Chương 1

Số Bernoulli

1.1 Lịch sử ra đời

Jakob Bernoulli[1] đã để lại cuốn sách *Ars Conjectandi* (1713), ông nghiên cứu tổng lũy thừa của các số nguyên liên tiếp $1^k + 2^k + 3^k + ...$, ông đã giới thiệu các số đặc biệt có liên quan đến tổng này và đưa ra các công thức cho tổng các lũy thừa :

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, ... \tag{1.1}$$

Ông khẳng định rằng không mất đến 10 phút để tính tổng trên với lũy thừa 10 với $n = 1000$, và kết quả chính xác Bernoulli đã đưa ra là:

$$91409924241424243424241924242500.$$

Bernoulli đưa ra một công thức chung liên quan đến những số đó, giải thích chúng được tính qua một công thức truy hồi và nhấn mạnh cách thức của mình nó rất hữu ích cho việc tính toán tổng các lũy thừa. Bernoulli không dùng ký hiệu

[1] Jakob Bernoulli (còn được biết đến với tên James hoặc Jacques) (27 tháng 12, 1654 – 16 tháng 8 năm 1705) là nhà toán học người Thụy Sĩ. Cống hiến chủ yếu của ông là vào hình học giải tích, lý thuyết xác suất, phép tính biến phân. Bất đẳng thức Bernoulli thường được dạy trong thường phổ thông mang tên này để vinh danh ông. Bernoulli cùng với Newton và Leibniz là một trong những người đầu tiên phát triển phép tính vi phân và tích phân nhưng ông đã có những tìm hiểu cao hơn. Ông còn có một người em trai kém 12 tuổi và cũng là một nhà toán học nổi tiếng Johann Bernoulli, gia đình nhà Bernoulli về sau còn sản sinh ra nhiều nhà toán học tài năng.

$B_0, B_1, B_2, ...$ mà ông dùng các ký tự $A, B, C....$ thay cho B_{2n} và cũng không dùng công thức nhị thức, trong tài liệu của ông công thức được viết là:
$\frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c.c-1.c-2}{2.3.4}Bn^{c-3} +$

$\frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4.c-5.c-6}{2.3.4.5.6.7.8}Dn^{c-7} +$
...

Trong đó $c = k$.

Sử dụng ký hiệu hiện đại [**?**], công thức được viết lại:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} \qquad \left(= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \right)$$

Trong đó:

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)(k-2)...(k-j+1)}{j!}$$

và

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1, k = 1, 2, ...$$

Dưới đây B_j gọi là số Bernoulli[2].

Và không chỉ có Bernoulli đưa ra công thức này, công thức trong tài liệu *Katsuyo Sanpo* của nhà toán học xuất sắc của Nhật Bản Takakazu Seki[3], được xuất bản năm 1712, trước Bernoulli 1 năm công thức định nghĩa quy nạp của các số Bernoulli được đưa ra. Công thức và định nghĩa của ông là hoàn toàn giống như của Bernoulli.

Seki đề cập đến các số $B_0, B_1, B_2, ...$ gọi là *Shusuu* (có nghĩa là: số được chọn) với thứ tự đầu tiên, thứ tự thứ hai vv., cũng như đánh chỉ số lẻ B_{2n+1}. Hầu hết người ta không biết rằng Seki độc lập tìm thấy những số Bernoulli, nhưng các công trình

[2] Abraham , sinh ngày 26 tháng năm năm 1667 tại Vitry - le - Francois, Champagne, Pháp - qua đời vào ngày 27 tháng 11 năm 1754 tại London, Anh), người đầu tiên gọi số này là số Bernoulli trong tài liệu *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis(London , 1730)*

[3] Seki Takakazu, 1642 - mất ngày 05 tháng 12 năm 1708), còn được gọi là Seki Kowa là một nhà toán học Nhật Bản trong thời kỳ Edo. Seki đặt nền móng cho sự phát triển tiếp theo cho toán học của người Nhật gọi là Wasan và ông đã được mô tả là "Newton của Nhật Bản".

thu thập được của Seki đã được xuất bản đều có chứa một bản dịch tiếng Anh của mỗi bài viết. Có một bảng biểu của Seki thể hiện công thức cho các chuỗi lũy thừa với hệ số nhị thức và "số Seki-Bernoulli", cùng với một bản dịch sang ký hiệu hiện đại, thể hiện trong hình 1.1 và 1.2.

Cả Seki, Bernoulli cũng không giải thích chi tiết làm thế nào để suy ra các công thức 1.1.

Trước đó, công thức cho các chuỗi lũy thừa đã được thảo luận tại *Academia Algebrae* bởi Faulhaber[4]. Ông đã thu được kết quả nói rằng, khi k là số lẻ, tổng $\sum_{i=1}^{n} i^k$ là một đa thức của $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$, (ví dụ đầu tiên $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$), trong khi đó khi k là chẵn, $\sum_{i=1}^{n} i^k$ chia hết cho đa thức $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{i=1}^{n} i^2$ như là một đa thức của n, và thương thu được lại là một đa thức của $\sum_{i=1}^{n} i$. Nhưng dường như ông cũng đã không tìm được những số Bernoulli. Những phát hiện này của Faulhaber đã được khám phá bởi Jacobi[5], người đã đưa ra một chứng minh chặt chẽ.

Bây giờ ta định nghĩa của các số Bernoulli một lần nữa, làm theo Seki và Bernoulli và xác định chúng bằng cách sử dụng một công thức truy hồi. Các số Bernoulli cũng được xác định bằng cách sử dụng một hàm sinh (trong chương sau) mà các định nghĩa là hoàn toàn tương đương.

1.2 Định nghĩa số Bernoulli:

$B_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ trong biểu thức truy hồi sau gọi là số Bernoulli:

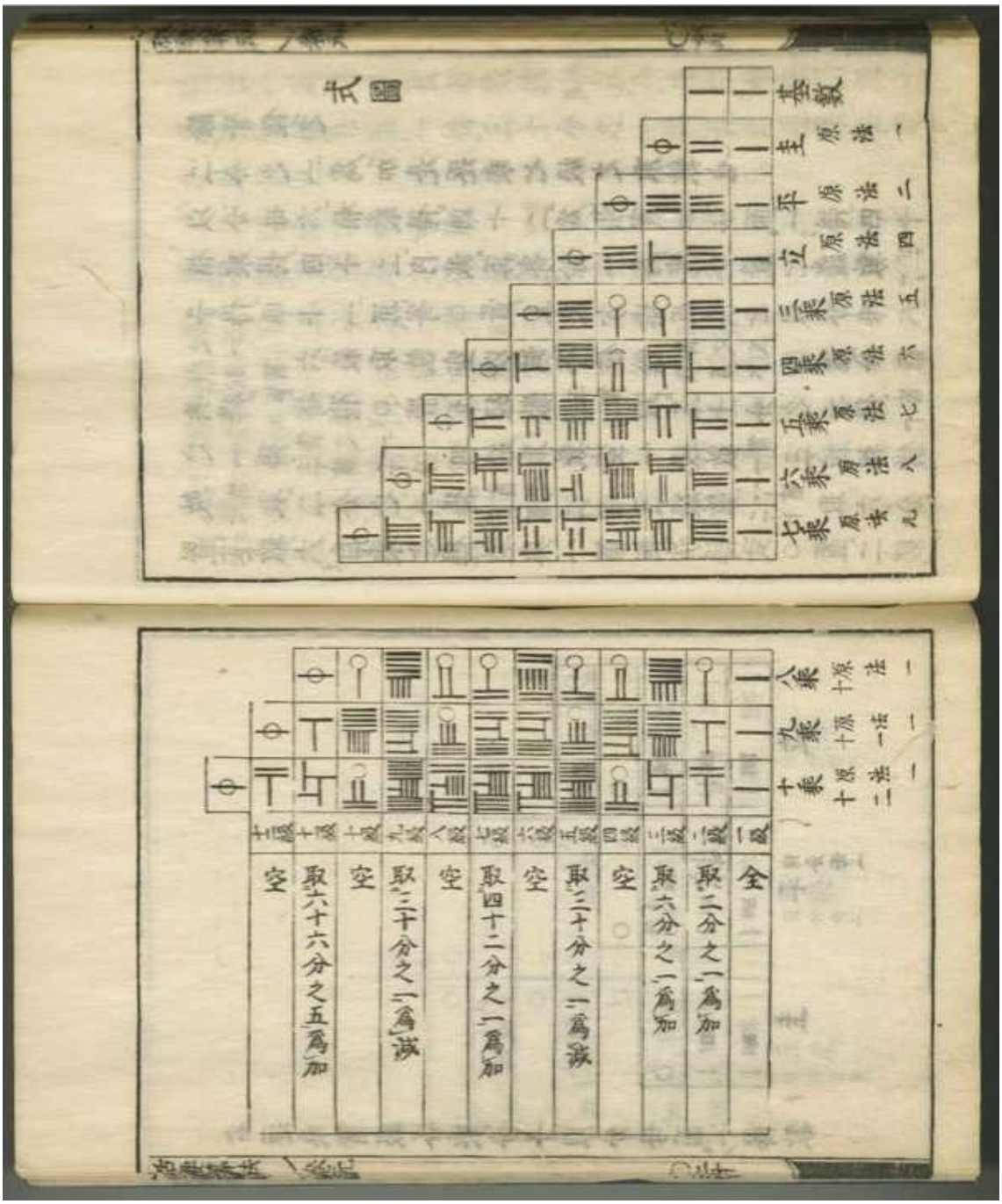
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = n+1 \tag{1.2}$$

Ta tính vài số Bernoulli đầu

Với $n = 0,\ B_0 = 1$

[4]Johann Faulhaber (Sinh ngày 5 tháng 5 , 1580 tại Ulm, Đức mất năm 1635 tại Ulm, Đức)

[5]Carl Gustav Jacob Jacobi (Sinh ngày 10 Tháng 12 , 1804 ở Potsdam, Prussia (giờ là Đức) mất ngày 18 tháng 2, 1851 tại Berlin, Đức)



Hình 1.1: Seki, trình bày bảng công thức tính tổng trong tài liệu Katsuyou Sanpou, viết bằng chữ Trung Quốc đồng thời sử dụng các ký hiệu của Sangi hoặc đếm que. chứa mỗi thành phần của công thức trong ngoặc trong biểu thức 1.1: Các số được chỉ định bởi "lũy thừa" sau dịch là k của công thức này, các hệ số nhị thức được trình bày trong "tam giác Pascal" ở phần bên phải của bảng, những con số Bernoulli B_j ở bên trái, hệ số nhị thức bị khuyết $\binom{k+1}{k+1}$ trong 1.1 tương ứng với các số "1" bị gạch ở đầu của mỗi cột của "tam giác Pascal", và cuối cùng là dãy các "mẫu số" là số $k+1$ được chia sau khi tính xong phần trên.

a: Số gạch chéo là được bỏ qua.
b: Số này cũng phải được gạch chéo.
c: Số này phải là 2.
d: Số này phải là 3.
e: Số này phải là 924.

											$\cancel{1}$		
										$\cancel{1}$	12	lượt 12	bỏ qua
									$\cancel{1}$	11	66	lượt 11	lấy 5/66 và cộng
								$\cancel{1}$	10	55	220	lượt 10	bỏ qua
							$\cancel{1}$	9	45	165	495	lượt 9	lấy 1/30 và trừ
						$\cancel{1}$	8	36	120	330	792	lượt 8	bỏ qua
					$\cancel{1}$	7	28	84	210	462	992[e]	lượt 7	lấy 1/42 và cộng
				$\cancel{1}$	6	21	56	126	252	462	792	lượt 6	bỏ qua
			$\cancel{1}$	5	15	35	70	126	210	330	495	lượt 5	lấy 1/30 và trừ
		$\cancel{1}$	4	10	20	35	56	84	120	165	220	lượt 4	bỏ qua
	$\cancel{1}$[a]	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	lượt 3	lấy 1/6 và cộng
1[b]	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	lượt 2	lấy 1/2 và cộng
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	lượt 1	tất cả
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		số mũ
	1[c]	2[d]	4	5	6	7	8	9	10	11	12		mẫu số

Hình 1.2: Katsuyou Sanpou (Bản dịch nguyên gốc)

Cho $n=1$ từ công thức ta có: $B_0+2B_1=2$

từ đó ta có:

$$\frac{1}{2}(2-B_0)=\frac{1}{2}$$

Cho $n=2$ trong công thức ta có:

$$B_0+3B_1+3B_2=3$$

nên ta có:

$$B_2=\frac{1}{3}(3-B_0-3B_1)=\frac{1}{6}$$

Tương tự ta tính B_3, B_4... Ta có bảng sau:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
B_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	...

Bảng 1.1: Số Bernoulli

1.3 Tổng chuỗi lũy thừa, định lý Faulhaber

1.3.1 Tổng chuỗi lũy thừa các số nguyên liên tiếp

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{n} i^k, \qquad (n,k\in, k\geq 0, n\geq 1)$$

Một vài công thức $S_k(n)$:

$$
\begin{aligned}
S_0(n) &= n \\
S_1(n) &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2}n(n+1) \\
S_2(n) &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\
&= \frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1) \\
S_3(n) &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
S_4(n) &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \\
&= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \\
S_5(n) &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^4}{12} - \frac{n^2}{12} \\
&= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\
S_6(n) &= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)
\end{aligned}
$$

Ta chứng minh công thức trên có liên quan tới số Bernoulli. Trước hết ta thấy ngay: $S_0(n) = n$

Với $k \geq 1$. Từ công thức hệ số nhị thức ta có:

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} m^j$$

Cho $m = 1, 2, 3 \ldots, n$, và cộng tất cả lại ta có:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n)$$

Suy ra

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right)$$

Cho $k = 1, 2, 3, \ldots$ vào công thức trên ta được:

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Ta có thể thấy rằng $S(k)$ là một đa thức bậc $k+1$ với ẩn là n, trong đó số hạng đầu tiên là: $\frac{1}{k+1} n^{k+1}$.

Dưới đây ta sẽ chỉ ra công thức một cách rõ ràng

Bằng cách thay n bằng x xét đa thức $S_k(x) = \dfrac{1}{k+1} x^{k+1} + \ldots\ldots$ Thông thường hai đa thức $f(x), g(x)$ là gống nhau nếu $f(n) = g(n)$ với mọi n. Theo định nghĩa ta có: $S_k(n+1) - S_k(n) = (n+1)^k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Do đó ta có:

$$S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k$$

Cho x = 0 và $S_k(1) = 1$ ta có $S_k(0) = 0$

Đây là hằng số của $S_k(x)$, các hệ số khác tính thông qua đạo hàm $S_k^{(j)}(0), 1 \le j \le k$.

Lấy đạo hàm từ công thức sau :

$$S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k$$

Ta được :

$$S_k'(x+1) - S_k'(x) = k(x+1)^{k-1} \tag{1.3}$$

Cho $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, và cộng tất cả lại ta được:

$$S_k^{'}(n) - S_k^{'}(0) = kS_{k-1}(n)$$

Công thức này đúng cho mọi số nguyên dương n. Nếu ta đặt $S_k^{'}(0) = b_k, \quad (b_0 = 1)$ ta có đẳng thức:

$$S_k^{'}(x) = kS_{k-1}(x) + b_k$$

Lấy đạo hàm cả hai vế ta có:

$$S_k^{''}(x) = kS_{k-1}^{'}(x) \tag{1.4}$$

Cho x = 0 ta được

$$S_k^{''}(0) = kb_{k-1}$$

Lấy đạo hàm của 1.4 lần nữa và áp dụng 1.4 ta được

$$S_k^{'''}(x) = kS_{k-1}^{''}(x) = k(k-1)S_{k-2}^{'}(x)$$

Cho x = 0 ta được

$$S_k^{'''}(0) = k(k-1)b_{k-2}$$

Tương tự, lấy đạo hàm liên tiếp ta được:

$$S_k^{(j)}(0) = k(k-1)...(k-j+2)b_{k-j+1}$$

với $(2 \leq j \leq k+1)$

Kết quả là :

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{S_k^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j} b_{k-j+1} x^j \qquad (S_k^{(0)}(0) = 0)$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} b_j x^{k+1-j}$$

Vì $S_k(1) = 1$ bằng cách cho $x = 1$ ở công thức trên ta có được công thức truy hồi:

$$k+1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} b_j$$

Và đây chính là công thức truy hồi tính số Bernoulli. Áp dụng công thức:

$$\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j} = \frac{1}{k-j+1}\binom{k}{j}$$

và cho tương ứng $b_j = B_j$ ta kết luận công thức 1.1 Ghi chú : nếu ta đặt $S_k^{'}(x-1) = B_k(x)$, $\left(B_k(x) = x^k + ...\right)$ Theo 1.3 và 1.4 khi đó $B_k(x)$ được gọi là đa thức Bernoulli thứ k (Ta sẽ trình bày trong mục **??** của chương sau).

Mệnh đề 1.3.1 *Nếu n là số nguyên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3, thì $B_n = 0$ Và ta viết $(-1)^n B_n = B_n$ thỏa mãn với mọi số nguyên dương $n \neq 1$.*

Chứng minh: Giả sử $k \geq 1$ cho $x = -1$ trong công thức $S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k$ và sử dụng $S_k(0) = 0$ ta có $S_k(-1) = 0$, cho $x = -1$ trong công thức sau:

$$(k+1)S_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j x^{k+1-j}$$

ta được:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^j B_j = 0$$

mặt khác ta có công thức định nghĩa số bernoulli :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1$$

Khi đó lấy hiệu hai công thức trên thì chỉ có số hạng ở vị trí lẻ xuất hiện và ta có:

$$2\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k+1}{2j+1} B_{2j+1} = k+1$$

Với $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x. Vì $B_1 = \frac{1}{2}$ số hạng với $j = 0$ ở vế trái giản ước với vế phải và ta có:

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k+1}{2j+1} B_{2j+1} = 0 \qquad k \geq 3$$

Cho $k = 3, 5, 7, \ldots$ ta có $B_k = 0$ với mọi số lẻ $k \geq 3$

1.3.2 Định lý Faulhaber

Định lý 1.3.2 *Với ký hiệu* $\sigma_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, $\quad \sigma_1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sigma_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(i) Cho $k = 3, 5, \ldots$, *Khi đó tồn tại một đa thức* F_k *có bậc* $\frac{1}{2}(k+1)$ *và* $F_k(0) = 0$, *sao cho* $\sigma_k = F_k(\sigma_1)$.
(ii) $k = 2, 4, \ldots$, *Khi đó tồn tại đa thức* F_k *có bậc* $\frac{1}{2}(k-2)$, *sao cho* $\sigma_k = \sigma_2 F_k(\sigma_1)$.

Chứng minh: [**?**]:Ta có

$$\begin{aligned}
\sigma_1^k(n) &= \sum_{m=1}^{n} \left[\left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^k - \left(\frac{m(m-1)}{2} \right)^k \right] \\
&= \sum_{m=1}^{n} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{m}{2} \right)^k m^r \left[1 - (-1)^{k-r} \right] \qquad (1.5) \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \sigma_{k+r}(n) \left[1 - (-1)^{k-r} \right]
\end{aligned}$$

Ta có 1.5 đúng với mọi k, nhưng giả sử k là số lẻ. Khi đó chỉ tồn tại các số hạng khác không với r chẵn, khi đó ta thấy σ_1^k là tổ hợp tuyến tính của $\sigma_1, \sigma_3, \ldots \sigma_{2k-1}$. Từ đó σ_{2k-1} cũng là tổ hợp tuyến tính của $\left\{ \sigma_1^k \right\}$ (Chẳng hạn $\sigma_3 = \sigma_1^2$). Mặt khác $F(0) = 0$ đến đây ta đã chứng minh xong (i).

Ta chứng minh (ii) hoàn toàn tương tự, giả sử k là số chẵn, và ta có:

$$(2n+1)\sigma_1^k(n) = \sum_{m=1}^{n} \left[(2m+1) \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^k - (2m-1) \left(\frac{m(m-1)}{2} \right)^k \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{n}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\left(\frac{m}{2}\right)^k m^r\left[(2m+1)-(2m-1)(-1)^{k-r}\right] \\
&= \frac{1}{2^k}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\left(2\sigma_{k+r+1}(n)\left[1+(-1)^{k-r+1}\right]+\sigma_{k+r}(n)\left[1+(-1)^{k-r}\right]\right)
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Như vậy vế phải 1.6 chỉ tồn tại các số hạng chứa σ_q với q chẵn, do vậy $(2n+1)\sigma_1^k$ là tổ hợp tuyến tính của $\sigma_2, \sigma_4, ...\sigma_{2k}$. Vậy ta đã chứng minh (ii).

Một vài ví dụ cho định lý Faulhaber:

$$
\begin{aligned}
&1^1+2^1+\cdots+n^1=\sigma_1, \qquad \sigma_1=(n^2+n)/2; \\
&1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{2n+1}{3}\sigma_1; \\
&1^3+2^3+\cdots+n^3=\sigma_1^2; \\
&1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{2n+1}{5}(2\sigma_1^2-\frac{1}{3}\sigma_1); \\
&1^5+2^5+\cdots+n^5=\frac{1}{3}(4\sigma_1^3-\sigma_1^2). \\
&\qquad\qquad ...
\end{aligned}
$$

Chú ý: Từ định nghĩa công thức Bernoulli dạng truy hồi 1.2 nếu ta chuyển vế, $(-1)^n B_n = B_n (i \neq 1)$ và $B_1 = \frac{1}{2}$ ta có

$$
\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i}B_i=0 \tag{1.7}
$$

Do đó nếu định nghĩa lại $B_1 = -\frac{1}{2}$ thì công thức sau cũng là một công thức tính số Bernoulli (Có sử dụng sau này).

$$
\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=0
$$