

Chương 1

Hàm sinh số Bernoulli

1.1 Chuỗi lũy thừa hình thức

Cho R là một miền nguyên giao hoán với đơn vị (bằng 1) ta có tổng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

với ẩn t và hệ số trong R được gọi là một chuỗi lũy thừa hình thức với hệ số trong R , và tập hợp của tất cả các chuỗi lũy thừa hình thức như vậy được ký hiệu là $R[[t]]$. Hai chuỗi lũy thừa hình thức được xác định là bằng nhau khi và chỉ khi tất cả các hệ số của t^n bằng nhau. Ví dụ điển hình đó sẽ xuất hiện trong phần này là: (ta lấy $R = \mathbb{Q}$)

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

và:

$$\log(t+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n!} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$$

Đây là chuỗi Taylor mở rộng các hàm e^x và $\log(1+x)$ quanh $x=0$, ta coi đây như chuỗi lũy thừa hình thức. Ta sử dụng các ký hiệu e^x và $\log(1+x)$, Về phải là chuỗi lũy thừa hình thức và sẽ không coi chúng như các hàm ẩn t . Phép toán tổng

và tích hai chuỗi lũy thừa hình thức là:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, c_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i}$$

Và phép nhân phân phối phép cộng:

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) t^2 + \dots$$

Dễ thấy $R[[t]]$ là một vành giao hoán có đơn vị, phần tử 0 và đơn vị của các chuỗi lũy thừa hình thức là:

$$0 + 0.t + 0.t^2 + 0.t^3 + \dots$$

và

$$1 + 0.t + 0.t^2 + 0.t^3 + \dots$$

Và cũng được ký hiệu đơn giản lần lượt là 0 và 1. Tập các chuỗi lũy thừa hình thức có tất cả có hệ số là 0, ngoại trừ các hằng số được xác định một cách tự nhiên trong R . Hơn nữa, Xét một đa thức $P(t)$ với hệ số trong R như là một chuỗi lũy thừa hình thức trong đó có hệ số a_n bằng 0 khi n lớn hơn bậc của $P(t)$, khi đó ta có thể xem xét $R[t]$ như một vành con của $R[[t]]$. Các định nghĩa phép toán trong $R[[t]]$ là những khái quát tự nhiên của đa thức.

Với giả sử R là một miền nguyên thì $R[[t]]$ cũng là một miền nguyên.

Cụ thể, ta có

Mệnh đề 1.1.1 *Vành $R[[t]]$ không có ước của không. Cụ thể, nếu $A \neq 0$ và $A.B = AC$ suy ra $A(B - C) = 0$ (A, B, C thuộc $R[[t]]$) thì $B = C$.*

Chứng minh: Cho $A = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$ và $B = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots$

là các phần tử khác không gọi a_k, b_l là hệ số khác không đầu tiên khi đó hệ số c_{k+l} của t^{k+l} trong $A.B$ là: $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots$ là:

$$c_{k+l} = a_0 b_{k+l} + a_1 b_{k+l-1} + \dots + a_k b_l + a_{k+l-1} b_1 + a_{k+l} b_0 = a_k b_l$$

Vì R là miền nguyên nên $c_{k+l} = a_k b_l$ khác không suy ra $A.B \neq 0$.

$$\text{Nếu } A.B = 0 \text{ suy ra } A(B - C) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = C \end{cases} \text{ do vậy nếu } A \neq 0 \text{ thì } B = C$$

Mệnh đề 1.1.2 Một chuỗi lũy thừa hình thức $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ là khả nghịch trong $R[[t]]$ nếu và chỉ nếu hệ số tự do a_0 khả nghịch ($a_0 \neq 0$).

Chứng minh: i) Giả sử chuỗi $f(t)$ khả nghịch, khi đó có chuỗi $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \in R[[t]]$ sao cho $f(t)g(t) = 1$. Từ đó suy ra $a_0 b_0 = 1$ hay $a_0 \neq 0$.

ii) Ngược lại, giả sử $a_0 \neq 0$, ta có: $f(t)g(t) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j = 0; \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$

Từ $a_0 b_0 = 1$ có $b_0 = a_0^{-1}$. Từ $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ có: $b_1 = (-a_1 b_0) \cdot a_0^{-1}$. $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$ suy ra $b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0) \cdot a_0^{-1} = a_1^2 b_0 a_0^{-1} a_0^{-1} - a_2 a_0^{-1} \cdot a_0^{-1}$.

Tương tự như vậy, ta xác định được $b_3, b_4, \dots, b_n, \dots$

Tức là tìm được chuỗi $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \in R[[t]]$ sao cho $f(t)g(t) = 1$.

Đạo hàm hình thức của chuỗi $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ là $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$.

Với một hàm bất kỳ xác định tại $t = 0$, ta biểu diễn nó qua chuỗi $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$.

Ta ký hiệu $A(0)$ là hệ số tự do của chuỗi $A(t)$. Như đã đề cập trước đó ta không thể thay t bởi một giá trị đặc biệt nào, dù vậy thay t bằng 0 thì được và ta sử dụng ký hiệu đặc biệt này trong trường hợp này.

Tiếp theo, ta chỉ ra rằng ta có thể định nghĩa một tổng vô hạn các phần tử của $R[[t]]$ trong một điều kiện nhất định. Cho $\{A_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $A_k(t) = \sum_{i=0}^n a_i^{(k)} t^i$ là một họ vô hạn của chuỗi lũy thừa hình thức. Giả sử các chuỗi này thỏa mãn điều kiện

Với mỗi i , chỉ tồn tại hữu hạn k sao cho $a_i^{(k)} \neq 0$

Nói cách khác, nếu ta viết $A_k(t) = a_{n_k}^{(k)} t^{n_k} + (\text{số hạng bậc cao hơn})$ ($a_{n_k}^{(k)} \neq 0$) ta có $n \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$. Khi đó ta định nghĩa

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

ở đó

$$a_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$$

Tóm lại, ta lấy tổng các hệ số trong cùng một bậc cùng điều kiện trên thì mỗi tổng là một tổng hữu hạn

Trong trường hợp đặc biệt, ta đặt được chuỗi lũy thừa hình thức với hệ số hằng bị khuyết vào một chuỗi khác. Cụ thể nếu $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ và $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ ($B(0) = b_0 = 0$), khi đó ta có công thức:

$$A(B(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (B(t))^i$$

Vì từ $b_0 = 0$, đa thức $a_i (B(t))^i$ ít nhất bắt đầu từ số hạng bậc i , ta có họ $\{a_i (B(t))^i\}_{i=0}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện trên.

Một ví dụ khá dễ hiểu:

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + \frac{(-t)}{1!} + \frac{(-t)^2}{2!} + \frac{(-t)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\log(1-t) &= \log(1+(-t)) = -t - \frac{(-t)^2}{2} + \frac{(-t)^3}{3} - \dots \\ &= -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \dots\end{aligned}$$

kết quả:

$$e^{\log(1+t)} = 1+t$$

và

$$\log(1+(e^t-1)) = t$$

có thể coi kết quả thu được là hợp của một chuỗi này vào một chuỗi khác Ta cũng có thể tính chuỗi nghịch đảo với số hạng 1 bằng cách này.

Đầu tiên ta thấy $1-t$ là nghịch đảo của $1+t+t^2+t^3+\dots$

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\dots$$

Ta có thể biết điều này bằng cách tính tích $(1-t)(1+t+t^2+t^3+\dots)$. Cho $1+B(t)$ là chuỗi với hệ số hằng là 1. Khi đó $B(t)$ là một chuỗi không có hệ số hằng ($B(0)=0$),

Và do vậy nghịch đảo của $B(t)$ có thể tính theo:

$$\frac{1}{1+B(t)} = \frac{1}{1-(-B(t))} = 1+(-B(t))+(-B(t))^2+\dots$$

Ví dụ: ta tính các số bernoulli đầu tiên sử dụng hàm sinh số Bernoulli (sẽ được trình bày dưới đây.)

Mệnh đề 1.1.3 Cho một chuỗi lũy thừa hình thức $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$ khi đó tồn tại một chuỗi $B(t)$ sao cho

$$B(0)=0, A(B(t))=t$$

nếu và chỉ nếu $a_0 = 0$ và a_1 khả nghịch. Trong trường hợp này $B(t)$ là duy nhất và ta có $B(A(t)) = t$. Nói cách khác $A(t)$ và $B(t)$ là nghịch đảo của nhau với mỗi

thành phần.

Chứng minh: Nếu tồn tại $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$ và thỏa mãn $A(B(t)) = t$ bằng cách so sánh số hạng tự do và số hạng bậc 1, ta có $a_0 = 0$ và $a_1 b_1 = 1$ điều này cho thấy điều kiện được thỏa mãn.

Ngược lại, giả sử $A(t)$ thỏa mãn $a_0 = 0$ và a_1 khả nghịch. Ta sẽ chứng minh các hệ số của $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$ thỏa mãn $A(B(t)) = t$. Đầu tiên ta thấy hệ số của t là $a_1 b_1 = 1$. vì a_1 là khả nghịch, ta đặt $b_1 = a_1^{-1}$. Cho $n \geq 2$, thì hệ số của t^n trong $A(B(t))$ bằng hệ số của t^n trong

$$a_1(B(t)) + a_2(B(t))^2 + a_3(B(t))^3 + \dots + a_n(B(t))^n$$

vì không có số hạng t^n và sau đó là $B(t) = 0$. Điều này có thể viết là:

$a_1 b_n +$ (đa thức trong $a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$) nếu $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$ đã xác định khi đó ta có b_n duy nhất từ công thức trên là bằng 0 và a_1 là khả nghịch. Điều này chứng tỏ rằng chắc chắn tồn tại duy nhất $B(t)$. vfa $B(t)$ thu được thỏa mãn $B(0)=0$, và b_1 là khả nghịch. Dop vậy ta thấy rằng có một $C(t)$ ($C(0)=0$) sao cho

$$B(C(t)) = t$$

và ta thay $C(t)$ cho t trong biểu thức $t = A(B(t))$, và ta có $B(C(t)) = t$ ta được

$$C(t) = A(B(C(t))) = A(t)$$

do vậy ta có

$$B(A(t)) = t$$

Công thức ta đề cập đến trước đó

$$e^{\log(1+t)} - 1 = t$$

và

$$\log(1 + (e^t - 1))$$

có thể giải thích là $\log(1 + t)$ và $e^t - 1$ là nghịch đảo của nhau

Đạo hàm của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, được viết là: $\frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)$ được định nghĩa là đạo hàm của từng số hạng khác nhau:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots$$

ví dụ: $(e^t)' = e^t$, và $(\log(1 + t))' = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \frac{1}{1+t}$

Định nghĩa này cũng thỏa mãn quy tắc thông thường của đạo hàm của tổng và tích.

Ta sẽ chứng minh quy tắc nhân: $(f(t).g(t))' = f'(t)g(t) + f(t).g'(t)$.

Cho $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ và $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. khi đó

$$\begin{aligned} (f(t).g(t))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) t^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) t^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n i a_i b_{n-i} + \sum_{i=0}^n (n-i) a_i b_{n-i} \right) t^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n i a_i b_{n-i} \right) t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n (n-i) a_i b_{n-i} \right) t^{n-1} \\ &= f'(t)g(t) + f(t).g'(t) \end{aligned}$$

Do vậy, khi $R \supset \mathbb{Q}$ tích phân $\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$ được định nghĩa thông qua tích phân từng số hạng.

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} = a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + \dots$$

Định nghĩa 1.1.4 Chuỗi lũy thừa hình thức Laurent¹ với hệ số trong R ,

$$\sum_{i=-N}^{\infty} a_i t^i \quad (\text{Với } N \text{ là số nguyên bất kỳ})$$

Được định nghĩa là $R((t))$.

Tổng và tích trong $R((t))$ cũng được định nghĩa giống như $R[[t]]$ và $R((t))$ là một miền nguyên giao hoán chứa $R[[t]]$ như là một miền con. Do vậy, $\sum_{i=-N}^{\infty} a_i t^i$ khả nghịch trong $R((t))$ khi và chỉ khi số hạng khác không đầu tiên a_{-N} khả nghịch. Việc chứng minh là tương tự.

1.2 Hàm sinh số Bernoulli

Ta đã xác định các số Bernoulli bởi một công thức truy hồi. Tuy nhiên, tìm số Bernoulli bằng cách sử dụng hàm sinh cũng là một cách thông dụng. Và dưới đây ta sẽ chứng minh một định lý với số Bernoulli có liên quan đến hàm sinh.

Định lý 1.2.1 Cho B_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) là các số Bernoulli. Ta có công thức sau trong $\mathbb{Q}((t))$:

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

Chứng minh: Ta chỉ ra rằng $(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!})(e^t - 1) = te^t$. từ định nghĩa phép nhân trong chuỗi lũy thừa hình thức ta có:

¹ Pierre Alphonse Laurent (sinh ngày 18 tháng bảy năm 1813 tại Paris, Pháp - qua đời vào ngày 02 tháng 9 1854 tại Paris, Pháp)

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right) (e^t - 1) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{B_i}{i!} \frac{1}{(n-i)!}\right) t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i\right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

1 Từ công thức truy hồi (??) ta có $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i = n \forall n \geq 1$. Do vậy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i\right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} = t e^t$$

Điều phải chứng minh.

Nhận xét: Ngược lại, Nếu ta định nghĩa B_n bởi công thức trong định lý trên thì ta có:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right) (e^t - 1) = t e^t$$

Khai triển về trái và so sánh với về phải chúng ta có công thức (??). Điều này chứng tỏ là định nghĩa (??) và định nghĩa sử dụng hàm sinh trong định lý trên là đồng nhất.

Bây giờ ta tính một vài số Bernoulli:

Viết chuỗi trên dưới dạng

$$x = (e^x - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

$$x = \left(x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots\right) \cdot \left(B_0 + B_1x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_3}{3!}x^3 + \dots\right)$$

$$x = B_0x + \left(B_1 + \frac{B_0}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{B_0}{3!} + \frac{B_2}{2!} + \frac{B_1}{2!}\right)x^3 + \left(\frac{B_0}{4!} + \frac{B_1}{3!} + \frac{B_2}{2!2!} + \frac{B_3}{3!}\right)x^4 + \dots$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, \dots$$

Sử dụng hàm sinh ta dễ chứng minh được mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.2.2 Nếu n là một số nguyên lẻ lớn hơn hoặc bằng 3 thì $B_n = 0$

Chứng minh: Ta chỉ cần chỉ ra là chuỗi lũy thừa hình thức $\frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2}$ không có số hạng bậc lẻ. Từ đó ta có

$$\frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \frac{t(e^t-1+1)}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}$$

và:

$$\frac{(-t)e^{-t}}{e^{-t}-1} - \frac{(-t)}{2} = \frac{-t}{1-e^t} + \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}$$

Như vậy $\frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2}$ không thay đổi khi ta thay t bởi $-t$. Hay hệ số của số hạng có bậc lẻ là bằng 0.

Mệnh đề 1.2.3

$$(2n+1)B_{2n} = - \sum_{m=1}^{n-1} \binom{2n}{2m} B_{2m} B_{2(n-m)} \quad (n \geq 2)$$

Chứng minh: Theo mệnh đề trên, nếu ta trừ số hạng bậc 1 từ công thức hàm sinh số Bernoulli, ta sẽ được hàm sinh số Bernoulli của các số hạng chẵn B_{2n} .

$$\frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Đặt về trái là $f(t)$. Lấy đạo hàm của $f(t)$ ta có:

$$f(t) - t f'(t) = f(t)^2 - \frac{t^2}{4}$$

Thay thế $\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ vào $f(t)$ ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-2n) B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \binom{2n}{2m} B_{2m} B_{2(n-m)} \right) \frac{t^{2n}}{(2n)!} - \frac{t^2}{4}$$

So sánh hệ số của hai vế ta được:

$$(1 - 2n)B_{2n} = \sum_{m=0}^n \binom{2n}{2m} B_{2m} B_{2(n-m)}$$

Với $n \geq 2$. Từ đó số hạng với $m = 0$ và $m = n$ sinh ra số $2B_{2n}$, chuyển vế, nhân với -1 , ta có công thức trong mệnh đề.

Hệ quả 1.2.4 Với mọi $n \geq 1$, ta có $(-1)^{n-1} B_{2n} > 0$

Chứng minh: Với $n = 1$, $B_1 = \frac{1}{6} > 0$. Giả sử mệnh đề đúng với mọi số nguyên nhỏ hơn n . Nhân $(-1)^{n-1}$ vào công thức trong mệnh đề trên ta được:

$$(1 - 2n)(-1)^{n-1} B_{2n} = \sum_{m=0}^n \binom{2n}{2m} (-1)^{m-1} B_{2m} (-1)^{n-m-1} B_{2(n-m)}$$

theo giả thiết vế phải dương, do vậy $(-1)^{n-1} B_{2n} > 0$, điều phải chứng minh.

Mệnh đề 1.2.5 Khai triển Taylor của $\tan x$ và Khai triển Laurent của $\cot x$ trong lân cận $x = 0$ là:

$$\begin{aligned} \tan x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2^{2n} - 1) 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \\ \cot x &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Với điều kiện của vế phải lần lượt là: $|x| < \frac{\pi}{2}$ và $0 < |x| < \pi$

Chứng minh: Ta có:

$$\begin{aligned} \coth t &= \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \\ &= \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} \\ &= 1 + \frac{2}{e^{2t} - 1} \end{aligned}$$

Thay t bởi $\frac{x}{2}$ ta được:

$$\frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1} = \frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2}$$

Khi đó theo mệnh đề 1.2.3 suy ra:

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ta coi đây là khai triển Laurent của $\coth\left(\frac{x}{2}\right)$. Thay x bởi $2ix$ ta thu được:

$$ix \coth(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

trong đó $i = \sqrt{-1}$, chia hai vế cho x và sử dụng $i \coth(ix) = \cot x$, ta được:

$$\cot(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

suy ra:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

Và đây là khai triển Laurent của $\cot x$.

Từ hai công thức trên ta cho $\cot x$ cùng với

$$\cot(2x) = \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$$

ta có

$$\tan x = \cot x - 2 \cot(2x)$$

Điều này chỉ ra rằng khai triển Taylor của $\tan x$ có thể thu được từ khai triển Taylor của $\cot x$.

Nhận xét: Hệ số của $\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ trong khai triển Taylor của $\tan x$,

$$T_n = (-1)^{n-1} (2^{2n} - 1) 2^{2n} \frac{B_{2n}}{2n}$$

Đôi khi ta gọi số này là số tang, nó là một số nguyên dương.