

Tổng hợp các bài bất đẳng thức trong các đề thi thử
THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

VMF-DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC
www.diendantoanhoc.net

Người tổng hợp:

ĐINH XUÂN HÙNG (Dinh Xuan Hung)

PHẠM NGỌC HÙNG(phamngochung9a)

ĐỀ BÀI

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{a^2}{(a+1)(b+1)bc} + \frac{b^2}{(b+1)(c+1)ca} + \frac{c^2 - a^2b - ab - a - 1}{(c+1)(a+1)ab}$$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + 2\sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}$$

Bài 3. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác có chu vi là 1. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$T = \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xy + yz + xz = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = \frac{2x}{2+x^2} + \frac{2y}{2+y^2} + \frac{z^2}{2+z^2}$$

Bài 5. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn : $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = 2\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2}$$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$ sao cho $a + b + c \leq \frac{3}{2}$ Tìm Min

$$P = (3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b})(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{c})$$

Bài 7. Tìm $a, b, n \in \mathbb{N}$ biết $a + b = 2^{2007}$ và $ab = 2^n - 1$ với a, b lẻ, $b > a > 1$

Bài 8. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 \leq 2010$. Tìm Min

$$A = xy + y(z+1) + z(x-2)$$

Bài 9. Cho a, b, c dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{3} \left(\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \right) - \sqrt{(ab+bc+ac)^3} - 2\sqrt{3}\sqrt[3]{abc}$$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a-1} + \frac{b}{2b-1} + \frac{c}{2c-1} \geq \frac{18}{3+ab+bc+ac}$$

Bài 11. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn : $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = |x+y-z| + |y+z-x| + |z+x-y|$$

Bài 12. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $\left(\frac{a+b+c}{2016}\right)^2 \leq 4abc$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{b}}{b + \sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{c}}{c + \sqrt{ab}}$$

Bài 13. Cho ba số thực x, y, z thuộc đoạn $(0; 4)$ và thoả mãn $x + y + z = 6\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{16-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{16-z^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Bài 14. Cho $x, y, z > 0; 7(x^2 + y^2 + z^2) = 11(xy + yz + zx)$. Tìm Max, Min

$$P = \frac{(x+y+z)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Bài 15. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm Min

$$P = (a+b+c)\left(\sum \frac{1}{a^2b^2+1}\right)$$

Bài 16. Cho $a, b \in (0, 1); (a^3 + b^3)(a+b) = ab(1-a)(1-b)$ Tìm giá trị lớn nhất của :

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + 3ab - a^2 - b^2$$

Bài 17. Cho $x, y, z \geq 0; x + y + z = 3$; Tìm max

$$P = x^2y + y^2z + z^2x$$

Bài 18. Tìm giá trị lớn và nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{7\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{5+x-4x^2} - \sqrt{1+x} - 4x + 5}{\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{1+x} + 6}$$

Bài 19. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{abc} + \frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3}$$

Bài 20. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c + abc = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + abc}{(a+b+c)^2 - 1}$$

Bài 21. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a^2 + ab + b^2 = c(a+b+c)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(a+c)^2}{2a^2 + 2ac + c^2} + \frac{(b+c)^2}{2b^2 + 2bc + c^2} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{ab}{a^2 + 4ab + b^2}$$

Bài 22. Với các số thực không âm x, y, z thoả mãn $x + y + z = 3$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - zx + x^2)$$

Bài 23. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c \leq 3abc$. Tìm Giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{(a^2 + c^2 + 2)\sqrt{b^2 + c^2}} - \frac{(a^4 + b^4)(ab + c^2)^3}{a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2)} - \frac{c^3(a^3 + b^3)}{\sqrt[3]{\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3}}}$$

Bài 24. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN của

$$P = \frac{16}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z}$$

Bài 25. Cho $x, y, z \in [1; 3]$ thỏa mãn $y + z - 4x = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2 + z^2 - 4x^2}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 7x^4}}$$

Bài 26. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $ab + bc + ac = 1$. Tìm Min biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a}{16(b+c)(a^2+bc)}} + \sqrt{\frac{b}{16(a+c)(b^2+ac)}} + \frac{a^2+1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{c}{ab} \right)$$

Bài 27. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (a + b + c) \left(\frac{3a - b}{a^2 + ab} + \frac{3b - c}{b^2 + bc} + \frac{3c - a}{c^2 + ca} \right)$$

Bài 28. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh rằng:

$$3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \geq (x + 2)(y + 2)(z + 2)$$

Bài 29. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = x^2(5 - 6x) + 4y^2(5 - 12y) + z^2(45 - 162z)$$

Bài 30. Cho các số thực x, y, z thỏa $x > 2, y > 1, z > 0$ Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(2x + y - 3)}} - \frac{1}{y(x - 1)(z + 1)}$$

Bài 31. Cho a, b, c dương thỏa $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Tìm GTNN :

$$P = (a + 1)(b + 1)(c + 1) + \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}}$$

Bài 32. Cho x, y, z thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{3x^2 + 3y^2}{8} + \frac{2z}{x + y} - \frac{z^2 + z}{(x + 1)(y + 1)} - \sqrt{3}z$$

Bài 33. Cho x, y, z thực dương: $x + y + 1 = z$ Tìm GTNN của:

$$P = \sum \frac{x^3}{x + yz} + \frac{14}{(z + 1)\sqrt{(x + 1)(y + 1)}}$$

Bài 34. Cho $0 \leq a, b \leq 1$ Tìm

$$\max P = \frac{a}{\sqrt{2b^2 + 5}} + \frac{b}{\sqrt{2a^2 + 5}}$$

Bài 35. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ Tìm giá trị lớn nhất của:

$$A = \frac{ab}{3 + c^2} + \frac{bc}{3 + a^2} - \frac{a^3b^3 + b^3c^3}{24a^3c^3}$$

Bài 36. Cho a, b, c dương thỏa:

$$\frac{4a}{b}\left(1 + \frac{2c}{b}\right) + \frac{b}{a}\left(1 + \frac{c}{a}\right) = 6$$

Tìm GTNN:

$$P = \frac{bc}{a(b + 2c)} + \frac{2ca}{b(c + a)} + \frac{2ab}{c(2a + b)}$$

Bài 37. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x + y + z}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{(x - y)(y - z)(z - x)}{xyz}$$

Bài 38. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 8xyz - \frac{3x^3}{y^2 + z^2}$$

Bài 39. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $(3a + 2b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right) = 30$. Tìm GTLN :

$$P = \frac{b + 2c - 7\sqrt{72a^2 + c^2}}{a}$$

Bài 40. Cho các số dương x, y . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} - \frac{2}{3(x + y)^3}$$

Bài 41. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xy + xz + 1 = x$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = (xy + xz + 2)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

Bài 42. Cho $a, b, c \in [1; +\infty)$ thỏa mãn $3(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a + b)^2 + a} + \frac{a}{a + c^2}$$

Bài 43. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{(a + c)(a + 4b + c)(a + b + c)^3}{abc[5(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca]}$$

Bài 44. Cho a, b, c dương thỏa $a + b + c = 1$. Tìm GTNN :

$$P = \frac{a^2}{(1 - a)^2 + 5bc} + \frac{16b^2 - 27(a + bc)^2}{36(a + c)^2}$$

Bài 45. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + y + z}} + \frac{y^3 + 1}{\sqrt{y^4 + z + x}} + \frac{z^3 + 1}{\sqrt{z^4 + x + y}} - \frac{8(xy + yz + zx)}{xy + yz + zx + 1}$$

Bài 46. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$ Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{3}{2}(xyz)^2 + x^3 + y^3 + z^3 - xy - yz - zx + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Bài 47. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{ab^2}{(b^2+ac)(c+a)} + \frac{16c^4}{(c+a)^4}$$

Bài 48. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $abc(a+b+c) = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} - \frac{8bc}{bc(b^2+c^2)+8}$$

Bài 49. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + 1 = z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z^2+2}{z+xy}$$

Bài 50. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 = y^2 + z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(1+2xy)z}{(x^2+y^2)(1+z^2)} + \frac{3z^2}{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}$$

Bài 51. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{xz}{y^2+yx} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{2(x+3z)}{x+2z}$$

Bài 52. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{y^2+yz} + \frac{y}{z+x} + \frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$$

Bài 53. Cho x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = xy + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3}{y^3+1} + \frac{y^3}{x^3+1} + \frac{24\sqrt{xy}}{x+y+2}$$

Bài 54. Cho $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$ và $y \geq 1$ Tìm giá trị nhỏ nhất:

$$P = x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{[(4x-1)y-x]^2}$$

Bài 55. Với $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 + 2 = a^2b^2c^2$ Chứng minh rằng:

$$abc(a+b+c) \geq 2(ab+bc+ca)$$

Bài 56. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $x(y^2 + z^2) = yz(y + z)$. Tìm GTNN của:

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \left(\frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \right)^2 + \frac{2yz(1-x)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

Bài 57. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$$

Bài 58. Giả sử x, y là các số thực không âm thỏa mãn: $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Chứng minh rằng:

$$x^3 + y^3 \leq 2$$

Bài 59. Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = ab + bc + ca + (a + b + 3c) \sqrt{1 - a^2 - b^2 - c^2}$$

Bài 60. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - \frac{1}{10} \left(\frac{a^2 + c^2}{ac} \right)^3$$

Bài 61. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{8}{(a+b)^2} + \frac{3}{(b+c)^2} + \frac{3}{(c+a)^2}$$

Bài 62. Cho $x, y, z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN:

$$P = \sqrt{\frac{3}{(x+y)^2} + z^2} + \sqrt{\frac{3}{(y+z)^2} + x^2} + \sqrt{\frac{3}{(x+z)^2} + y^2}$$

Bài 63. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) + \sqrt{\frac{2016}{a+b+c}}$$

Bài 64. Cho a, b, c thuộc $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = abc + (1-a)(1-b)(2-c) + \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{b+a+1}$$

Bài 65. Cho các số a, b thuộc $[\frac{1}{2}; 1]$. Tìm Min của:

$$P = a^5b + ab^5 + \frac{6}{a^2 + b^2} - 3(a+b)$$

Bài 66. Cho x, y, z thuộc $[1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$E = \frac{2(xy + yz + zx)}{xyz + 2(2x + y + z)} + \frac{8}{2x(y+z) + yz + 4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

Bài 67. Cho x, y, z thuộc $[1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$F = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Bài 68. Cho a, b, c, d thuộc $[1; 2]$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right) \leq 25$$

Bài 69. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c \leq 2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} + \frac{b\sqrt{b}}{b + \sqrt{bc} + c} + \frac{c\sqrt{c}}{c + \sqrt{ca} + a} + \frac{1}{27\sqrt{abc}}$$

Bài 70. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = ab + bc + ca$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2}$$

Bài 71. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + ab} + \frac{1}{b^2 + bc} + \frac{1}{c^2 + ca}$$

Bài 72. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Tìm Max của biểu thức:

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc + 4abc(3 - ab - bc - ca)$$

Bài 73. Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{x^3}{x^2 + 2yz} \geq 1$$

Bài 74. Cho $0 \leq c \leq b \leq a \leq 1$. Tìm min của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{(a-c)^2}{3}$$

Bài 75. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \sum \frac{a^2}{b+c}$$

Bài 76. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác với $a + b + c = 3$. Tìm Min của:

$$P = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc$$

Bài 77. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh:

$$\sum \frac{2}{a^2(b+c)} \geq 3$$

Bài 78. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$\sum \frac{x}{1-x^2}$$

Bài 79. Cho $x, y, z \geq 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$\sum \left(\frac{x^2}{1+x^3} \right) + \sqrt{\frac{8+x^2y^2z^2}{3}}$$

Bài 80. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{3x(x^2 + y^2 + z^2)}{(x + y + z)^2} + \frac{8(y^2 + z^2)}{2y^2 + 2z^2 + xy + xz}$$

Bài 81. Cho $x, y, z > 0$ và $xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2$. Tìm max của

$$P = \frac{z^4}{1 + z^4(x^4 + y^4)}$$

Bài 82. Cho ba số thực a, b, c thay đổi thuộc $[1; 2]$ và thỏa mãn: $a + b + c \leq 4$. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum \frac{a^2}{bc + 2} > \frac{2}{3}$$

Bài 83. Với các số thực $0 \leq a, b, c \leq 2$ thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Tìm Min của

$$P = \sum \sqrt{a + 1}$$

Bài 84. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac \leq 3$. Tìm GTNN của:

$$\frac{12}{4ab + (a + b)(c + 3)} + \frac{\sqrt{2(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}}{(a + 1)(b + 1)} + \frac{1}{2c^2}$$

Bài 85. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $a^2b^2 + b^2c^2 + 1 \leq 3b$ Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{1}{(a + 1)^2} + \frac{4b^2}{(2b + 1)^2} + \frac{8}{(3 + c)^2}$$

Bài 86. Cho x, y, z là những số thực thuộc khoảng $(1; 4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = 2 \cdot \frac{(y + z - x)^2}{yz} + \sqrt{3} \cdot \frac{(z + x - y)^2}{zx} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{(x + y - z)^2}{xy}$$

Bài 87. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 4\left(\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + a}\right) + 2a^3 - a + b^4 + b^2 - b + c^3 + c^2$$

Bài 88. Cho $a, b, c > 0$. CMR:

$$\frac{a + 1}{b + 1} + \frac{b + 1}{c + 1} + \frac{c + 1}{a + 1} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Bài 89. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x, y \in [1; 3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x^3 + x(y - 2x) + 3} + \frac{y + 1}{(x + 2y + 2)(y + 1) - 6y + 2} + \frac{4\sqrt{5(x + y + 1)}}{25}$$

Bài 90. Cho x, y là các số không âm thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x + z)\sqrt{\frac{z}{x^2 + y^2}} + \frac{3x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8}{16z} + \frac{z}{2} - \frac{y}{4} - \frac{1}{8}$$

Bài 91. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $4z^2 + 41 = 9xy(2z + 3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 9zx}} + \frac{1}{2\sqrt{10}}(z^2 + 5)$$

Bài 92. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn: $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

Bài 93. Xét số thực x . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{3(2x^2 + 2x + 1)}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 - \sqrt{3})x + 3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3}}$$

Bài 94. Với các số thực dương a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = ab + 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \sqrt{7 - 3ab} + \frac{a - 2}{a^2 + 1} + \frac{b - 2}{b^2 + 1}$$

Bài 95. Cho x, y, z thuộc $[0; 2]$ thỏa: $x + y + z = 3$ Tìm min:

$$P = \sum \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} + \sum \sqrt{xy}$$

Bài 96. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.CMR

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{4}{(1+a+b+c)^2} \geq 1$$

Bài 97. Cho ba số thực a, b, c sao cho $c = \min \{a; b; c\} \geq 1$. hãy tìm GTNN của biểu thức

$$S = \frac{9}{(2a+b)^2} + \frac{36}{4(2b+a)^2 + 45(c-1)^2} + \sqrt{a+b+c-1}$$

Bài 98. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = x + y + z$ và $z > 0$. Hãy tìm GTLN của biểu thức

$$M = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{6z}{\sqrt{(z^2 + 1)^3}}$$

Bài 99. Cho $a, b, c > 0$ và $a + 4b + 9c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{1296}$$

Bài 100. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTLN của:

$$P = 9xy + 10yz + 11zx$$

Bài 101. cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = xy + 2z$. Tìm GTNN:

$$P = \left(\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{x^2 + z^2} \right)^2 + \frac{8z^3}{(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)}$$

Bài 102. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.CMR

$$\frac{a^4 + b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b^4 + a^2c^2}{b^2\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{c^4 + a^2b^2}{c^2\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \sqrt{2}$$

Bài 103. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum a^2 + 9 \sum ab \geq 10 \sum a$$

Bài 104. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$$

Bài 105. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $9ab + 17bc + 14ac + 12c - 18 > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{8(7 + ab)\sqrt{5}}{3\sqrt{9ab + 17bc + 14ac + 12c - 18}} + \frac{36}{\sqrt{a + b + c + 3}}$$

Bài 106. Cho a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $0 < \frac{ab + bc + ca - abc}{ab + bc + ca - 1} \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \left[\left(\frac{a + b + c - abc}{ab + bc + ca - 1} \right)^2 + 2 \right]$$

Bài 107. Cho các số thực dương x, y, z . Tìm GTNN của biểu thức

$$\frac{9}{7x + y + 4\sqrt{xy} + 18\sqrt[3]{xyz}} + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 + 2$$

Bài 108. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$P = \sum \frac{x(y + z)}{4 - yz} \geq 2xyz$$

Bài 109. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 2$$

Bài 110. Cho các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

Bài 111. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a}{b + 2c} + \frac{b}{a + 2c} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bài 112. Cho x, y dương thỏa mãn: $x^4 + y^4 + \frac{4}{xy} = 9xy - 3$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(x^3 + y^3)(x^2 + y^2)} - \frac{1}{1 + 2xy}$$

Bài 113. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(b + c)^2 + 5bc} + \frac{b^2}{(c + a)^2 + 5ac} - \frac{3}{4}(a + b)^2$$

Bài 114. Cho các số không âm a, b và số dương c thỏa mãn $a^3 + b^3 = c(c - 1)$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}$$

Bài 115. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a > 0, b + c > 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$.CMR

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{a^2} \geq \sqrt{2}$$

Bài 116. Giả sử x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x > y$ và $xy + (x + y)z + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{4(x - y)^2} + \frac{1}{(x + z)^2} + \frac{1}{(y + z)^2}$$

Bài 117. cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $c(a^2 + b^2) = a + b$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(a + 1)^2} + \frac{1}{(1 + b)^2} + \frac{1}{(1 + c)^2} + \frac{4}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)}$$

Bài 118. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $5^{-x} + 5^{-y} + 5^{-z} = 1$.CMR

$$\frac{25^x}{5^x + 5^{y+z}} + \frac{25^y}{5^y + 5^{x+z}} + \frac{25^z}{5^z + 5^{x+y}} \geq \frac{5^x + 5^y + 5^z}{4}$$

Bài 119. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 2016$. Tìm GTNN của biểu thức

$$\sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} + \sqrt{3x^2 + xy + 5y^2} + \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + xy + y^2}$$

Bài 120. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = x^4 + y^4 + \frac{2}{(x + y)^2}$$

Bài 121. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 1, z > 0$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(2x + y - 3)}} - \frac{1}{y(x - 1)(z + 1)}$$

Bài 122. Cho các số thực a, b dương thỏa mãn $ab \geq 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$T = \frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} - \frac{32}{\sqrt{2a(1 + a) + 2b(1 + b) + 8}}$$

Bài 123. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, với $x = \max\{x, y, z\}$ và $y^2 + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{6x^2}{x^2 + z} + \frac{6y^2}{y^2 + z} + \frac{z}{2x + y^3}$$

Bài 124. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm GTNN của:

$$P = \sum \frac{1}{(a + b)^2} + \frac{30(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2}$$

Bài 125. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. CMR

$$\frac{36}{a^2b + b^2c + c^2a} + \frac{1}{abc} \geq 343$$

Bài 126. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $(xy + x + y)(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}) + \frac{1}{xy} = 7$. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{y} + \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{x} - (x + y + 1)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$$

Bài 127. Cho $x \geq y \geq z \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{xy + yz + zx}{4} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(y+1)^2} + \frac{3}{(z+1)^2}$$

Bài 128. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = 3$. Tìm Min:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2y + y^2z + z^2x}$$

Bài 129. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz + 4 \geq 2(x + y + z)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 4x + 4} + \sqrt{2y^2 - 4y + 4} + \sqrt{2z^2 - 4z + 4}}{2(x + y + z)^2} + \frac{9}{xyz + 4}$$

Bài 130. Cho a, b, c là các số thực thuộc $[2; 4]$ và $ab + bc + ac = 26$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 100}{a + b + c} - \frac{abc}{4}$$

Bài 131. Cho a, b, c dương thỏa mãn $8c^2 + 4ab = (a + b + 2c)^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{c}{4(a+b)} + \frac{2c}{a+b+c} - \frac{10(a+b)^2}{3(a+b)^2 + 5c^2}$$

Bài 132. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTLN:

$$P = 7(xy + yz + zx) - 9xyz$$

Bài 133. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$. Tìm GTNN:

$$P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

Bài 134. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 5(a + b + c) - 2ab$. Tìm GTNN:

$$Q = a + b + c + 48 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+c}} \right)$$

Bài 135. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 6z^2 = 4z(x + y)$. Tìm GTNN:

$$P = \frac{x^3}{y(x+z)^2} + \frac{y^3}{x(y+z)^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Bài 136. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $ab \geq \frac{7}{3}$ và $3a + 57b + 7c = 3abc + \frac{100}{a}$. Tìm GTNN:

$$P = a + b + c$$

Bài 137. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{25}{27} \leq (1-4ab)^2 + (1-4bc)^2 + (1-4ac)^2 \leq 3$$

Bài 138. Cho $x, y, z \in [0;1]$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}$$

Bài 139. Cho x, y, z là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

Bài 140. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} + \frac{1}{a^2-ab+b^2} + \frac{1}{b^2-bc+c^2} + \frac{1}{c^2-ca+a^2} \geq 9$$

Bài 141. Cho $0 \leq a \leq b \leq 1 \leq c$ và $2b^2 + c^2 + 4(2a+b+c) = 18$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = ab^2 + bc^2 + ca^2 - \frac{13}{2a-5b+6(\sqrt{b} + \sqrt[3]{4bc})}$$

Bài 142. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)}$$

Bài 143. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất:

$$P = x(y-z)^3 + y(z-x)^3 + z(x-y)^3$$

Bài 144. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = 4xy + 4yz + 10xz + \frac{1}{(x+z)(x+y+z)+1}$$

Bài 145. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz + x + y = z$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{y^2 + 1} - \frac{2}{z^2 + 1}$$

Bài 146. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a^3} + \frac{2}{b^3} + \frac{2}{c^3} + \frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \geq 9$$

Bài 147. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $c = \min\{a, b, c\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a - b)^2 \left[\frac{(2a + c)^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{(2b + c)^2}{(a^2 + c^2)^2} - \frac{64}{ab + bc + ac} \right]$$

Bài 148. Cho các số thực dương thay đổi a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 \geq (a + b + c)\sqrt{a + b + c}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a(a - 2b + 2) + b(b - 2c + 2) + c(c - 2a + 2) + \frac{1}{abc}$$

Bài 149. Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x + 2z} + \frac{y}{y + 2z} + \frac{2(z^2 - xy)}{(x + y + z)^2}$$

Bài 150. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a \geq 7 \max\{b, c\}$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a(b - c)^5 + b(c - a)^5 + c(a - b)^5$$

Bài 151. Cho các số thực x, y, z không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (xy + yz + xz) \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} \right)$$

Bài 152. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + z^2 \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2 + y^2}{z^2 + xy} + \frac{y^2 + z^2}{x^2 + yz} - \frac{40}{3} \sqrt{\frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}} + 4$$

Bài 153. Cho các số thực không âm a, b, c và $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{a^2 + a + 3} + \sqrt{b^2 + b + 3} + \sqrt{c^2 + c + 3}$$

Bài 154 (bài 24)

Bài 155. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn : $x^2 + 8y^2 + 8z^2 = 20$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{2x^2}{x^2(4-yz)+8} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{x^2 + (y+z)^2}{100}$$

Bài 156. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+z^2} = 5$.
Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = x^3 + y^3 + 2z^3$$

Bài 157. Cho x, y, z thỏa mãn $0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = (x^2 - y^2)(y - z) + z^2(1 - z)$$

Bài 158. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn : $xy + x + y = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} + \frac{xy}{x+y} - (x^2 + y^2)$$

Bài 159. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn : $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + \frac{2\sqrt{y}}{1+y} + \frac{z-1}{1+z}$$

Bài 160. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x > y$ và $xy + (x+y)z + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{1}{4(x-y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2}$$

Bài 161. Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ và $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2} + \frac{1}{a+c} \sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]} + \frac{1}{a+b} \sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}$$

Bài 162. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x > y > z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y}{x-y} + \frac{z}{y-z} + \frac{x^2}{8z(\sqrt{xz} - z)}$$

Bài 163. Cho các số thực dương x, y, z với $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x+y+z)^2 + \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} - \frac{1}{xy + yz + xz}$$

Bài 164. Cho hai số thực $x > 1, y > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}$$

Bài 165. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + \sqrt{2(5y^2 - 2yz + z^2)}} + \frac{2y + 3\sqrt[3]{xy^2}}{x + 2y + z} - \frac{(x + 2y)^4 + 81}{72z^2}$$

Bài 165. Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2 + y^2) - z^2}$$

Bài 166. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của:

$$P = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$$

Bài 167. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{(x+y+z-1)^2}{x^2y + y^2z + z^2x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Bài 168. Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd$$

Bài 169. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $x + y + z \leq \frac{19}{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = (1 + x^2 y^2) \sqrt{1 + z^4} - \frac{(x + y + z)^4}{12}$$

Bài 170. Cho $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 + 4abc \leq \frac{9}{4}$$

Bài 171'. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + xz + xyz = 4$. Chứng minh rằng:

$$3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \geq (x + 2)(y + 2)(z + 2)$$

Bài 171. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ac = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = a + b + c + \frac{ab}{b + c} + \frac{bc}{c + a} + \frac{ca}{a + b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 172. Cho các số thực x, y và $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = 3(x^4 + y^4 + x^2 y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Bài 173. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = 3(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) + 3(ab + bc + ac) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bài 174. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $xy + x + y = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

Bài 175. Cho $a, b \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{\sqrt{2b^2 + 5}} + \frac{b}{\sqrt{2a^2 + 5}}$$

Bài 176. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x + \frac{y^2}{x} + \frac{z^3}{y^2}$$

Bài 177. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + 3b$$

Bài 178. Cho x, y, z là ba số thực tùy ý thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sum \frac{x}{y+z+1} + (1-x)(1-y)(2-z)$$

Bài 179. Cho ba số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn : $xy=1+z(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2xy(xy+1)}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{z}{1+z^2}$$

Bài 180. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$ trong đó a, b, c là độ dài 3

cạnh tam giác thỏa mãn điều kiện $2c+b=abc$

Bài 181. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, b, c \in [0;1]$ và $ab+bc+ac=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \sum \frac{a^2(1-2b)}{b}$$

Bài 182. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2$. Tìm Min và Max của:

$$P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Bài 183. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và a, b, c đôi một khác nhau.
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{|a^2 - b^2|} + \frac{1}{|b^2 - c^2|} + \frac{1}{|c^2 - a^2|}$$

Bài 184. Cho các số $x, y, z \in [-1; 1]$ và $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{1 + x + \frac{7x^2}{9}} + \sqrt{1 + y + \frac{7y^2}{9}} + \sqrt{1 + z + \frac{7z^2}{9}}$$

Bài 185. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác thỏa mãn : $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc + 2ca = 0$
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{c^2}{(a + b - c)^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a + b}$$

To be continue...