

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH NĂM HỌC 2015 – 2016

Các phương pháp chính để giải phương trình, bất phương trình chứa căn thức:

- **Phương pháp biến đổi tương đương.** Bao gồm 3 kỹ thuật: Nâng lên lũy thừa để khử dấu căn (đặc biệt chú ý các dạng phương trình, bất phương trình cơ bản $\sqrt{A} = \sqrt{B}$, $\sqrt{A} = B$, $\sqrt{A} > \sqrt{B}$, $\sqrt{A} = B$, $\sqrt{A} < B$...), phân tích thành tích các phương trình đơn giản hơn, nhân chia với lượng liên hợp.
- **Phương pháp đặt ẩn phụ.** Đưa về phương trình đại số không chứa căn theo ẩn phụ, đưa về phương trình đẳng cấp gồm cả ẩn phụ và ẩn ban đầu, đưa về phương trình tích và đưa về hệ phương trình.
- **Phương pháp hàm số.** Đây là một phương pháp rất hiệu quả, xuất hiện rất nhiều trong các kì thi tuyển sinh Đại học.
- **Phương pháp đánh giá.** Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc hoặc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất để đánh giá dấu đẳng thức xảy ra khi nào.

1 Phương pháp biến đổi tương đương

1.1 Nâng lên lũy thừa

1. $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} + x - 2 = 0$.
2. $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$
3. $x - \sqrt{2x + 3} = 0$
4. $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 5$
5. $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 3$
6. $\sqrt{3 + x} - \sqrt{2 - x} = 1$
7. $\sqrt{x + 9} = 5 - \sqrt{2x + 4}$
8. $\sqrt{11 - x} - \sqrt{x - 1} = 2$
9. $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 7} = 1$
10. $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x} = \sqrt{x + 3}$
11. $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{2x - 1} = \sqrt{6 - x}$
12. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 3}$
13. $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{4 - x} = \sqrt{3x + 1}$
14. $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 1} = 0$
15. $\sqrt{1 - x} = \sqrt{6 - x} - \sqrt{-5 - 2x}$
16. $\sqrt{2x - 1} \leq 8 - x$
17. $\sqrt{2(x^2 - 1)} \leq x + 1$
18. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$
19. $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3$
20. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < x + 1$
21. $\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 2$
22. $\sqrt{x^2 + x - 6} \leq x + 2$
23. $\sqrt{2(x^2 - 1)} \geq x + 1$
24. $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} - x + 2 < 0$
25. $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$
26. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x} \leq x$
27. $\sqrt{2x + 7} - \sqrt{5 - x} \geq \sqrt{3x - 2}$
28. $\sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 3} \leq \sqrt{4x + 9}$
29. $\sqrt{x + 4} < \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 3}$
30. $\sqrt{5x + 1} - 3\sqrt{x} \geq \sqrt{4x - 1}$
31. $2\sqrt{x - 3} - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 2x} \geq \frac{3}{2}$
32. $\sqrt{x + 12} \leq \sqrt{x - 3} + \sqrt{2x + 1}$
33. [A2005] $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$
34. [CĐ2009] $\sqrt{x + 1} + 2\sqrt{x - 2} \leq \sqrt{5x + 1}$
35. $\sqrt{7x - 13} - \sqrt{3x - 9} \geq \sqrt{5x - 27}$
36. $\sqrt{x - 3} \leq \sqrt{x + 12} - \sqrt{2x + 1}$
37. $\sqrt{x + 11} \geq \sqrt{x - 4} + \sqrt{2x - 1}$
38. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} \geq \sqrt{2x - 3}$
39. $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{4x - 1} \leq 3\sqrt{x}$
40. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{3 - x} < \sqrt{5 - 2x}$
41. $2\sqrt{x + 2} + 2\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 1} = 4$
42. $\sqrt{7 - x^2} + x\sqrt{x + 5} = \sqrt{3 - 2x - x^2}$
43. $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2 + 1} = x + 1$
44. $\sqrt{x(x - 1)} + \sqrt{x(x + 2)} = 2\sqrt{x^2}$
45. $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \frac{x + 3}{2}$
46. $\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} = 1$

47. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$
48. $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}} + \sqrt{x-\sqrt{14x-49}} = \sqrt{14}$
49. $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3} = 0$
50. $\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{5x+1}$
51. $\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{2(x^3+1)}} =$
52. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$
53. $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$
54. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$
55. $\sqrt[3]{x^2+6x} > x$
56. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$
- 57*. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$
58. $2x^2 + \sqrt{x^2-5x-6} > 10x+15$
59. $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$
60. $\frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{\sqrt{4x^2-18x+18}} + \frac{\sqrt{x^2+2x-15}}{\sqrt{4x^2-18x+18}} \leq$
61. $\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-3x+1} \geq x-1$
62. $\frac{\sqrt{x-5}-3}{x-4} < 1$
- 63*. $\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}} + \sqrt{x-\frac{7}{x^2}} = x$
64. $\frac{1}{1-x^2} + 1 > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$
65. $(x+1)(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3} < 2-(x-1)^2$
66. [HSGQG 2002] $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2$
67. $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$
68. $4(x+1)^2 \geq (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$
69. $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}$
70. [D2006] Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}$.
71. [B2006] Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2+mx+2} = 2x+1$ có hai nghiệm thực phân biệt?
72. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2-2mx+1} = m-2$ có nghiệm?
73. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2+mx-3} = x+1$ có hai nghiệm phân biệt?
74. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2-mx} - \sqrt{x^2-4} = 0$ có nghiệm.

1.2 Phân tích thành tích

75. $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2-x-12$
76. $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0$
77. $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$
78. $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11} \geq \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$
79. $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$
80. $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$
81. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2+x}$
82. $\sqrt{x+3} + \frac{4x}{\sqrt{x+3}} = 4\sqrt{x}$
83. $x+2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$
84. $\sqrt{x^2+10x+21} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+7} - 6$
85. $\sqrt{x^2+3x} + 2\sqrt{x+2} = 2x + \sqrt{x+\frac{6}{x}+5}$
86. $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$
87. $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$
88. $\sqrt{x+3} + \frac{4x}{\sqrt{x+3}} = 4\sqrt{x}$
89. $2x^2 - 6x + 10 - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0$
90. $4x^2 + \sqrt{2x+3} = 8x+1$
91. $\sqrt{x^2+x+2} = \frac{x^2+5x+2}{2x+2}$
92. $2\sqrt{2x+3} - \frac{3}{x} = x+2$
93. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x} = 1 + \sqrt[6]{x^5-2x^4+x^3}$
- 94*. $x^2-2x-3 = \sqrt{x+3}$
- 95*. $2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x^2+6x} = 2\sqrt{2x} + \sqrt{x^2+4x+3}$
- 96*. $4x\sqrt{x+7} + 3x\sqrt{7x-3} = 6x^2 + 2\sqrt{7x^2+46x-21}$
- 97*. $\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$
- 98*. $2\sqrt{x+3} = 9x^2-x-4$
99. $\sqrt[4]{x+1} + \sqrt{x} = 1 + \sqrt[4]{x^3+x^2}$
- 100*. $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$
101. $2+3\sqrt[3]{9x^2(x+2)} = 2x+3\sqrt[3]{3x(x+2)^2}$
- 102*. $4x^2+3x+3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$
- 103*. $x-2\sqrt{x-1} - \sqrt{x}(x-1) + \sqrt{x^2-x} = 0$
104. $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$
- 105*. $\sqrt{x^3+x^2+3x+3} + \sqrt{2x} = \sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x^2+2x}$

1.3 Nhân chia với biểu thức liên hợp

106. $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x-6$
 107. $\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3$
 108. $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$
 109*. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2-5x-1$
 110. $2\sqrt{(2-x)(5-x)} = x + \sqrt{(2-x)(10-x)}$
 111. $\sqrt[3]{x^2+4} = \sqrt{x-1} + 2x-3$
 112. $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt{3x^3-2} = 3x-2$
 113*. $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4} = 0$
 114. $\sqrt{2x^2+16x+18} + \sqrt{x^2-1} = 2x+4$
 115. $x^2+3x+1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$
 116. $1 + \sqrt{x} = 4x^2 + \sqrt{3x-1}$
 117. $\sqrt{x} = 1 - \sqrt[3]{3x^2+x-1} + \sqrt[3]{2x+1}$
 118*. $2\sqrt{x^2+5} = 2\sqrt{x-1} + x^2$
 119*. $\sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}$
 120. $\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{x^2+x+2} = x + \frac{4}{x}$
 121. $\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1} = 2$
 122. $\sqrt{x+2} + x^2 - x + 2 \leq \sqrt{3x-2}$
 123. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$
 124. $\sqrt{\frac{2}{3-x}} + \sqrt{\frac{1}{2-x}} = 2$
 125*. $\sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = x^2-1$
 126. $3\sqrt{x-2} = 2(x-3) + \sqrt{x+6}$
 127. [B2010] $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$
 128. $\frac{2x^2}{3-\sqrt{9+2x}} = x+21$
 129. $x^2 - x - 2004\sqrt{1+16032x} = 2004$
 130. $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$
 131. $\sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}$
 132. $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$
 133. $4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} \leq (x-1)(x^2-2)$
 134. $x(x^2-6x+12) + \sqrt{x+2} \leq 10$
 135. $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$
 136*. $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-1}$
 137*. $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$
 138. $3x^2-4x-15 = 2\sqrt{2x^2-2x-5}$
 139. $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$
 140. $\sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3(x^2-x-1)} - \sqrt{x^2-3x+4}$
 141. $2x^2-15x+34 = 3\sqrt[3]{4x-8}$
 142*. $\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 3x$

2 Phương pháp đặt ẩn phụ

2.1 Đưa về phương trình một ẩn

143. $15x - 2x^2 - 5 = \sqrt{2x^2 - 15x + 11}$
 144. $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$
 145. $\sqrt{(1+x)(2-x)} = 1+2x-2x^2$
 146. $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3$
 147. $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2} - 2$
 148. $\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-2x-x^2$
 149. $(x^2+1)^2 = 5-x\sqrt{2x^2+4}$
 150. $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$
 151. $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$
 152. $2x(x-1)+1 > \sqrt{x^2-x+1}$
 153. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{9-2x} + 3\sqrt{9+16x-4x^2} > 13$
 154. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9$
 155. $2\sqrt{3x^2-5x+2}$
 156. $3\sqrt{2x-1} - 4\sqrt{x-1} \geq \sqrt[4]{\frac{2x^2-3x+1}{36}}$
 157. $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4$
 158. $2\sqrt{(1+x)^2-3\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{(1-x)^2} = 0$
 159. $2 - \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} = \sqrt{x+7}$
 160. $2x^2-6x-1 = \sqrt{4x+5}$
 161. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$
 162. $x + \sqrt{5+\sqrt{x-1}} = 6$
 163. $x = (2004 + \sqrt{x}) \left(1 - \sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$
 164. $x^2 + 2x\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3x+1$
 165. $x^2 + \sqrt[3]{x^4-x^2} = 2x+1$

$$165. \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + 2 = 0$$

$$167. (x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x$$

$$168. \sqrt{x^2 + 20x + 4} + \sqrt{x} = 2x + 4$$

$$166. \sqrt{2(x^4 + 4)} = 3x^2 - 10x + 6$$

$$169. 7x^2 - 10x + 14 = 5\sqrt{x^4 + 4}$$

$$170. \text{Tìm } m \text{ để phương trình } x^2 + 2x + 2m\sqrt{5 - 2x - x^2} = m^2 \text{ có nghiệm?}$$

$$171. \text{Tìm } m \text{ để phương trình } \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m \text{ có nghiệm.}$$

$$172. \text{Tìm } m \text{ để phương trình } 3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \text{ có nghiệm.}$$

2.2 Đưa về phương trình đẳng cấp

$$173. 10\sqrt{x^3+8} = 3(x^2-x+6)$$

$$183^*. x^2 + 3\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^4-x^2+1}$$

$$174. 2\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2} = 3-x$$

$$184^*. \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}.$$

$$175. x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$$

$$185. \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = \sqrt[4]{\frac{x^2-x-2}{4}}$$

$$176. 2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3-1}$$

$$186. x^3 - 8x^2 + 13x + 6 + 6(x-3)\sqrt{x^2-5x+5} = 0$$

$$177. \sqrt{x(x+1)(x+2)} - x^2 + x + 4 = 0$$

$$187^*. \sqrt{5x^2-14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$$

$$178. 2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2}$$

$$179. 2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3+8}$$

$$188^*. (x^2 - 6x + 11)\sqrt{x^2-x+1} = 2(x^2 - 4x + 7)\sqrt{x-2}$$

$$180. 2(x^2 - 3x - 1) - 7\sqrt{x^3+1} = 0$$

$$181^*. x^2 + 5x < 4 \left(1 + \sqrt{x^3+2x^2-4x} \right)$$

$$189^*. 18x^2 - 13x + 2 = \sqrt{3(81x^4 - 108x^3 + 56x^2 - 12x + 1)}$$

$$182. x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3 - 6x} = 0$$

$$190. (A07) \text{ Tìm } m \text{ để phương trình } 3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \text{ có nghiệm.}$$

2.3 Đưa về phương trình tích

$$191. (2x+1)\sqrt{x^2+3} + x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$199^*. 4\sqrt{x+1} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$$

$$192. x^2 + (3 - \sqrt{x^2+2})x = 1 + 2\sqrt{x^2+2}$$

$$200^*. 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$$

$$193. (4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$$

$$201^*. \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12-8x}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$194. x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2-2x}$$

$$202. \sqrt{x+1}(3x^2+x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$195. x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$$

$$203^*. 3x^3 - 13x^2 + 30x - 4 = \sqrt{(6x+2)(3x-4)^3}$$

$$196. 6x^2 - 10x + 5 - (4x-1)\sqrt{6x^2-6x+5} = 0$$

$$197^*. x^2 - (x+2)\sqrt{x-1} = x-2$$

$$204^*. 2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} < 0$$

$$198^*. (x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$$

$$205. \sqrt{x} + \sqrt[4]{x(1-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2(1-x)}$$

2.4 Đưa về hệ phương trình

$$206. x^2 + \sqrt{x+5} = 5$$

$$211. \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17-x} = 3$$

$$207. x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$$

$$212. x\sqrt[3]{25-x^3} \left(x + \sqrt[3]{25-x^3} \right) = 30$$

$$208. \frac{x^3-1}{2} = \sqrt[3]{2x+1}$$

$$213. x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$$

$$209. \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$214. \sqrt{4+x} + \sqrt{5-x} = 3$$

$$210. \sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$$

$$215. \sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$$

$$216. \sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$$

$$217. \sqrt[4]{57-x} + \sqrt[4]{x+40} = 5$$

$$218. \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4$$

$$219. x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$$

$$220. x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$$

$$221. \sqrt[3]{\frac{1}{2}-x} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}+x} = 1$$

$$222. 3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$$

$$223. [A2009] 2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$$

$$224. \sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} = 3$$

$$233. \sqrt{x+1} + 2(x+1) = x-1 + \sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x^2}$$

$$225. \sqrt{3x+1} = -4x^2 + 13x - 5$$

$$226. x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$$

$$227. 7\sqrt{4x^2+5x-1} - 14\sqrt{x^2-3x+3} = 17x - 13$$

$$228. \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = 3$$

$$229. 7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$$

$$230. x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$$

$$231. \frac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \frac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3}$$

$$232. 2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$$

3 Phương pháp hàm số

$$234. x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$$

$$235. \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$$

$$236. x^2 + \sqrt{x-1} = 5$$

$$237. \sqrt{x+3} + \sqrt{x+\sqrt{7x+2}} = 4$$

$$238. \sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$$

$$239. \sqrt{3x-5} + \sqrt{2x+3} = 2 + \sqrt{12-x}$$

$$240. \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} = \sqrt{x+100}$$

$$241. 3x^7 - \sqrt{5-4x} = 3 - x^3$$

$$242. 2(x-2)(\sqrt[3]{x+5} + 2\sqrt{2x-5}) = 3x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$243. \sqrt{x^2+15} = 3x-2 + \sqrt{x^2+8}$$

$$244. \sqrt{2x^2+23} = 4x-2 + \sqrt{2x^2+7}$$

$$245. \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5$$

$$246. \sqrt{x^2-2x-3} - \sqrt{x^2+6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x-1}$$

$$247. \sqrt{x^2+35} < 5x-4 + \sqrt{x^2+24}$$

$$248. 4x^3 + x - (x-1)\sqrt{2x+1} = 0$$

$$249. 8x^3 + 6x - x\sqrt{x+3} - 6\sqrt{x+3} = 0$$

$$250. 3x + \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x+2} - 3\sqrt{2x+1} = 0$$

$$251. 3x + \sqrt{4x^2-1} + \sqrt{x^2+1} = 0$$

$$252. (2x+1)\left(2 + \sqrt{4x^2+4x+4}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2+3}\right) = 0$$

$$253. x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2+9x-4}$$

$$254. \sqrt{4-x^2} + 2\sqrt[3]{x^4-4x^3+4x^2} = (x-1)^2 + 1 - |x|$$

$$255. \sqrt{x} \geq \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x}$$

$$256. 3(x^2-2) + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}} > \sqrt{x}(\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x^2-1})$$

4 Phương pháp đánh giá

$$257. \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

$$258. \sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12x + 40$$

$$259. \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4}$$

$$260. 4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$$

$$261. \sqrt{x-1} - 3 + x = \sqrt{2(x-3)^2 + 2(x-1)}$$

$$262. \sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x-1} = 2$$

$$263. \sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2-4x+8} = 4x - x^2 - 1$$

$$264. \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$$

$$265. 4(x^2-2)(3-x^2) = (\sqrt{2}x - \sqrt{5})^2 + 1$$

$$266. \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} = x^2 - x + 2$$

$$267. \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$$

$$268. \sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$269. \sqrt{8+x^3} + \sqrt{64-x^3} = x^4 - 8x^2 + 28$$

$$270. 2x^4 + 8 = 4\sqrt{4+x^4} + 4\sqrt{x^4-4}$$

$$271. \sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$272. 13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4} = 16$$

$$273. x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - 8\sqrt[4]{4x+4} = 0$$

$$274. \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1} = 3$$

$$275. \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{4x^2 + 12x + 25} = \sqrt{9x^2 + 12x + 29}$$

$$276. \sqrt{x - 1} + x - 3 \geq \sqrt{2(x - 3)^2 + 2x - 2}$$

5 ĐÁP SỐ

$$1. x = -\frac{1}{2}.$$

$$2. x = 1$$

$$3. x = 3$$

$$4. x = \frac{14}{5}$$

$$5. x = 2$$

$$6. x = 1$$

$$7. x = 0$$

$$8. x = 2$$

$$9. x = 9$$

$$10. x = 1$$

$$11. x = 5$$

$$12. x = -3, x = -\frac{1}{2}$$

$$13. x = 0, x = \frac{11}{3}$$

$$14. x = 2$$

$$15. x = -3$$

$$16. \frac{1}{2} \leq x \leq 5$$

$$17. [1, 3] \cup x = -1$$

$$18. x \leq 0, x > \frac{9}{2}$$

$$19. x \geq \frac{2}{3}$$

$$20. \frac{1}{3} < x \leq 1, 3 \leq x$$

$$21. 3 \leq x < \frac{19}{6}$$

$$22. x \geq 2$$

$$23. x \geq 3 \vee x \leq -1$$

$$24. \frac{3+\sqrt{7}}{2} \leq x \leq 3$$

$$25. 3 < x \leq 5$$

$$26. -1 \leq x < 0$$

$$27. \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \frac{14}{3} \leq x \leq 5$$

$$28. 3 \leq x \leq 4$$

$$29. x > 2\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$30. x = \frac{1}{4}$$

$$31. 4 \leq x \leq \frac{9}{2}$$

$$32. x \geq 4$$

$$33. 2 \leq x < 10$$

$$34. 2 \leq x \leq 3$$

$$35. \frac{27}{5} \leq x \leq \frac{229+8\sqrt{411}}{59}$$

$$36. 3 \leq x \leq 4$$

$$37. 4 \leq x \leq 5$$

$$38. \frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

$$39. x \geq \frac{1}{4}$$

$$40. [-2, 2)$$

$$41. x = 3.$$

$$42. x = -1$$

$$43. x = 0, x = 2$$

$$44. x = 0, x = \frac{9}{8}$$

$$45. x = 1, x = 5$$

$$46. x = \frac{9}{4}$$

$$47. [2, +\infty)$$

$$48. [\frac{7}{2}, 7]$$

$$49. x = -1$$

$$50. x = \frac{19}{30}$$

$$51. x = 1$$

$$52. x = 1$$

$$53. x = -61, x = 30$$

$$54. x = 1, x = 2, x = \frac{3}{2}$$

$$55. x < -2, 0 < x < 3$$

$$56. x = -1$$

$$57^*. x = 1$$

$$58. x > \frac{5+\sqrt{53}}{2} \vee x < \frac{5-\sqrt{53}}{2}$$

$$59. x \geq 4$$

$$60. 5 \leq x \leq \frac{17}{3} \vee x = 3 \vee x \leq -5$$

$$61. x \leq \frac{1}{2} \vee x = 1$$

$$62. x \geq 5$$

$$63^*. x = 2$$

$$64. -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$$

$$65. 1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$$

$$66. x = 3$$

$$67. x = 1, x = 2 - \sqrt{2}$$

$$68. x = -1, x > 3$$

$$69. x = 1 - \sqrt{3}, x = 1 + \sqrt{3}$$

$$71. m \geq \frac{9}{2}$$

$$72. m \geq 2$$

$$73. m \leq 2$$

74. $|m| \geq 4$.
75. $x = -3$
76. $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$
77. $x < -\frac{5}{6} \vee x \geq 3$
78. $-3; [-2, 4]$
79. $1 - \sqrt{52} \leq x < -5 \vee x > 1$
80. $-1 \leq x < 8$
81. $x = 1$
83. $x = 5, x = 4$
84. $x = 1, x = 2$
85. $x = 1, x = 2$
86. $x = 0, x = 1$
87. $x = 1; x = 2 - \sqrt{2}$
88. $x = 1$
89. $x = 3, x = 8$
90. $x = \frac{5-\sqrt{21}}{4}, x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$
91. $x = 1, x = -2$
92. $x = 3$
93. $x = 1, x = 2$
- 94*. $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x = 1 - \sqrt{13}$
- 95*. $x = 1$
- 96*. $x = 1, x = 2, x = \frac{3}{4}$
- 97*. $x = \frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$
- 98*. $x = 1, x = \frac{-5-\sqrt{97}}{18}$
99. $x = 0, x = 1$
- 100*. $x = 0, x = 1$
101. $x = 1$
- 102*. $x = 1$
- 103*. $x = 2$
104. $x = 1$
- 105*. $x = 0$
106. $x = 3$
107. $x = \frac{1}{3}$.
108. $x = 3$
- 109*. $x = 3$
110. $x = 1, x = \frac{15+5\sqrt{5}}{2}$
111. $x = 2$
116. $x = \frac{1}{2}$
117. $x = 1$
- 119*. $x = 2$
120. $x = 1$
121. $x = 0$
122. $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$
133. $1, [3, +\infty)$
135. $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$
- 136*. $x = 3$
- 137*. $[-2; \frac{2}{3}) \cup (\frac{4\sqrt{2}}{3}; 2]$
138. $x = 1 + \sqrt{6}, x = \frac{1-5\sqrt{2}}{3}$
139. $x = 7$
140. $x = 2$
141. $x = 4$
- 142*. $x = 1$
143. $x = \frac{1}{2}, x = 7$
144. $x = -4, x = 1$
145. $x = \frac{1}{2}$
146. $x = 0$
147. $x = -2, x = -3$
148. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
149. $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$
150. $x = 0, x = 1$
151. $x = 1, x = 4$
152. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$
153. $0 < x < 4$
154. $x = 2$
155. $[1, 5]$
156. $x > \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \vee 0 < x < \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$
158. $x = \frac{1-5\sqrt{5}}{2}$
159. $x = 1 - \sqrt{2}, x = 2 + \sqrt{3}$
160. $x = 1$
161. $x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}$
162. $x = 0$
164. $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
165. $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
166. $x = 3 \pm \sqrt{7}$
167. $x = 1, x = 36$
169. $x = \frac{5}{2}, x = \frac{10}{3}$.
170. $-\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{6} - \sqrt{5} \vee \sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{6} + \sqrt{5}$
172. $m \leq \frac{1}{3}$
173. $x = \frac{11\pm 177}{2}$
174. $x = \frac{3}{5}; x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
175. $x = 1$
176. $x = 4 \pm \sqrt{6}$
178. $x = 1; x = 3$
179. $x = 3 \pm \sqrt{13}$

180. $x = \frac{17 \pm \sqrt{349}}{2}$ 202. $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 236. $x = 2$
- 181*. $-1 - \sqrt{5} \leq x \leq 0; \frac{-1+\sqrt{17}}{2} < x < \frac{7+\sqrt{65}}{2}$ 203*. $x = 3, x = ???$ 237. $x = 1$
182. $x = 2, x = 2 - 2\sqrt{3}$ 204*. $x < -\frac{1}{2}$ 238. $x = -1$
- 183*. $x = \pm 1$ 205. $x = ???$ 239. $x = 3$
- 184*. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 206. $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}, x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ 245. $x > 0$
185. $x = 3$ 208. $x = -1; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 246. $2 < x \leq 3$
186. $x = 1; x = 4$ 209. $x = 30, x = -61$ 247. $x > 1$
- 187*. $x = ???$ 210. $x = -24, x = -88, x = 3$ 252. $x = -\frac{1}{5}$
- 188*. $5 \pm \sqrt{6}$ 211. $x = 1, x = 16$ 253. $x = 5, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- 189*. $x = \frac{11 \pm \sqrt{85}}{18}$ 212. $x = 2, x = 3$ 254. $0, \pm 2$
190. $-1 < m \leq \frac{1}{3}$ 213. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, x = 1$ 255. $(0, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$
191. $x = \frac{-4-\sqrt{13}}{3}$ 214. $x = -4, x = 5$ 256. $[1, +\infty) \setminus \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$
192. $x = \pm \sqrt{7}$ 225. $x = \frac{15-\sqrt{97}}{8}, x = \frac{11-\sqrt{73}}{8}$ 257. $x = 2$
193. $x = \frac{4}{3}$ 226. $\{x = 1 - \sqrt{2}, x = 1 + \sqrt{3}\}$ 258. $x = 6$
194. $x = 1 \pm \sqrt{5}$ 227. $x = -\frac{746}{495}; x = \frac{13}{17}; x = 2$ 260. $x = 3$
195. $x = 3$ 229. $x = \frac{5-3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}, x = \frac{-\sqrt{23}-4\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$ 265. $x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
196. $x = \frac{-3+\sqrt{59}}{6}$ 230. $x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}$ 266. $x = 1$
- 197*. $x = 2$ 231. $x = \pm 4$ 267. $x = \frac{1}{7}$
- 198*. $x = 1 \pm \sqrt{2}$ 232. $x = 1 - \sqrt{2}, x = 1 + \sqrt{3}$ 272. $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$
- 199*. $x = 0, x = -\frac{3}{5}$ 233. x 273. $x =$
- 200*. $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 234. $x = -1$ 274. $x = 0$
- 201*. $x = \frac{2}{3}, x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 235. $x = \frac{1}{2}$

6 HƯỚNG DẪN

49. Lập phương hai vế. $a + b = c \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = c^3$, sau đó thay $a + b = c$. Vì ta thay $c = a + b$ là một điều chưa biết đúng hay sai nên phải thử lại. Nói chung, trong giải phương trình và hệ, mọi *phép thay thế* đều là biến đổi hệ quả, do đó cần phải thử lại.

57*. Biến đổi thành $2\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2}$ sau đó bình phương được phương trình hệ quả. Thử lại tìm được nghiệm.

63*. Chuyển về $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} = x - \sqrt{x - \frac{7}{x^2}}$ rồi bình phương được phương trình hệ quả.

66. Bình phương hai lần được phương trình bậc bốn có nghiệm chắn.

67. Biến đổi thành $\sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1$ rồi bình phương được $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 = 0$

68. Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$. Biến đổi thành $x^2 + 2x + 1 \geq (x+5)(2+x-\sqrt{3+2x}) \Leftrightarrow (x+5)\sqrt{3+2x} \geq 9+5x$. Với $x \geq -\frac{3}{2}$ thì hai vế không âm, nên bình phương được $(x-3)(x+1)^2 \geq 0$.

69. Chuyển về và biến đổi hệ quả, sau đó thử lại.

71. $PT \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3x^2 - (m-4)x - 1 = 0 \end{cases}$. Đặt $t = x + \frac{1}{2}$ và tìm điều kiện để phương trình ẩn t có hai nghiệm không âm.

72. Xét hai trường hợp:

- Nếu $m < 2$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m \geq 2$ bình phương được phương trình bậc hai luôn có nghiệm.

73. Với điều kiện $x \geq -1$, bình phương đưa về phương trình bậc hai có nghiệm là $x_1 = \dots > 0, x_2 = \dots < 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \geq -1$ từ đó tìm được m .

74. Chuyển về, đặt điều kiện, bình phương hai vế tìm được $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 16}}{2}$. Kết hợp với điều kiện ta tìm được...

77. Xét ba trường hợp $x = 3, x > 3$ và $x < 3$.

79. Xét hai trường hợp của $x - 1$.

81. Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm, chia hai vế cho x được:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + \sqrt[3]{x} = 1 + \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1 \right) (\sqrt[3]{x} - 1) = 0$$

82. Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+3}$ và biến đổi như sau

$$1 + \frac{4x}{x+3} = 2\sqrt{\frac{4x}{x+3}} \Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{\frac{4x}{x+3}} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

83. Biến đổi thành $(x-1-2\sqrt{x-1}) + (2\sqrt{7-x} - \sqrt{(7-x)(x-1)}) = 0 \dots$

84. $\sqrt{x+3}(\sqrt{x+7}-3) - 2(\sqrt{x+7}-3) = 0$

85. $x\sqrt{\frac{x+3}{x}} - \sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}} + 2\sqrt{x+2} - 2x = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x-2}) \left(\sqrt{\frac{x+3}{x}} - 2 \right) = 0$

86. Biến đổi thành $(\sqrt{x+3}-2x)(\sqrt{x+1}-1) = 0$

88. Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+3}$ được $\left(1 - \sqrt{\frac{4x}{x+3}} \right)^2 = 0$

89. $2(x-2)^2 + 2(x+1) - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow (2(x-2) - \sqrt{x+1})((x-2) - 2\sqrt{x+1}) = 0 \dots$

90. $4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = (\sqrt{2x+3})^2 - 2\sqrt{2x+3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \dots$

91. Nhân chéo, nhóm thành $(\sqrt{x^2+x+2})^2 - 2x\sqrt{x^2+x+2} - 2\sqrt{x^2+x+2} + 4x = 0 \Leftrightarrow \dots$

92. Biến đổi thành $\frac{1}{x}(x - \sqrt{2x+3})^2 = 0$

93. Biến đổi thành $(1 - \sqrt[3]{x-1})(1 - \sqrt{x}) = 0$

94*. Biến đổi thành $x^2 - x + \frac{1}{4} = x + 3 + \sqrt{x+3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = (\sqrt{x+3} + \frac{1}{2})^2$

95*. Biến đổi thành $(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x})(2 - \sqrt{x+3}) = 0$

96*. Biến đổi thành $(2x - \sqrt{7x-3})(2\sqrt{x+7} - 3x) = 0$

97*. Biến đổi thành $x^3 + \sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{\sqrt{3}})^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}}$

98*. Biến đổi thành $(1 + \sqrt{3+x})^2 = 9x^2$

100*. Sử dụng $au + bv = ab + uv \Leftrightarrow (u-b)(v-a) = 0$

101. Sử dụng $a^3 - b^3 = 0 \Leftrightarrow a = b$

102*. Biến đổi thành $(4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3)(1 - 2\sqrt{2x-1} + 2x - 1) = 0$

103*. Bình phương, biến đổi thành

$$2x\sqrt{x^2-x} - 4\sqrt{x^2-x} + x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2\sqrt{x^2-x} + x^2 - 2x + 2) = 0$$

105*. Sử dụng $au + bv = ab + uv \Leftrightarrow (u-b)(v-a) = 0$

108. Nhóm thành $(\sqrt{10x+1} - \sqrt{9x+4}) + (\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-2}) = 0$, rồi nhân liên hợp...

109*. Tách thành $(\sqrt{x-2}-1) + (\sqrt{4-x}-1) - (2x^2-5x-3) = 0$. Sau đó nhân liên hợp xuất hiện nhân tử $x-3$, xét hàm cho nhân tử còn lại...

118*. Biến đổi thành

$$2\sqrt{x^2+5}-6 = 2\sqrt{x-1}-2+x^2-4 \Leftrightarrow 2\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} = 2\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (x-2)(x+2)$$

Tìm được $x = 2$ hoặc

$$\frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + x+2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + (x+2)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+5}+3}\right) = 0$$

Phương trình cuối này vô nghiệm.

119*. Để phương trình có nghiệm thì: $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$. Biến đổi phương trình thành

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+12}-4 &= 3x-6+\sqrt{x^2+5}-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4} = 3(x-2) + \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 \right) &= 0 \Leftrightarrow x=2\end{aligned}$$

Chúng minh được $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 < 0, \forall x > \frac{5}{3}$.

136*. Biến đổi thành

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3 &= \sqrt{x^3-2}-5 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left(1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2+2\sqrt{x^2-1}+4}} \right) &= \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}\end{aligned}$$

Nhận xét $1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2+2\sqrt{x^2-1}+4}} = 1 + \frac{x+3}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2+3} < 2 < \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$

137*. Nhân liên hợp được $(3x-2) \left[\sqrt{9x^2+16}-2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}) \right] > 0$. Lại nhân liên hợp được

$$(3x-2) \left[9x^2+16-4(12-2x+4\sqrt{8-2x^2}) \right] > 0 \Leftrightarrow (3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2})(+x+2\sqrt{8-2x^2}) > 0.$$

Để $\sqrt{8-2x^2}$ có nghĩa thì $-2 \leq x \leq 2$. Do $x \geq -2 \Rightarrow 8+x+2\sqrt{8-2x^2} > 0$ nên bất phương trình tương đương với $(3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2}) > 0$.

140. Biến đổi thành $\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x+1)}} = \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$

141. Liên hợp

$$2x^2-15x+28 = 3 \left(\sqrt[3]{4x-8}-2 \right) \Leftrightarrow (x-4)(2x-7) = \frac{12(x-4)}{\sqrt[3]{(4x-8)^2}+2\sqrt[3]{4x-8}+4}$$

hoặc sử dụng phương pháp đánh giá.

142*. Chia hai vế cho x và đặt $t = \frac{1}{x}$ rồi nhân liên hợp.

147. Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+5x-2}$ tìm được $t = -2$.

149. Đặt $t = x\sqrt{2x^2+4}$

150. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ đưa về phương trình ẩn t . Có thể giải bằng cách bình phương hai vế đưa về phương trình tích $\sqrt{x-x^2} (2\sqrt{x-x^2}-3) = 0$

153. Đặt $t = \sqrt{2x+1} + \sqrt{9-2x}$.

154. Đặt $t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}$

155. Ta thấy $x=1$ là nghiệm của bất phương trình. Xét $x \neq 1$, chia hai vế của bất phương trình cho $\sqrt[4]{2x^2-3x+1}$ và đặt $t = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}}$

156. Đặt $\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, điều kiện $t \geq \sqrt{2}$, đưa về phương trình $2t^2 - 5x + 2 > 0$

157. Nhận xét $x = \pm 1$ không là nghiệm, chia hai vế cho $\sqrt{1-x^2}$.

158. Đặt $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ suy ra $x =$ và thay vào phương trình đã cho được phương trình

$$t^4 - 4t^3 - 7t^2 + 4t + 1 = 0$$

đây là phương trình hồi quy bậc bốn.

159. Đặt $t = \sqrt{4x+5}$ điều kiện $t \geq 0$ thì $x = \frac{t^2-5}{4}$ ta được phương trình $t^4 - 22t^2 - 8t + 27 = 0$.
Phân tích thành $(t^2 + 2t - 7)(t^2 - 2t - 11) = 0$

160. Đặt $t = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ thì phương trình có dạng: $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$

161. Đặt $y = \sqrt{x-1}$ ($y \geq 0$) được phương trình:

$$y^2 + \sqrt{y+5} = 5 \Leftrightarrow y^4 - 10y^2 - y + 20 = 0 \Leftrightarrow (y^2 + y - 4)(y^2 - y - 5) = 0$$

162. Đặt $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ được phương trình $2(1-y)^2 (y^2 + y - 1002) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

163. Chia hai vế cho x và đặt $t = x - \frac{1}{x}$

164. Chia hai vế cho x và đặt $t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}$

165. Đặt $t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ đưa về phương trình $2t^2 + 5t + 2 = 0$

166. Chia hai vế cho x^2 và đặt $t = x + \frac{2}{x}$.

167. Biến đổi phương trình thành $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+6) = 168x$ và nhóm $\sqrt{x}+2$ với $\sqrt{x}+3$, còn $\sqrt{x}+1$ nhóm với $\sqrt{x}+6$ rồi nhân vào với nhau. Sau đó chia hai vế cho x rồi đặt $t = \sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}}$.

168. Chia cho $\sqrt{x}$ và đặt $t = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

169. Kiểm tra $x = 0$ không là nghiệm. Xét hai trường hợp $x > 0$ và $x < 0$, trong từng trường hợp đều chia hai vế cho x rồi đặt $t = x + \frac{1}{x}$, chú ý về dấu của x khi đưa vào trong căn thức. Có thể làm bằng cách đặt hai ẩn u, v đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai.

170. Đặt $t = \sqrt{5-2x-x^2} = \sqrt{6-(x+1)^2}$ nên $t \in [0, \sqrt{6}]$ và được phương trình bậc hai

$$t^2 - 2mt + m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow t = m \pm \sqrt{5}$$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình ẩn t có nghiệm $t \in [0, \sqrt{6}] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m + \sqrt{5} \leq \sqrt{6} \\ 0 \leq m - \sqrt{5} \leq \sqrt{6} \end{cases}$

171. Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$ thì $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$. Sau đó cô lập tham số m và khảo sát hàm.

172. Nhận thấy $x = -1$ không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế cho $\sqrt{x+1}$ và đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ được phương trình $3t^2 - 2t + m = 0$. Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình ẩn t có nghiệm không âm. Xảy ra hai khả năng: Phương trình này có hai nghiệm trái dấu và có hai nghiệm không âm.

173. Nhận xét $(x+2) + (x^2 - 2x + 4) = x^2 - x + 6$. Đặt $\sqrt{x+2} = u, \sqrt{x^2 - 2x + 4} = v \dots$

174. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Biến đổi thành $(1+x) + 2(1-x) - 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - 3\sqrt{1-x^2} = 0$.
Đặt $u = \sqrt{1+x}, v = \sqrt{1-x}$ điều kiện $u, v \geq 0$ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai.

176. Viết $7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)} = \alpha(x-1) + \beta(x^2+x+1)$ từ đó tìm được α, β . Sau đó biến đổi thành $3(x-1) + 2(x^2+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$

177. Biến đổi thành $\sqrt{(x^2+x)(x+2)} - x^2 + x + 4 = 0$, đặt $\sqrt{x^2+x} = a, \sqrt{x+2} = b$

178. Đặt $y = \sqrt{3x-2}$ đưa về phương trình đẳng cấp đối với x, y .

180. Biến đổi thành $2(x^2 - x + 1) - 7\sqrt{x^3+1} - 4(x+1) = 0$

181*. Điều kiện $x \geq -1 + \sqrt{5} \vee -1 - \sqrt{5} \leq x \leq 0$. Bất phương trình tương đương với

$$(x^2 + 2x - 4) + 3x < 4\sqrt{x(x^2 + 2x - 4)}$$

Ta xét hai trường hợp:

- $-1 - \sqrt{5} \leq x \leq 0$ thì $(x^2 + 2x - 4) + 3x < 0 \leq 4\sqrt{x(x^2 + 2x - 4)}$
- $x \geq -1 + \sqrt{5}$. Đặt $\sqrt{x^2 + 2x - 4} = a \geq 0, \sqrt{x} = b > 0$. Bất phương trình trở thành

$$a^2 + 3b^2 < 4ab \Leftrightarrow (a-b)(a-3b) < 0 \Leftrightarrow b < a < 3b$$

182. Đặt $y = \sqrt{x+2}$ đưa về phương trình đẳng cấp bậc ba.

183*. Đặt $u = x^2, v = \sqrt{x^2 - 1}$ được phương trình $u + 3v = \sqrt{u^2 - v^2}$. Bình phương được phương trình đẳng cấp bậc hai đối với u, v .

184*. $a = \sqrt{x^2 + 2x}, b = \sqrt{2x - 1}$, điều kiện $a, b > 0$ thì $3x^2 + 4x + 1 = 3a^2 - b^2$. Thu được phương trình

$$\begin{aligned} a + b &= \sqrt{3a^2 - b^2} \\ \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}b \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\sqrt{2x - 1} \end{aligned}$$

Giải phương trình này tìm được nghiệm duy nhất của phương trình.

185. Đặt $a = \sqrt[4]{x+1}, b = \sqrt[4]{x-2}$ điều kiện $a, b \geq 0$ được phương trình

$$a^2 - b^2 = \frac{ab}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}b^2 - ab = 0$$

186. Biến đổi thành $(x-3)(x^2 - 5x - 2) + 6(x-3)\sqrt{x^2 - 5x + 5} = 0$

187*. Điều kiện $x \geq 5$. Chuyển về bình phương ta được:

$$2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x^2 - x - 20)(x + 1)}$$

Nhận xét không tồn tại số α, β để: $2x^2 - 5x + 2 = \alpha(x^2 - x - 20) + \beta(x + 1)$ vậy ta không thể đặt $u = x^2 - x - 20, v = x + 1$. Nhưng có

$$(x^2 - x - 20)(x + 1) = (x + 4)(x - 5)(x + 1) = (x + 4)(x^2 - 4x - 5)$$

nên ta viết lại phương trình thành $2(x^2 - 4x - 5) + 3(x + 4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x + 4)}$, sau đó đặt $u = x^2 - 4x - 5, v = x + 4$.

188*. Đặt $a = \sqrt{x - 2}, b = \sqrt{x^2 - x + 1}$ thì $x^2 - 6x + 11 = b^2 - 5a^2, x^2 - 4x + 7 = b^2 - 3a^2$ ta có phương trình đẳng cấp bậc ba: $6a^3 - 5a^2b - 2ab^2 + b^3 = 0$.

189*. Ta có $18x^2 - 13x + 2 = 2(3x - 1)^2 - x = 2a - x$ với $a = (3x - 1)^2$. Còn

$$81x^4 - 108x^3 + 56x^2 - 12x + 1 = (3x - 1)^4 + 2x^2 = a^2 + 2x^2.$$

Ta được phương trình $2a - x = \sqrt{3(a^2 + 2x^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2x \\ a^2 - 4ax - 5x^2 = 0 \end{cases}$

190. Điều kiện $x \geq 1$. Ta xét hai khả năng:

- $x = 1$ là nghiệm $\Leftrightarrow m = 0$
- $x \neq 1$, chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[4]{x^2 - 1}$ và đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ với $0 < t < 1$, ta được phương trình thétich $+ \frac{m}{t} = 2$

191. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3}$, điều kiện $t \geq \sqrt{3}$ ta được: $t^2 + (2x + 1)t - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2x + 2) = 0$.

192. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2}$ được phương trình $(t - 3)(t - x + 1) = 0$

193. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$. Cách khác: Bình phương hai vế.

194. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x}$ được phương trình $x^2 - 2tx - 1 = 0$. Tính Δ và tìm được $x = t \pm (x - 1)$.

195. Đặt $t = \sqrt{x + 1}$ đưa về phương trình bậc hai theo t có Δ chẵn.

197*. Biến đổi thành $x^2 - x(\sqrt{x - 1} - 1) - 2\sqrt{x - 1} - 2(x - 1) = 0$. Đặt $y = \sqrt{x - 1} \geq 0$, ta được phương trình $x^2 - x(y - 1) - 2y - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + y + 1) = 0$.

198*. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}, t \geq \sqrt{2}$ được phương trình $x^2 + 1 - (x + 1)t = 0$. Phương trình này không có Δ chẵn, nên ta thêm bớt như sau: $x^2 - 2x + 3 - (x + 1)t + 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow t^2 - (x + 1)t + 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t - x + 1) = 0$

199*. Đặt $t = \sqrt{1 - x}$ được phương trình

$$4\sqrt{1 + x} = 3x + 2t + t\sqrt{1 + x} \quad (1)$$

Nếu ta rút $x = 1 - t^2$ thay vào thì được $3t^2 - (2 + \sqrt{1 + x})t + 4(\sqrt{1 + x} - 1) = 0$. Nhưng phương trình này không có Δ dạng bình phương nên ta tách $3x$ theo $(\sqrt{1 - x})^2$ và $(\sqrt{1 + x})^2$, cụ thể

$$3x = -(1 - x) + 2(1 + x)$$

và thay vào phương trình ẩn t .

200*. Bình phương hai vế phương trình

$$4(2x+4) + 16\sqrt{2(4-x^2)} + 16(2-x) = 9x^2 + 16$$

Đặt $t = \sqrt{2(4-x^2)} \geq 0$ được phương trình $9x^2 - 16t - 32 + 8x = 0$. Ta phải tách $9x^2 = \alpha 2(4-x^2) + (9+2\alpha)x^2 - 8\alpha$ làm sao cho Δ_t có dạng chính phương...

201*. Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$, ta có $12 - 8x = 2[(\sqrt{2x+4})^2 - (2\sqrt{2-x})^2]$ nên phương trình tương đương với

$$(\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x})(2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} - \sqrt{9x^2+16}) = 0$$

Giải phương trình $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} - \sqrt{9x^2+16}$, ta bình phương rồi đặt $t = 2\sqrt{8-2x^2}$ được phương trình $(t-x)(t+x+8) = 0$

202. Đặt $t = \sqrt{x+1}$ được phương trình $(x-t)^3 = 0$

203*. Điều kiện $x \geq \frac{4}{3} \vee x \leq -\frac{1}{3}$. Ta có

$$3x^3 - 13x^2 + 30x - 4 = 2(6x+2) + (x^2-3x+2)(3x-4)$$

Xét hai khả năng:

- Nếu $x \leq -\frac{1}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $x \geq \frac{4}{3}$ kiểm tra $x = \frac{4}{3}$ không là nghiệm nên chia hai vế cho $3x-4$ và đặt $t = \sqrt{\frac{6x+2}{3x-4}}$ được phương trình

$$(t-x+1)(2t-x+2) = 0$$

Từ đó tìm được $x = 3$ và sử dụng phương pháp Cardano cho phương trình bậc ba được $x = ???$

204*. Đặt $a = \sqrt{x^2+2} \geq 2$ và $b = \sqrt{x^2+2x+3} \geq 2$. Khi đó $b^2 - a^2 = 2x+1$ và thu được phương trình

$$b^2 - a^2 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2 - 1)a + \frac{1}{2}(b^2 - a^2 + 1)b < 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(a+b+1)^2 < 0 \Leftrightarrow b < a$$

Từ đó thu được phương trình $\sqrt{x^2+2} > \sqrt{x^2+2x+3}$.

205. Đặt $a = \sqrt[4]{x}$, $b = \sqrt[4]{1-x}$ được phương trình $a^2 + ab^2 + b^3 = b^2 + a^3 + a^2b$ và nhóm thành

$$(a-b)(a^2+b^2-a-b) = 0$$

206. Đặt $y = \sqrt{x+5}$ đưa về hệ $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ y^2 - x = 5 \end{cases}$

208. Đặt $y = \sqrt[3]{2x+1}$

209. Đặt $u = \sqrt[3]{x+34}$, $v = \sqrt[3]{x-3}$

210. Đặt $u = \sqrt[3]{24+x}$, $v = \sqrt{12-x}$ được hệ $\begin{cases} u+v = 6 \\ u^3+v^2 = 36 \end{cases}$

211. Đặt $a = \sqrt[4]{x}$, $b = \sqrt[4]{17-x}$ đưa về hệ đối xứng loại một. Tìm được $ab = 2$, $a^4b^4 = 16$.

212. Đặt $y = \sqrt[3]{35-x^3} \Rightarrow x^3 + y^3 = 35$ đưa về hệ đối xứng.

213. Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1}$ đưa về hệ
$$\begin{cases} x^3 = 2y - 1 \\ y^3 = 2x - 1 \end{cases}$$

214. Đặt $u = \sqrt{4+x}$, $v = \sqrt{5-x}$ ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 + v^2 = 9 \end{cases}$$

225. Biến đổi thành $\sqrt{3x+1} = -(-2x+3)^2 + x + 4$ đặt $-2y+3 = \sqrt{3x+1}$ đưa về hệ phương trình. Tìm được $x = y$ hoặc $2y = 5 - 2x$.

226. Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Biến đổi thành $(x-1)^2 - 1 = 2\sqrt{2x-1}$ và đặt $y-1 = \sqrt{2x-1}$ thì ta đưa về hệ đối xứng loại hai. Trừ từng vế được $(x-y)(x+y) = 0$

227. Biến đổi thành $7\sqrt{4(x^2-3x+3)+17x-13} - 14\sqrt{x^2-3x+3} = 17x-13$. Đặt $u = 17x-13$, $v = \sqrt{x^2-3x+3}$ được hệ

$$\begin{cases} x = \frac{u+13}{17} \\ v^2 = \left(\frac{u+13}{17}\right)^2 - 3\left(\frac{u+13}{17}\right) + 3 = \frac{u^2-25u+373}{289} \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành $7\sqrt{4v^2+u} - 14v = u \Leftrightarrow u(u+28v-49) = 0$

229. Đặt $\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = at + b$ (bậc nhất của t để khi bình phương được bậc hai). Từ đó tìm được $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ và đưa được về hệ đối xứng.

230. Đặt $a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{5+\sqrt{x-1}}$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$) thì ta đưa về hệ nửa đối xứng với a, b .

231. Đặt $u = \sqrt{5-x}$, $v = \sqrt{5-y}$ ($0 < u, v < \sqrt{10}$).

232. Biến đổi thành $4x^2 - 12x - 2 = 2\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 2\sqrt{4x+5} + 11$ và đặt $2y-3 = \sqrt{4x+5}$.

233. Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $v = \sqrt{1-x}$ đưa về hệ có một phương trình tích $(u-v)(2u-v+1) = 0$

240. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - \sqrt{x+100}$ xác định trên $[-1, +\infty)$ có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{2\sqrt{x+9}} + \frac{1}{2\sqrt{x+16}} - \frac{1}{2\sqrt{x+100}}$$

Nhận xét rằng $0 < \sqrt{x+16} < \sqrt{x+100}$ nên $\frac{1}{2\sqrt{x+16}} > \frac{1}{2\sqrt{x+100}}$ hay $\frac{1}{2\sqrt{x+16}} - \frac{1}{2\sqrt{x+100}} > 0$ và do đó, $f'(x) > 0$ với mọi $x > -1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-1, +\infty)$ và phương trình $f(x) = 0$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Mà $f(0) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

241. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.