABCD.

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

Bài tập:

- 1) Cho các tam giác ABC, AHB, BCH, CAH (H là trực tâm tam giác ABC) có chung đường tròn Euler (**định lý Hamilton**).

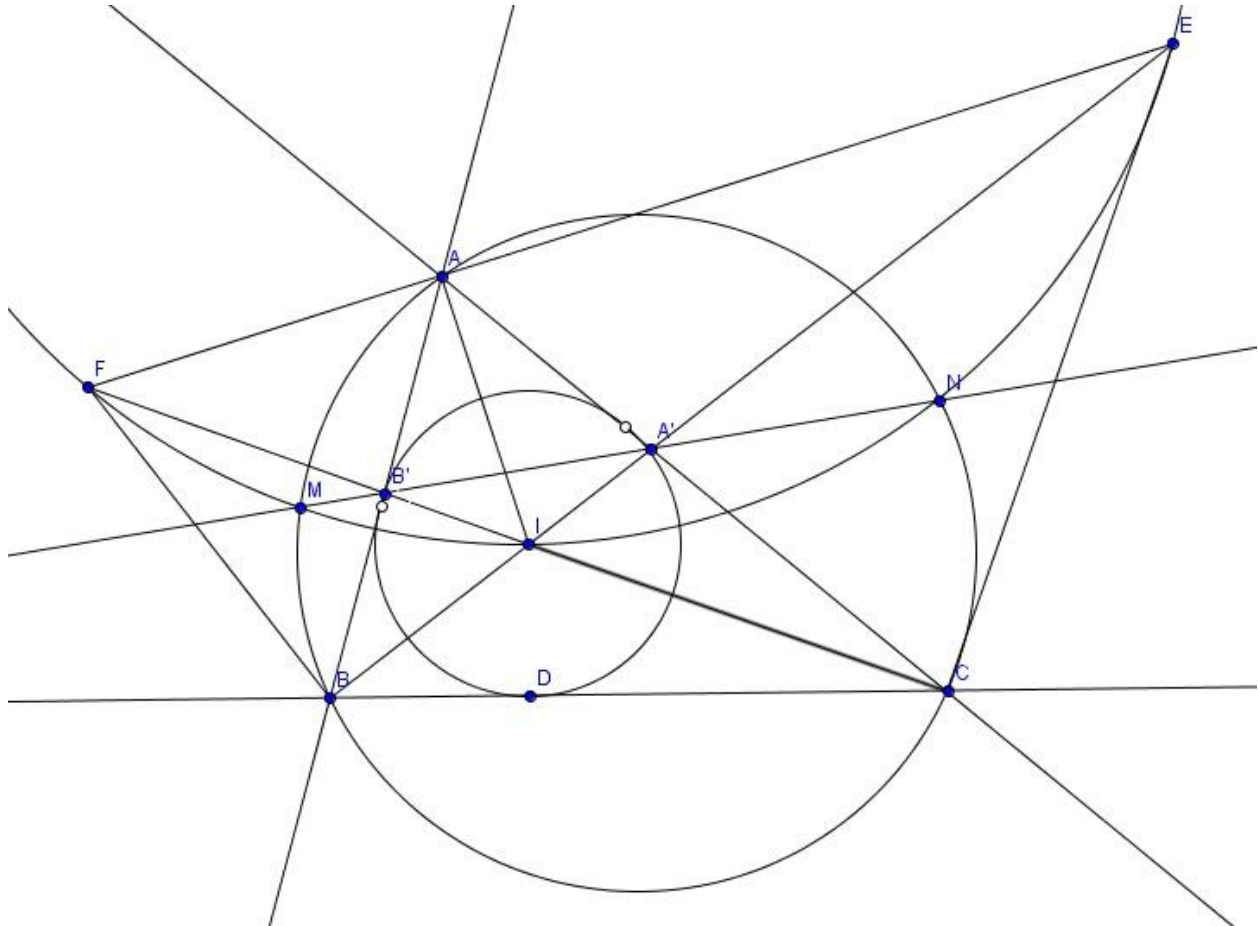
Gợi ý: Các tam giác ABH, ACH, BCH đều có 1 cạnh chứa trung điểm của tam giác ABC và 2 trung điểm 2 cạnh còn lại là những điểm Euler của tam giác ABC. Vậy đường tròn Euler mỗi tam giác có 3 điểm chung với đường tròn Euler tam giác ABC nên tất cả những đường tròn Euler đều trùng nhau.

Hệ quả: Do có chung đường tròn Euler nên 4 tam giác trên có đường tròn ngoại tiếp bằng nhau (4 điểm A, B, C, H là một hệ trục giao).

- 2) Cho tam giác ABC nội tiếp (O), trung tuyến AM. Khi đó đường thẳng qua M vuông góc với AO tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC.

Gợi ý: H là trực tâm, K là trung điểm AH, E là tâm đường tròn Euler thì AOMK là hình bình hành suy ra $AO \parallel EM$

- 3) Tam giác ABC ngoại tiếp (I), phân giác góc B, C cắt AC, AB tại A', B'. A'B' cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ở M, N. Chứng minh $R_{(MIN)} = 2R_{(ABC)}$



Gợi ý: Gọi E, F là tâm bàng tiếp góc B, C. Ta sẽ chứng minh 5 điểm F, M, I, N, E cùng thuộc một đường tròn.

Gọi M', N' là giao điểm của (IEF) và (ABC). Do IA, IB, IC đều là đường cao nên (ABC) là đường tròn Euler của tam giác.

AICE và AIBF là tứ giác nội tiếp

Suy ra $AA' \cdot A'C = IA' \cdot A'E$ và $AB' \cdot B'B = FB' \cdot B'I$ nên A'B' là trục đẳng phương của (IEF) và (ABC) suy ra M', B', A', N' thẳng hàng hay M trùng M', N trùng N'.

Suy ra MIN cùng thuộc (IEF), mà $R_{(IEF)} = 2R_{(ABC)}$ (bán kính đường tròn Euler) dpcm.

- 4) Cho một tam giác ABC và một đường thẳng a bất kì đi qua tâm đường tròn Euler. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ trực tâm và các đỉnh (cùng phía với trực tâm đối với a) đến a bằng tổng các khoảng cách từ các đỉnh còn lại đến a.

Gợi ý: Gọi hình chiếu trên a của A,B,C,H, trung điểm D của BC, trung điểm F của AH là A', B', C', H', D', F'.

Ta có: $DD' = FF'$ (DF đường kính đường tròn Euler)

Mà $2DD' = BB' + CC'$; $2FF' = AA' + HH'$ (nếu A, H ở cùng phía đối với a)

Từ các đẳng thức trên suy ra: $BB' + CC' = AA' + HH'$

Với các trường hợp còn lại ta chứng minh tương tự.

- 5) Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O;R). Gọi A_2, B_2, C_2, D_2 là tâm đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh tứ giác $A_2B_2C_2D_2$ nội tiếp.

Gợi ý:

Bổ đề: Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là trực tâm tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp (O_1).

Gọi M là trung điểm BC thì OM vuông góc BC.

Ta có: $AD_1 = 2OM = DA_1$, $AD_1 // OM // DA_1$, hay $AD = A_1D_1$.

Tương tự ta có $A_1B_1 // AB$, $B_1C_1 // BC$, $C_1D_1 // CD$ suy ra $\widehat{D_1A_1B_1} + \widehat{D_1C_1B_1} = 180^\circ$

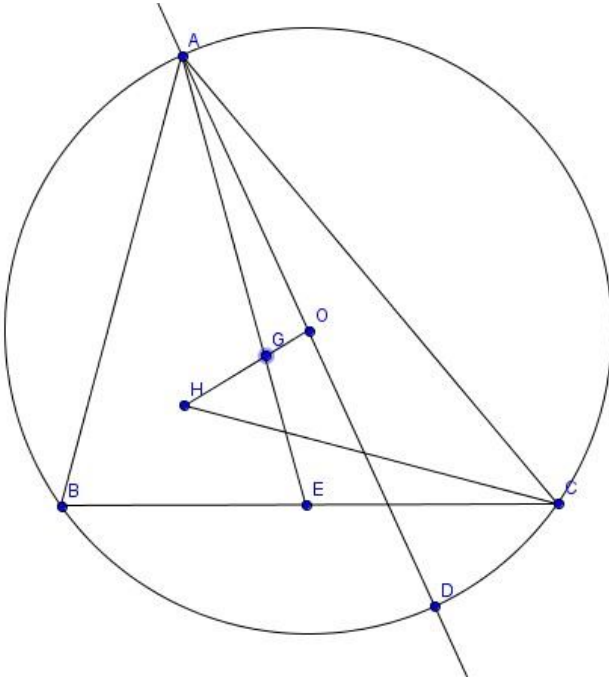
Tâm A_2 đường tròn Euler của tam giác BCD là trung điểm OA_1 . Gọi F là trung điểm của OO_2 .

Suy ra $2FA_2 = A_1O_2 = R$. Tương tự $2FB_2 = 2FC_2 = 2FD_2 = R$.

- 6) (Mở rộng) Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm ngoại tiếp O, các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng 3 đường thẳng Euler của các tam giác AB'C', BA'C', CA'B' và 3 đường tròn Euler của các tam giác AHO, BHO, CHO cùng đi qua 1 điểm trên đường tròn Euler của tam giác ABC (điểm Jebarek).

5. Đường thẳng Euler:

Trong một tam giác, trực tâm H, tâm đường tròn nội tiếp O và trọng tâm G thẳng hàng.



Vẽ đường kính AD, trung điểm E.

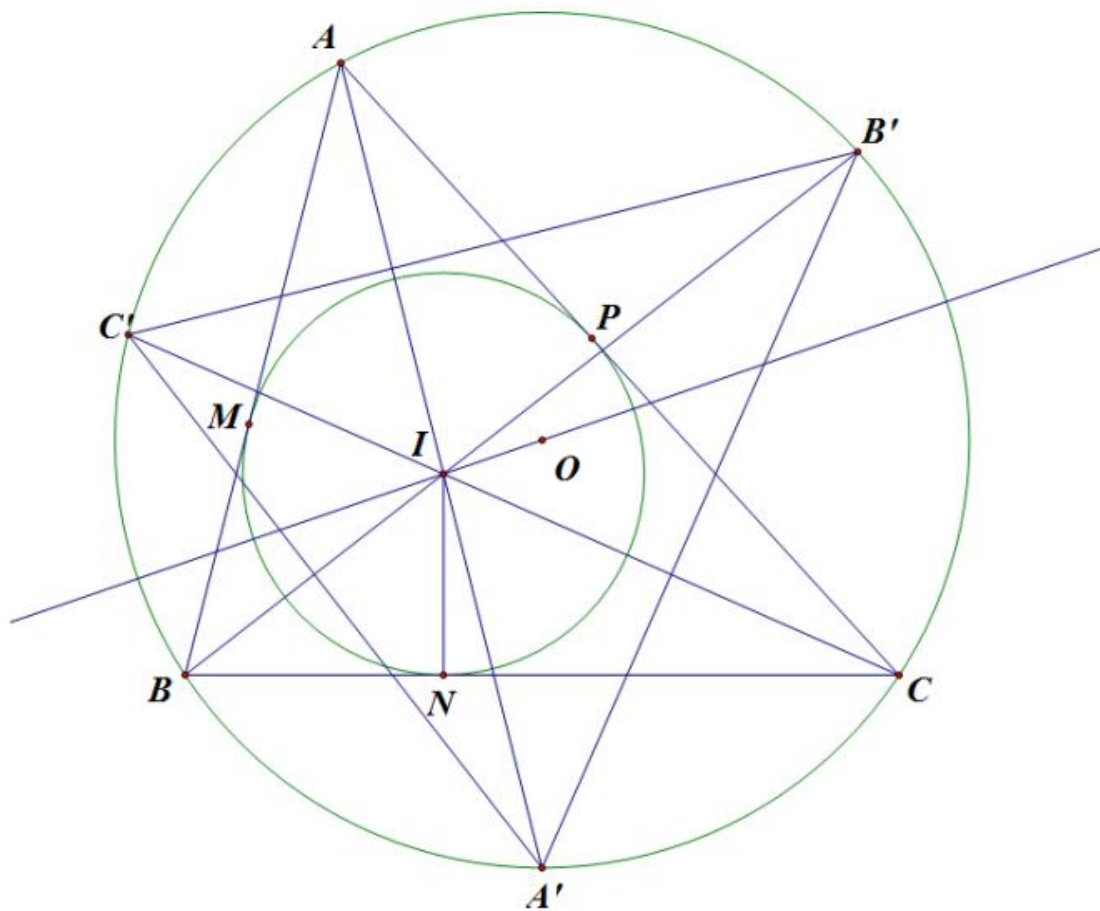
Ta có HCDB là hình bình hành nên E là trung điểm HD.

Suy ra G là trọng tâm tam giác AHD nên H,G,O thẳng hàng và $HG=2HO$.

Từ đây suy ra tâm đường tròn Euler thuộc đường thẳng Euler.

Bài tập:

- 1) Cho tam giác ABC, I là tâm nội tiếp, M, N, P là hình chiếu của I lên AB, BC, CA, O là tâm ngoại tiếp. Chứng minh IO là đường thẳng Euler của tam giác MNP.



Gợi ý: AI, BI, CI cắt (O) tại A', B', C' . Khi đó I là trực tâm của tam giác $A'B'C'$.

Ta có OA' và IN là các vector cùng chiều, tìm hệ thức liên hệ giữa OI và IH .

IH là đường thẳng Euler của tam giác MNP , suy ra dpcm.

- 2) Gọi O và J là tâm đường tròn ngoại tiếp và bàng tiếp góc A của tam giác ABC . (J) tiếp xúc với BC, CA, AB tại M, N, P . Chứng minh JO là đường thẳng Euler của tam giác MNP .

Gợi ý: Gọi H, K, I là giao điểm của (O) với AJ, BJ, CJ . Chứng minh được $HI \parallel NP, KI \parallel MP, HK \parallel MN$.

Mà J là trực tâm tam giác KHI nên JO thuộc đường thẳng Euler của tam giác KHI , J thuộc đường thẳng Euler của tam giác MNP .

Suy ra JO là đường thẳng Euler của MNP .

- 3) Cho tam giác ABC. Gọi A', B' là giao điểm của đường cao từ A, B với (O). Các tiếp tuyến với (O) tại A và A', B và B' cắt nhau tại P, Q. Chứng minh PQ vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Gợi ý: H là trực tâm, kẻ QI vuông góc OH tại I, OQ cắt BB' tại K.

Ta có OI cố định suy ra QI cố định. Kẻ PI' vuông góc OH ta cũng có PI' là đường cố định nên PQ vuông góc với OH.

- 4) Cho tam giác ABC với góc A không vuông. Gọi D là một điểm sao cho $\widehat{DBA} = \widehat{BAC} = \widehat{DCA}$. Chứng minh đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua D.

Gợi ý: Gọi CD cắt AB tại F, AC cắt BD tại E, M, N là trung điểm AB, AC.

Ta có tam giác EAB, FAC cân tại E và F.

Suy ra E, M, O thẳng hàng và F, N, O thẳng hàng. Áp dụng định lý Desargues ta có đpcm.

- 5) Cho tam giác ABC, một điểm M nằm trong mặt phẳng. Chứng minh rằng nếu 3 trong 4 đường thẳng Euler của các tam giác MBC, MCA, MAB, ABC đồng quy thì cả 4 đường thẳng đó đồng quy.

Gợi ý: Tập hợp các điểm thỏa mãn hệ thức:

$$(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$$

Là đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Giả sử đường thẳng Euler của các tam giác MBC, MCA, MAB đồng quy tại S.

$$\text{Ta có: } (b^2 - MA^2)SA^2 + (MA^2 - MC^2)SM^2 + (MC^2 - b^2)SC^2 = 0$$

$$(MA^2 - c^2)SA^2 + (c^2 - MB^2)SB^2 + (MB^2 - MA^2)SM^2 = 0$$

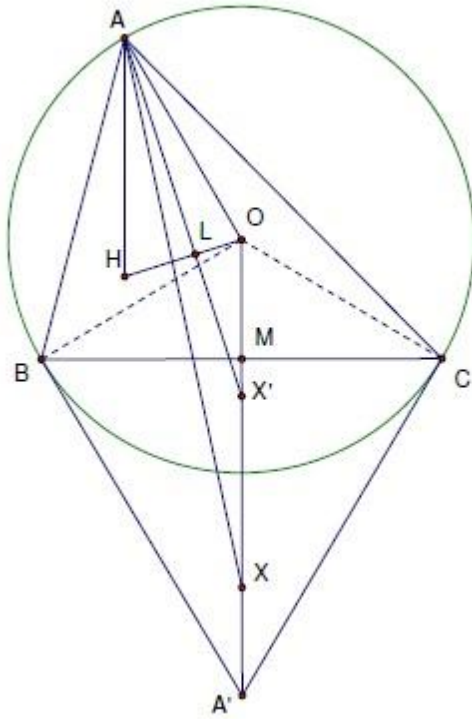
$$(MB^2 - a^2)SB^2 + (a^2 - MC^2)SC^2 + (MC^2 - MB^2)SM^2 = 0$$

$$\text{Cộng 3 về lại ta được: } (b^2 - c^2)SA^2 + (c^2 - a^2)SB^2 + (a^2 - b^2)SC^2 = 0$$

Suy ra S thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

- 6) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Các tiếp tuyến tại A, B, C của (O) giao nhau thành tam giác A'B'C'. Gọi X, Y, Z lần lượt là điểm chia đoạn OA', OB', OC' theo tỉ số

$$\frac{OX}{OA'} = \frac{OY}{OB'} = \frac{OZ}{OC'} = t. \text{ Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng qui.}$$



Gợi ý: Gọi H là trực tâm tam giác ABC, M là trung điểm BC. Giả sử đường đẳng giác của AX trong góc BAC giao OA' tại X', AX' cắt OH tại L.

Do H và O là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC nên $\widehat{OAX'} = \widehat{HAX} = \widehat{AXO}$, $\widehat{OX'A} = \widehat{HAX'} = \widehat{XAO}$ suy ra $\triangle AOX'$ đồng dạng $\triangle XOA$

Suy ra $\overline{OM} \cdot \overline{OA'} = AO^2 = \overline{OX} \cdot \overline{OX'}$ suy ra $\frac{\overline{OX'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OX}} = \frac{1}{t}$

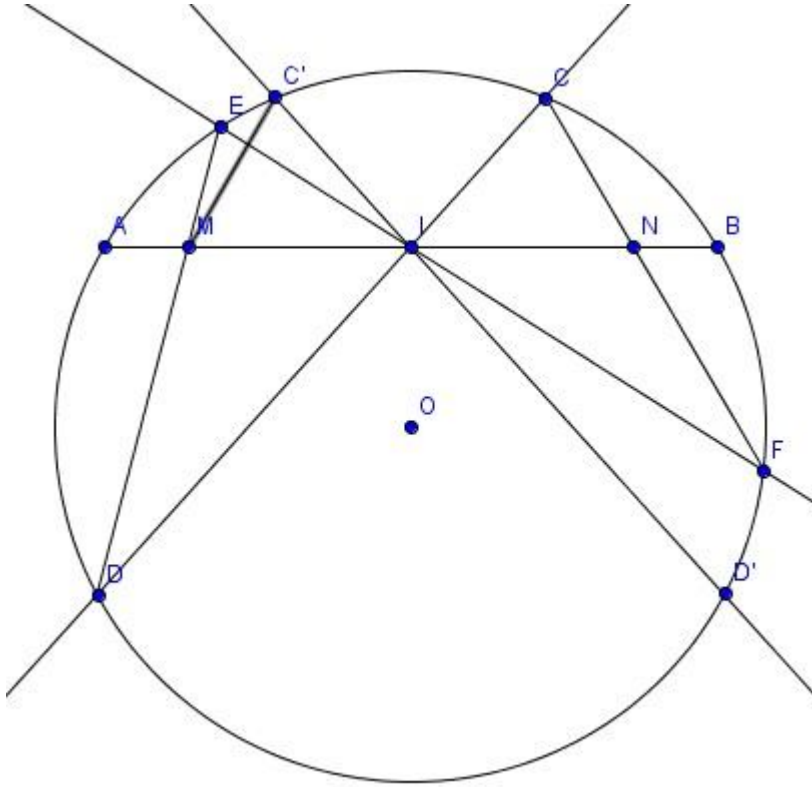
Ta có: $\frac{\overline{OL}}{\overline{LH}} = \frac{\overline{OX'}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{OX'}}{2\overline{OM}} = \frac{1}{2t}$

Vậy AX đi qua điểm liên hợp đẳng giác L' của L trong tam giác ABC. Tương tự BY và CZ cũng đi qua điểm L'. Suy ra dpcm

Nhận xét: Khi $t = 0.5$ thì X, Y, Z là tâm (OBC), (OCA), (OAB) thì AX, BY, CZ đồng qui tại điểm liên hợp đẳng giác của tâm đường tròn Euler trong tam giác ABC (**điểm Kosnita**).

6. Định lý con bướm:

Cho (O) và dây AB có trung điểm I. Qua I vẽ 2 dây cung bất kì CD và EF. DE và CF cắt AB tại M, N. Chứng minh $IM=IN$



Kẻ $C'D'$ đối xứng với CD qua OI .

Chứng minh được tứ giác $EC'MI$ nội tiếp suy ra $\triangle C'MI = \triangle CNI$ (dpcm).

- Định lý con bướm mở rộng với đường tròn:

Cho (O) và điểm I bất kì thuộc dây AB. Qua I vẽ 2 dây cung bất kì CD và EF (C, E nằm về một phía của dây cung AB). CF và DE cắt AB tại M, N. Chứng minh $\frac{1}{IA} + \frac{1}{IN} =$

$$\frac{1}{IB} + \frac{1}{IM}$$

Áp dụng các hệ thức lượng trong đường tròn, ta có kết quả $\frac{AM \cdot IB}{MI} = \frac{AI \cdot NB}{IN}$

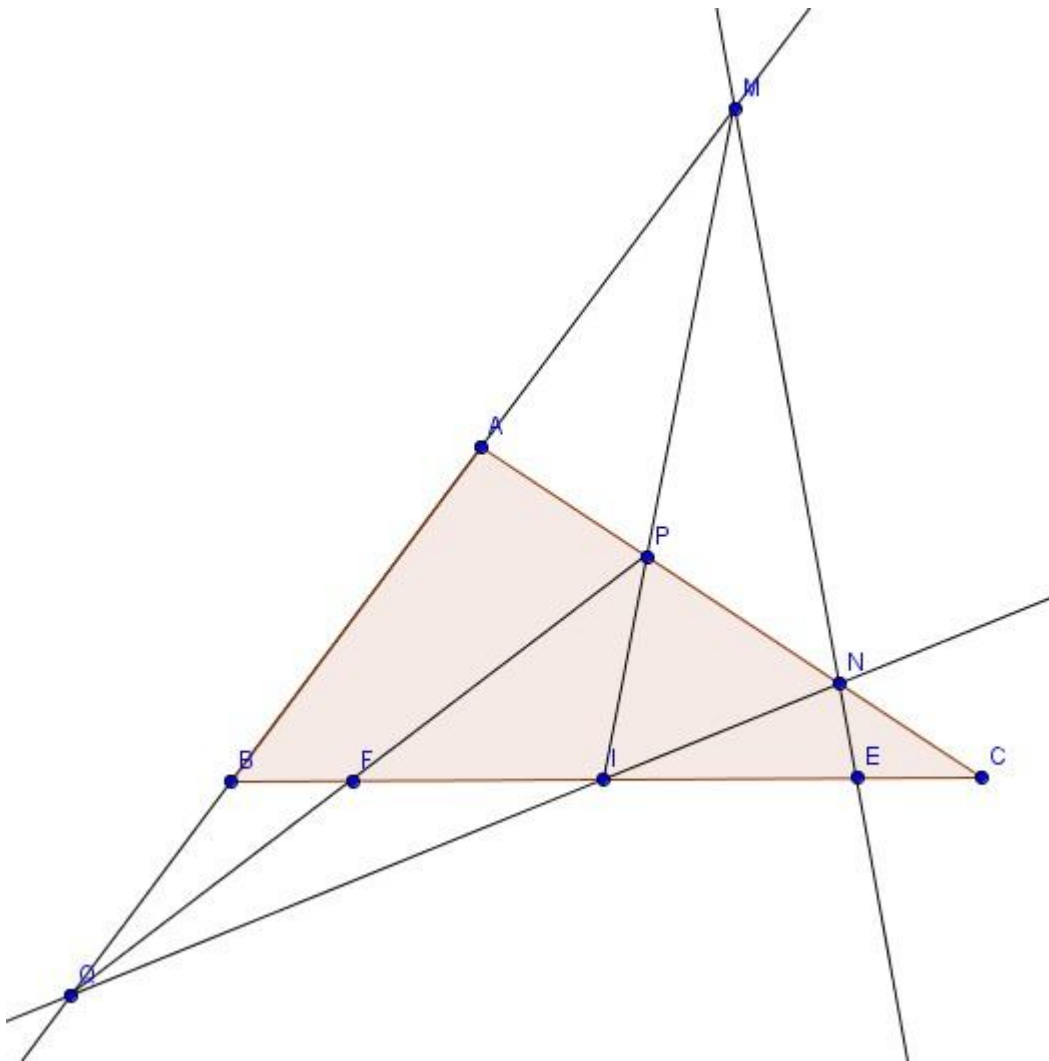
Đặt $IA=a$, $IM=m$, $IN=n$, $IB=b$

Ta có: $\frac{b(a-m)}{m} = \frac{a(b-n)}{n}$ suy ra $abn - bmn = abm - amn$

Chia 2 vế cho $abmn$ ta có dpcm.

- Định lí con bướm với cặp đường thẳng:

Cho tam giác ABC có I là trung điểm BC , M bất kì thuộc AB , MI cắt AC tại P . Q bất kì thuộc AB , QI cắt AC tại N . QP , MN cắt BC tại F , E . Chứng minh $IE=IF$



Dùng 4 lần hệ thức Menelaus cho tam giác ABC với các cát tuyến IPM , NIQ , MNE , PFQ , nhân lại ta có $IE=IF$.

Bài tập:

- 1) Cho tam giác ABC nội tiếp (O), (I) là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng BI, CI cắt đường tròn (O) tại E, F. Gọi K, D lần lượt là giao điểm của AI với EF và BC. Biết $AB + AC = 2BC$. Chứng minh $IK = ID$

Gợi ý: AI cắt (O) tại M

Tam giác MAC đồng dạng với tam giác BAD suy ra $MA = 2MC$

Mà tam giác IMC cân tại M suy ra $IA = IM$ nên $IK = ID$

- 2) Cho tam giác ABC nhọn ($CB > CA$). Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm tam giác ABC, CF là đường cao. Đường thẳng qua F vuông góc với OF cắt AC tại P. Chứng minh $\widehat{FHP} = \widehat{CAB}$

Gợi ý: Ta có $KF = FH$; $QF = FP$. Từ đây dễ dàng suy ra $\widehat{FHP} = \widehat{CAB}$

- 3) Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H, M là trung điểm BC. Đường thẳng qua H và vuông góc với MH cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh tam giác MPQ cân.

Gợi ý: AD, BE, CF là 3 đường cao của tam giác ABC.

Suy ra FECB là tứ giác nội tiếp, EF cắt (M) tại K và N. H là trung điểm KN nên theo định lý con bướm thì $MQ = MP$.

- 4) Cho tam giác ABC có đường cao AD, nội tiếp (O) và có trực tâm H. Đường thẳng qua D và vuông góc với OD cắt AB tại K. Chứng minh rằng $\widehat{DHK} + \widehat{AHC} = 180^\circ$.

Gợi ý: AD cắt (O) tại I, IC cắt KD tại M.

Áp dụng định lý con bướm suy ra $KD = DM$.

$\triangle KDH = \triangle MDI$, từ đó dẫn đến dpcm.

- 5) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), trực tâm H và $\tan B \cdot \tan C = 3$. BH và CH cắt (O) tại B', C'; B'C' cắt AH tại P, AH cắt BC tại D, cắt (O) tại M. Chứng minh rằng P là trung điểm của AH.

Gợi ý: $\tan B \cdot \tan C = 3$ suy ra $\frac{DC}{HD} \cdot \frac{AD}{CD} = 3$ nên $AD = 3HD$.

$AH = HM$ nên theo định lý con bướm $HP = HD$ dẫn đến dpcm.

- 6) Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) và nội tiếp (O), M là trung điểm BC. AM cắt (I) tại K, L. Đường thẳng song song với BC từ K, L cắt (I) tại X, Y. AX cắt BC tại P, AY cắt (O) tại D, DM cắt (O) tại E. Chứng minh E, P, F thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi S, T, U là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB.

Chứng minh được UT, AM, SI đồng qui (SI cắt UT tại N, qua N sẽ d//BC cắt AB, AC tại W, Z, sử dụng tứ giác nội tiếp nên N là trung điểm WZ suy ra A, N, M thẳng hàng).

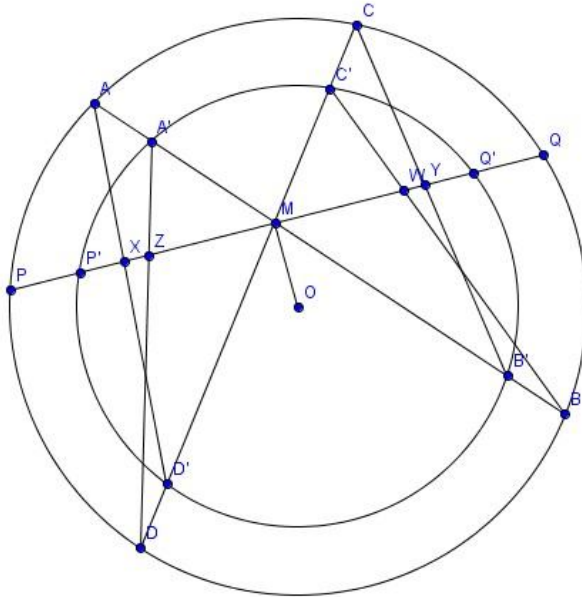
Suy ra $(L, K, N, A) = -1$.

$$\text{Mà } \frac{MP}{MQ} = \frac{AL}{AK} \cdot \frac{KX}{YL} = \frac{AL}{AK} \cdot \frac{KN}{NL} \text{ nên } MP = MQ.$$

EF cắt BC tại P' thì tho định lí con bướm $MQ = MP'$. Từ đó suy ra E, P, F thẳng hàng.

- 7) Cho hai đường tròn đồng tâm O, một đường thẳng cắt 2 đường tròn tại P, Q và P', Q', M là trung điểm PQ và P'Q'. Qua M vẽ hai đường thẳng AA'B'B và CC'D'D. X, Y, Z, W là giao điểm của PP'Q'Q với AD', B'C, A'D, BC'. Chứng minh

$$\frac{1}{MX} + \frac{1}{MZ} = \frac{1}{MY} + \frac{1}{MW}$$



Gợi ý: Ta sẽ chứng minh bổ đề: Cho tam giác RST, U thuộc ST. Đặt $\widehat{SRU} = a$, $\widehat{URT} = b$.

Chứng minh $\frac{\sin(a+b)}{RU} = \frac{\sin a}{RT} + \frac{\sin b}{RS}$ (diện tích).

Đặt $\widehat{AMP} = a$, $\widehat{PMD} = b$ áp dụng bổ đề cho các tam giác AMD', A'MD, B'MC và BMC':

$$\frac{\sin(a+b)}{MX} = \frac{\sin a}{MD'} + \frac{\sin b}{MA}$$

$$\frac{\sin(a+b)}{MZ} = \frac{\sin a}{MD} + \frac{\sin b}{MA'}$$

$$\frac{\sin(a+b)}{MY} = \frac{\sin a}{MC} + \frac{\sin b}{MB'}$$

$$\frac{\sin(a+b)}{MW} = \frac{\sin a}{MC'} + \frac{\sin b}{MB}$$

Vậy điều ta cần chứng minh:

$$\frac{\sin a}{MD'} + \frac{\sin b}{MA} + \frac{\sin a}{MD} + \frac{\sin b}{MA'} = \frac{\sin a}{MC} + \frac{\sin b}{MB'} + \frac{\sin a}{MC'} + \frac{\sin b}{MB}$$

$$\text{Hay } \sin b \left(\frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} \right) + \sin b \left(\frac{1}{MA'} - \frac{1}{MB'} \right) = \sin a \left(\frac{1}{MC} - \frac{1}{MD} \right) + \sin a \left(\frac{1}{MC'} - \frac{1}{MD'} \right)$$

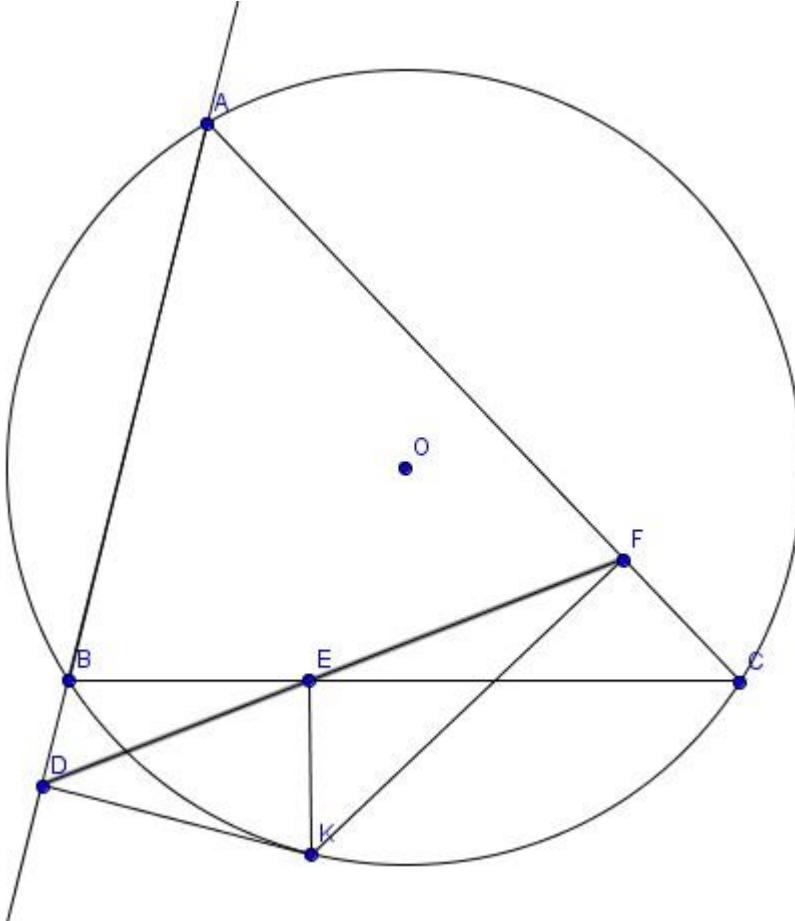
Mà $MB - MA = MB' - MA' = 2OM \cdot \sin a$ và $MD - MC = MD' - MC' = 2OM \cdot \sin b$, kết hợp với hệ thức trên ta có:

$$\frac{1}{MA \cdot MB} + \frac{1}{MA' \cdot MB'} = \frac{1}{MC \cdot MD} + \frac{1}{MC' \cdot MD'}$$

Theo phương tích đường tròn ta có đpcm.

7. Đường thẳng Simson:

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O), K là điểm thuộc cung BC nhỏ. Gọi D, E, F là hình chiếu từ K đến AB, BC, CA. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.



Lần lượt chứng minh các tứ giác BEKD, EFCK nội tiếp

Ta có $\triangle BKD \sim \triangle CKF$ nên $\widehat{BED} = \widehat{FEC}$

Suy ra D, E, F thẳng hàng.

Bài toán này đảo lại vẫn đúng (có thể dùng định lý Menelaus để chứng minh).

Mở rộng: Lấy điểm M bất kì trong mặt phẳng chứa A, B, C. D, E, F là hình chiếu của M xuống AB, BC, CA. Khi đó đường tròn Simson của M với tam giác ABC là đường tròn đi qua 3 điểm D, E, F. Khi M thuộc đường tròn ngoại tiếp thì đường tròn Simson suy biến thành đường thẳng.

Bài tập: Kí hiệu $M(ABC)$ là đường thẳng Simson điểm M của 3 cạnh tam giác ABC

- 1) Cho tứ giác ABCD, AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. (BCE) cắt (CDF) tại M. Chứng minh hình chiếu của M lên AB, BC, CD, DA thẳng hàng.

Gợi ý: Chứng minh bốn đường (BCE), (CDF), (ADE), (ABF) cùng đi qua điểm M

Ta có: $\widehat{EMC} = 180^\circ - \widehat{ABF} = \widehat{EBC}$ suy ra M thuộc (ABF)

Tương tự cho (ADE) ta chứng minh được bốn đường.

Quay lại bài toán, áp dụng đường thẳng Simson của M cho 4 đường tròn (BCE), (CDF), (ADE), (ABF) có đpcm.

- 2) Tam giác ABC nội tiếp (O). AD là tia phân giác góc A (D thuộc (O)). (K) đi qua 2 điểm A, D (K không thuộc AD) cắt AB, AC tại M, N. I, J là trung điểm BC, MN. Chứng minh IJ vuông góc AD.

Gợi ý: Vẽ DH, DK vuông góc AB, AC thì HK vuông góc với AD.

Ta có: DB=DC, DM=DN.

Suy ra DI, DJ vuông góc với BC, MN tại I, J. Theo đường thẳng Simson thì K, I, H và K, J, H thẳng hàng suy ra IJ vuông góc AD.

- 3) Tam giác ABC nội tiếp (O), K thuộc cung BC nhỏ. Gọi D, E, F là hình chiếu từ K đến AB, BC, CA, trực tâm H. Chứng minh K(ABC) cắt HK tại 1 điểm thuộc đường tròn Euler tam giác ABC.

Gợi ý: Gọi W là tâm đường tròn Euler, K(ABC) cắt HK tại T.

Ta có T là trung điểm HK (sẽ chứng minh sau ở mục đường thẳng Steiner), W là trung điểm HO. Suy ra $2EW=R$ nên T thuộc (E).

- 4) Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường kính MN di động. Chứng minh M(ABC) và N(ABC) vuông góc nhau tại T và T thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC.

Gợi ý: M(ABC) vuông góc N(ABC) dùng các tứ giác nội tiếp.

M(ABC), N(ABC) cắt AB, BC, CA tại D, E, F và X, Y, Z. Gọi R, U, S là trung điểm AB, BC, CA.

Chứng minh được $AZ=FC$, $BE=CY$, $AX=BD$.

Ta sẽ chứng minh $\widehat{STU} = 180^\circ - \widehat{ACB}$

Tương đương $\widehat{STZ} + \widehat{ETU} = 90^\circ - \widehat{ACB}$.

- 5) Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Chứng minh A(BCD), B(CDA), C(DAB), D(ABC) đồng qui.

Gợi ý: Gọi H_A là trực tâm tam giác BCD.

Suy ra A(BCD) đi qua trung điểm AH_A .

Tương tự cho các đường Sinson còn lại.

Chứng minh được AH_BH_AB là hình bình hành suy ra trung điểm AH_A và BH_B trùng nhau (dpcm).

- 6) Cho tứ giác ABCD nội tiếp, AC cắt BD tại O, E, F là trực tâm tam giác ACD và BCD. FD cắt CE tại P. Chứng minh F(ECD), E(FCD) và OP đồng qui.

Gợi ý: ABFE là hình bình hành suy ra AF cắt BE tại trung điểm S mỗi đường.

Ta có: A, B là trực tâm hai tam giác CDE, CDF nên theo bổ đề bài 3 ta có F(ECD), E(FCD) đi qua S. Vậy ta chỉ cần chứng minh S, O, P thẳng hàng.

Gọi I, J là trung điểm AC, BD. Ta có: $SJ \parallel DE$ suy ra SJ vuông góc với AC. Tương tự với IS nên SO là đường cao thứ ba.

Mà O, P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (J) nên S, O, P thẳng hàng.

- 7) Cho tam giác ABC và gọi tia đối của tia BA, CA tương ứng là Bx, Cy. Xét M nằm bên trong miền mặt phẳng không chứa A, được giới hạn bởi đoạn BC, tia Bx, tia Cy. Giả sử các điểm P, K, H thuộc BC, CA, AB sao cho mỗi bộ 4 điểm (M, B, P, H) và (M, C, P, K) nằm trên một đường tròn thì $\widehat{BAC} + \widehat{BMC} = \widehat{MPH} + \widehat{MPK}$ (1) (KH nằm về hai phía của đường thẳng MP).

Gợi ý: Xét tứ giác ABMC có $\widehat{BAC} + \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{ABM} + 180^\circ - \widehat{ACM}$

Suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{BMC} = \widehat{MBx} + \widehat{MCy}$ (2)

Xét vị trí của điểm P trên đường thẳng BC.

TH1: P thuộc đoạn BC:

Ta có: $\widehat{MBx} = \widehat{MPH}$, $\widehat{MCy} = \widehat{MPK}$

Thế vào (2) ta có (1).

TH2: P thuộc tia Bt, tương tự TH1.

TH3: P thuộc tia Ct (tia đối của tia CB), xét tương tự trường hợp (2).

Nhận xét: Nếu M nằm trên cung BC thì không chứa A thì H, P, K thẳng hàng. Đường thẳng này gọi là đường thẳng Simson loại 2 của tam giác ABC ứng với điểm M và đường thẳng MP. Khi MP cắt BC tại P xác định thì các điểm H, K cũng được xác định bởi (M, B, P) và (M, C, P). Vậy đường thẳng Simson loại 1 là trường hợp đặc biệt của đường thẳng Simson loại 2, khi đó MP vuông góc BC.

8) (Romania TST 2012) Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) sao cho 2 tam giác BCD và CDA không đều. Chứng minh rằng nếu A(BCD) vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác BCD tương đương B(ACD) vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ACD.

Gợi ý: Giả sử B(ACD) vuông góc với đường thẳng Euler tam giác BCD.

Gọi H, H' là trực tâm tam giác ACD và BCD. AH, BH' cắt (O) tại Y, X. Gọi M, M' là trung điểm của AX, BY.

Ta có: AX//B(ACD) nên H, M, O thẳng hàng suy ra tam giác AHX cân tại H.

Tứ giác ABH'H là hình bình hành, ABXY là hình thang cân suy ra tứ giác HH'XY nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HAX} = \widehat{HXA} = \widehat{BYH'} = \widehat{YBX}$ nên tam giác BH'Y cân tại H'.

Suy ra H'M' vuông góc với BY, mà BY//B(ACD) nên B(ACD) vuông góc với OH' (dpcm).

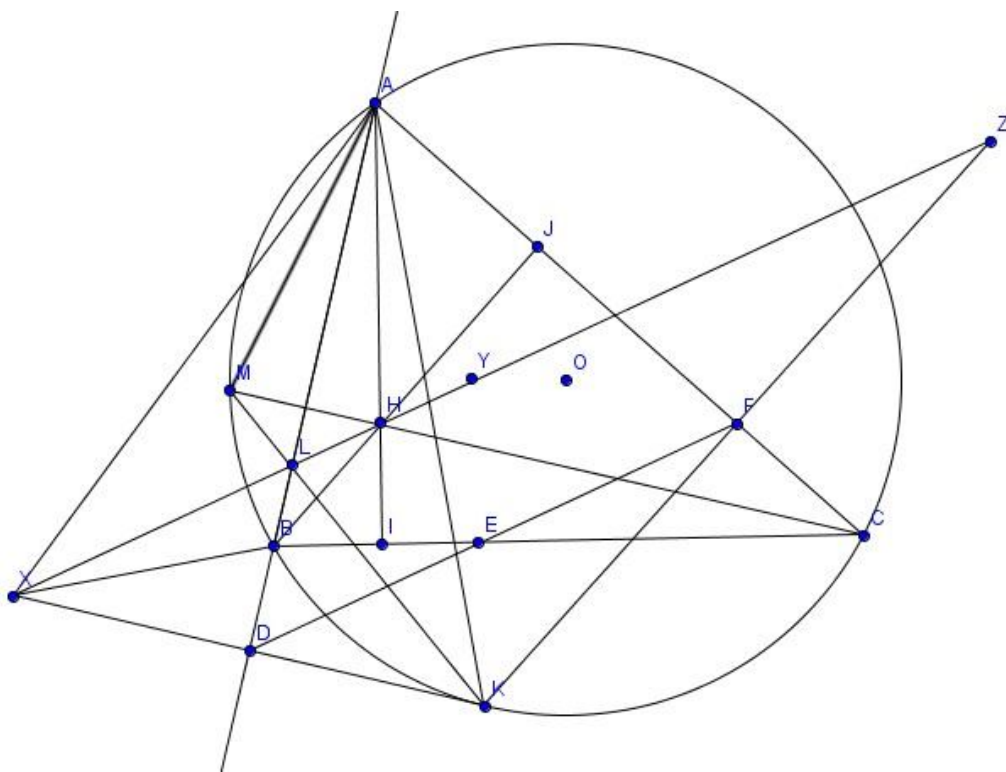
8. Đường thẳng Steiner:

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O), K là điểm thuộc cung BC nhỏ. Gọi M, N, P là điểm đối xứng của K qua AB, BC, CA. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Gọi giao điểm của các đường đối xứng với AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Do D, E, F thẳng hàng (đường thẳng Simson) nên M, N, P cũng thẳng hàng.

Kí hiệu $M(t)(ABC)$ là đường thẳng Steiner từ M đến 3 cạnh tam giác ABC

Tính chất 1: Đường thẳng Steiner luôn đi qua điểm cố định là trực tâm của tam giác ABC.



Gọi X, Y, Z là điểm đối xứng của K qua AB, BC, CA, đường cao BJ, BJ cắt XZ tại H, AH cắt BC tại I.

Cách1: Ta có $K(ABC) \parallel K(t)(ABC)$ và $KZ \parallel BJ$ suy ra AHBX là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{AKB} = \widehat{AXB} = \widehat{BHI}$ nên tứ giác HJCI nội tiếp.

Suy ra AI là đường cao và H là trực tâm (dpcm).

Cách 2: H là trực tâm, CH cắt (O) tại M

Ta có $\triangle AMK = \triangle AHX$ nên $\widehat{AMK} = \widehat{AHX}$, tương tự cho điểm T của BH. Tứ giác ATKM nội tiếp nên $\widehat{AHX} + \widehat{AHZ} = 180^\circ$.

Hệ quả: Gọi W là trung điểm của KH thì K(ABC) và W thẳng hàng.

Cách 3: AH cắt (O) tại H', KY cắt (O) tại K' suy ra AK'KH' là hình thang cân.

Mà HY đối xứng với H'K' qua BC nên AK'//HY.

Bổ đề: Nếu KY cắt (O) tại K' thì AK'//K(ABC):

Ta có: $\widehat{AK'K} = \widehat{ACK} = \widehat{K'EF}$ nên AK'//K(ABC). Từ đây ta có H thuộc K(t)(ABC).

Tính chất 2: Đường thẳng Steiner vuông góc với đường thẳng Gauss (được định nghĩa ở bài 4 định lý Menelaus):

Vẽ tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Gọi H, K là trực tâm các tam giác CDF, CBE và M, N là trung điểm của BD, EF.

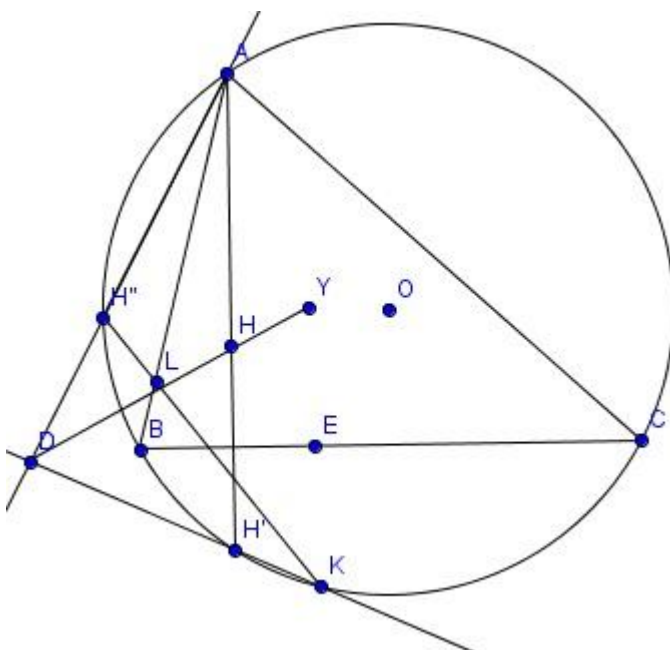
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BF}$$

Tương đương:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{HK} &= \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{DE}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BK}) + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EK}) \\ &= \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{aligned}$$

Định lý ngược lại của đường thẳng Steiner:

Định lý Collings hay điểm anti- Steiner:



Cho tam giác ABC và trực tâm H. Một đường thẳng d qua H. d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng đối xứng với d qua AB, BC, CA. Khi đó d_1, d_2, d_3 đồng qui tại điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. K được gọi là điểm anti-Steiner của d đối với tam giác ABC.

K là giao điểm của d_1, d_2 . AH và CH cắt (O) tại H' và H'' . Do tính đối xứng nên AB, d, KH'' đồng qui tại L.

Ta có: $\widehat{AH''L} = \widehat{AHL} = \widehat{YHH'} = \widehat{HH'K}$ nên tứ giác $AH''H'K$ nội tiếp (O). Vậy K thuộc (O).

Tính chất: Cho một điểm P thuộc d. X, Y, Z là điểm đối xứng của P qua cạnh BC, CA, AB. Chứng minh (A, Y, Z), (B, X, Z), (C, X, Y) cùng đi qua điểm K.

Chứng minh được $\widehat{2BAC} = \widehat{YAZ}$ nên K thuộc (A, Y, Z), tương tự cho các đường tròn còn lại.

Bài tập:

- 1) Cho tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Chứng minh trục tâm của các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF cùng nằm trên một đường thẳng.

Gợi ý: Từ kết quả bài 1 của đường thẳng Simson và tính chất của đường thẳng Steiner, dựng các đường thẳng Steiner của M lên các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF ta có dpcm.

- 2) Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) có $AB=AD$, M, N nằm trên cạnh BC, CD sao cho $MN = BM + DN$, AM, AN cắt (O) tại P, Q. Chứng minh trục tâm tam giác APQ nằm trên MN.

Gợi ý: Trên tia đối của DC lấy E thỏa $ED=BM$.

Suy ra $MN=NE$ nên $\triangle ADE = \triangle ABM$.

Suy ra $\triangle AEN = \triangle AMN$. Từ đây ta có MN là đường thẳng Steiner của tam giác APQ nên nó đi qua trục tâm.

- 3) Cho tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Hai đường tròn đường kính AC, BD cắt nhau tại I, K. Chứng minh E, F, I, K thuộc một đường tròn.

Gợi ý: Gọi H là trực tâm của tam giác BCE, M, N, P là hình chiếu của H lên EC, EB, BC nên ta có $EH.HP = CH.HN = BH.HM$.

Tương tự cho các tam giác CDF, ABF, ADE suy ra 3 đường tròn đường kính BD, AC, EF có chung trục đẳng phương (đường thẳng Steiner cho tứ giác- bài 1) nên IK là dây chung của 3 đường tròn.

- 4) Cho tam giác ABC, qua A, B, C vẽ các đường thẳng d_1, d_2, d_3 song song với đường thẳng Euler của tam giác. Gọi d_1', d_2', d_3' đối xứng với d_1, d_2, d_3 qua BC, CA, AB. Khi đó d_1', d_2', d_3' đồng qui tại T (**điểm Parry reflection**).

Gợi ý: Gọi A', B', C' đối xứng với (O) qua A, B, C. Do tính đối xứng nên đường thẳng Euler của tam giác ABC và $A'B'C'$ trùng nhau.

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua BC nên A_1 thuộc d_1 , AA_1 cắt BC và $B'C'$ tại D và F.

$$\text{Ta có: } \overline{HA_1} = \overline{AA_1} - \overline{AH} = 2(\overline{AH} + \overline{HD} - \overline{OE}) = 2(\overline{OE} + \overline{HD}) = 2\overline{HF}$$

Suy ra d_1' đối xứng với đường thẳng Euler của tam giác $A'B'C'$ qua $B'C'$. Tương tự cho các đường thẳng còn lại nên theo định lý Collings ta có dpcm.

- 5) Cho hai đường thẳng bất kì vuông góc tại trực tâm tam giác ABC, cắt cạnh BC, CA, AB tại X, X', Y, Y', Z, Z'. Khi đó M, N, P là trung điểm của XX', YY', ZZ' thẳng hàng (đường thẳng Droz- Farny).

Gợi ý: Gọi H_a, H_b, H_c là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB nên H, H_a, H_b, H_c đều thuộc (O).

$$\text{Ta có: } \widehat{XH_aX'} = \widehat{XHX'}, \widehat{YH_bY'} = \widehat{YHY'}, \widehat{ZH_cZ'} = \widehat{ZHZ'}.$$

Suy ra H_a, H_b, H_c lần lượt thuộc đường tròn đường kính XX', YY', ZZ' .

Theo định lý Collings ta có đồng qui tại XH_a, YH_b, ZH_c đồng qui tại T thuộc (O).

Bổ đề: Cho tam giác ABC và M, N, P nằm trên BC, CA, AB. Chứng minh (APN), (BPM), (CMN) đồng qui (**định lý Michel**).

Gọi S là giao điểm của (BPM), (CMN).

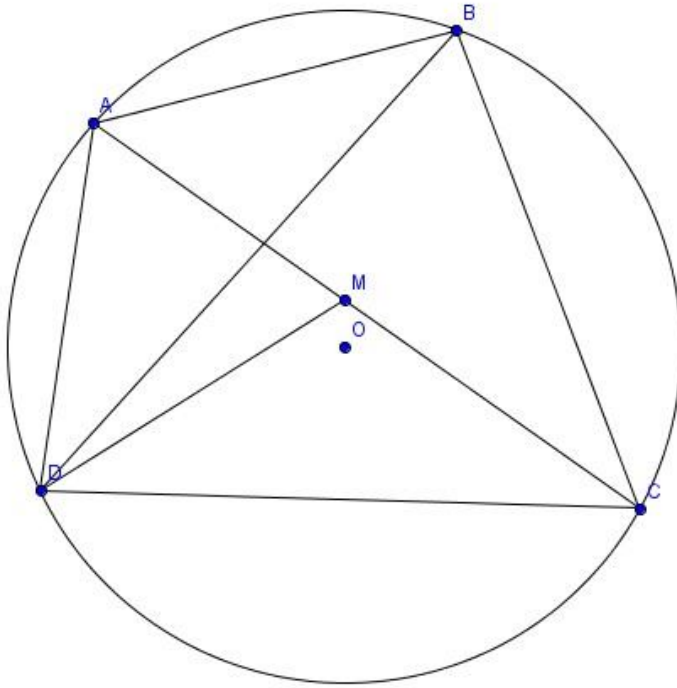
Ta có: $(SN, SP) = (SN, SM) + (SM, SP) = (CN, CM) + (BM, BP) = (CA, CB) + (BC, BA) = (AN, AP)$ nên S thuộc (APN).

Áp dụng định lý Michel vào tam giác PYZ có H, H_b, H_c nên ta có $(PH_bH_c), (ZHH_c), (YHH_b)$ đồng qui.

Tương tự ta có (O), đường tròn đường kính XX', YY' đồng qui và (O), đường tròn đường kính XX', ZZ' đồng qui nên đường tròn đường kính XX', YY', ZZ' đồng qui suy ra M, N, P thẳng hàng.

9. Định lý Ptoleme:

Tứ giác lồi ABCD nội tiếp một đường tròn khi và chỉ khi tổng của tích các cặp đối bằng tích hai đường chéo, tức $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.



Cách 1: Lấy M thuộc đường chéo AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$

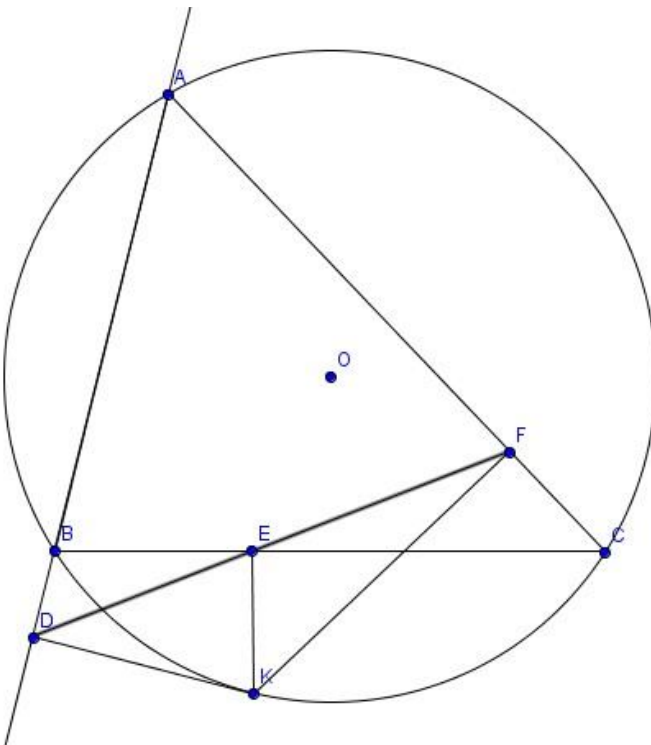
Suy ra $\triangle ABD$ đồng dạng $\triangle MBC$

Suy ra $AD \cdot BC = BD \cdot MC$

Tương tự $AB \cdot CD = BD \cdot AM$

Cộng lại ta có đpcm.

Cách 2: Áp dụng đường thẳng Simson:



Ta có D, E, F thẳng hàng và $DE + EF = DF$ (1)

$DE = BK \cdot \sin B$; $EF = KC \cdot \sin C$;
 $DF = AK \cdot \sin A$ (2)

Mà $AB = 2R \cdot \sin C$; $AC = 2R \cdot \sin B$;
 $BC = 2R \cdot \sin A$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có
 $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$

- Bất đẳng thức Ptoleme:

Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$

Dựng điểm E sao cho tam giác BCD đồng dạng với tam giác BEA.

$$\text{Suy ra } BA.CD = EA.BD \quad (4)$$

Hai tam giác EBC và ABD cũng đồng dạng

$$\text{Suy ra } AD.BC = EC.BD \quad (5)$$

Cộng (4) và (5) ta suy ra $AB.CD + AD.BC = BD.(EA+EC)$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta suy ra $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, E, C thẳng hàng, tức là khi A và D cùng nhìn BC dưới 1 góc bằng nhau, và khi đó tứ giác ABCD nội tiếp.

Bài tập:

- 1) Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA, AC, BD là a, b, c, d, m, n. Chứng minh $m^2.n^2 = a^2.c^2 + b^2.d^2 - 2abcd.\cos(A+C)$ (**định lí Bretschneider**).

Gợi ý: Trên cạnh AB ra phía ngoài dựng tam giác AKB đồng dạng với tam giác ACD, trong đó $\widehat{BAK} = \widehat{DAC}$, $\widehat{ABK} = \widehat{CAD}$, trên cạnh AD dựng tam giác AMD đồng dạng với tam giác ABC, $\widehat{DAM} = \widehat{BCA}$, $\widehat{ADM} = \widehat{CAB}$. Từ các tỉ lệ của tam giác đồng dạng, áp dụng định lí hàm số cos cho tam giác KAM.

- 2) Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Chứng minh $BD^2.S_{ACD} = CD^2.S_{ABD} + AD^2.S_{BCD}$ (**hệ thức Feuerbach**).

Gợi ý: Dùng công thức diện tích nên:

$$BD^2.AC.AD.CD = CD^2.AB.AD.BD + AD^2.BC.BD.CD \text{ suy ra dpcm.}$$

- 3) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O; R) và ngoại tiếp (I; r). Gọi x, y, z là khoảng cách từ O đến BC, CA, AB. Chứng minh $x+y+z = R + r$ (**hệ thức Carnot**).

Gợi ý: D, E, F là trung điểm BC, CA, AB. Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác AEOF.

Ta có: $c.y + b.z = R.a$ và các hệ thức tương tự, cộng lại được $x+y+z = R+r$.

4) Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trong mặt phẳng sao cho $MA + MB + MC$ nhỏ nhất (**điểm Torricelli**).

Gợi ý: Xét tam giác có 3 góc bé hơn 120° .

Dựng phía ngoài tam giác đều BCA' . Áp dụng bất đẳng thức Ptoleme cho tứ giác $MBA'C$:

$$BM.CA' + CM.BA' \geq BC.MA' \text{ tương đương } BM + CM \geq MA'$$

$$MA + MB + MC \geq MA + MA' \geq AA'$$

Dấu bằng xảy ra: tứ giác $BMCA'$ nội tiếp và M thuộc AA' .

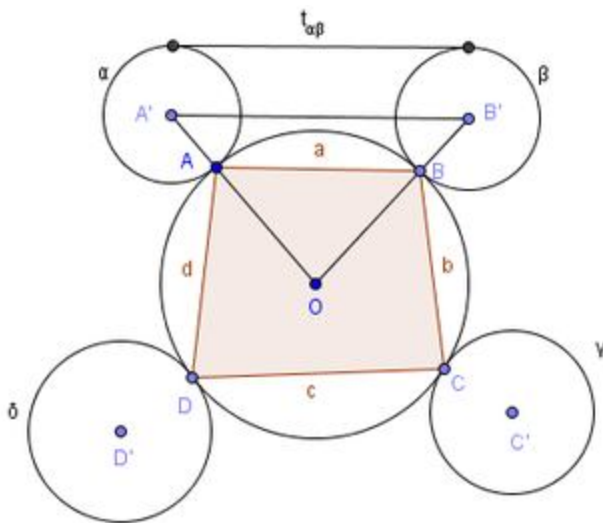
Xét tam giác có $\hat{A} \geq 120^\circ$.

Lấy B' thuộc BC sao cho $\widehat{CAB'} = 120^\circ$.

Ta có: $MA + MB' + MC \geq AB' + AC$. Từ đó suy ra

$$AB' + AC + (AB - AB') \leq MA + MB' + MC + (MB - MB').$$

5) Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O;R). Đặt các đường tròn k, h, p, q là các đường tròn tiếp xúc với (O) tại A, B, C, D. Đặt t_{kh} là độ dài đoạn tiếp tuyến chung của hai đường tròn k, h. Trong đó là độ dài tiếp tuyến chung ngoài nếu hai đường tròn k, h cùng tiếp xúc trong hoặc cùng tiếp xúc ngoài với (O) và độ dài đoạn tiếp xúc trong ở các trường hợp còn lại. Tương tự cho các đoạn $t_{hp}, t_{pq}, \dots$. Chứng minh $t_{kh}.t_{pq} + t_{hp}.t_{kq} = t_{kp}.t_{hq}$ (**định lý Casey**).



Gợi ý: Ta chứng minh trường hợp k, h, p, q tiếp xúc ngoài (O). Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Đặt tâm các đường tròn là A', B', C', D' và bán kính là x, y, z, t.

$$\text{Ta có } (t_{kh})^2 = A'B'^2 - (x-y)^2.$$

$$A'B'^2 = (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y) \cdot \cos \widehat{A'OB'}$$

$$A'B'^2 = (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y) \cdot \left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right)$$

$$A'B'^2 = (x-y)^2 + \frac{a^2}{R^2} (R+x)(R+y)$$

$$\text{Tương đương } t_{kh} = \frac{a}{R} \cdot \sqrt{(R+x)(R+y)}. \text{ Tương tự với các tiếp tuyến còn lại.}$$

Ta có: $t_{kh} \cdot t_{pq} + t_{hp} \cdot t_{kq} = t_{kp} \cdot t_{hq}$ tương đương $ac + bd = mn$ (định lý Ptoleme).

Như vậy định lý Ptoleme là trường hợp đặc biệt của định lý Casey khi $x=y=z=t=0$.

6) Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt

$$(O) \text{ tại M, N. Chứng minh } \frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM}$$

Gợi ý: Áp dụng định lý Ptoleme cho hai tứ giác AMBC và ANCB:

$$AM \cdot a + BM \cdot b = CM \cdot c \quad (1) \text{ và } a \cdot AN + c \cdot CN = b \cdot BN \quad (2).$$

Từ các tam giác đồng dạng ta có $AM \cdot BF = BN \cdot MF$; $AN \cdot MF = BM \cdot AF$

$$\text{Nên } \frac{AM \cdot AN}{BM \cdot BN} = \frac{AF}{BF} = \frac{b}{a} \quad (3), \text{ tương tự } \frac{AM \cdot AN}{CM \cdot CN} = \frac{c}{a} \quad (4).$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có đpcm.

7) Một lục giác có độ dài 6 cạnh đều bằng 1. Chứng minh rằng lục giác đó có ít nhất một đường chéo chính không lớn hơn 2 (đường chéo chia lục giác thành 2 tứ giác)

Thật bất ngờ khi hướng giải quyết của bài này là bất đẳng thức Ptoleme.

$$\text{Gợi ý: } AC \cdot DE + AE \cdot CD \geq AD \cdot CE$$

Từ đó, do $CD = DE = 1$ và $CE \geq AC$, $CE \geq AE$ nên ta suy ra $AD \leq 2$ (đpcm).

Tài liệu tham khảo:

- Diễn đàn <http://forum.mathscope.org/>.
- Diễn đàn: <http://www.artofproblemsolving.com>.
- Diễn đàn <http://diendantoanhoc.net/forum/>.
- Diễn đàn <http://cut-the-knot.org/>.
- Định lí Steiner cho tứ giác toàn phần, Internet resources.
- Tuyển chọn theo chuyên đề toán học và tuổi trẻ các tập 3; 4; 5; 6.
- Một PP chứng minh các bài toán đồng qui- Nguyễn Văn Linh.
- Bất đẳng thức Ptolemy và ứng dụng- Trần Nam Dũng.
- Tài liệu chuyên toán hình học 10- Đoàn Quỳnh (chủ biên).
- Hình học của tam giác- Nguyễn Văn Ban-Hoàng Chúng.
- Topics in Elementary Geometry- Q. Bottema.
- Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry- Ross Honsberger.
- College Geometry- Nathan Altshiller-Court.