

Bài 1: (2đ)

1. Thu gọn biểu thức : $P = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}$

2. Cho $A = 1.2.3...2015.2016 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}\right)$.

Chứng tỏ rằng A là số tự nhiên chia hết cho 2017

Bài 2: (2 đ)

1. Cho đa thức $P(x) = 2x^2 + bx + c$. Tìm các hệ số b, c biết rằng $P(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 tại $x=1$

2. Giải phương trình: $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$

Bài 3: (1 đ)

Cho các số x, y, z thỏa $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4xy + 5y - 10y + 2z - 5$ Chứng minh rằng $1 \leq x - 2y \leq 4$

Bài 4: (4 đ) Cho đường tròn (C) tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A', B', C'. Gọi các giao điểm của đường tròn (C) với các đoạn thẳng IA, IB, IC lần lượt tại M, N, P.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng A'M, B'N, C'P đồng quy.

b) Tia AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D (D khác A). Chứng minh rằng: $\frac{IB \cdot IC}{ID} = 2r$, trong

đó r là bán kính của đường tròn (C).

Bài 5: (1,0 đ) Cho hai số dương x và y thỏa mãn đẳng thức: $\frac{2017}{x} + \frac{2018}{y} = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = x + y$$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1:** (2đ)

1. Thu gọn biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} \sqrt{\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}{18-12}} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \sqrt{\frac{30-12\sqrt{6}}{6}} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$= -(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})|\sqrt{3}-\sqrt{2}| = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = -(3-2) = -1$$

2. Đặt $B = 1.2.3...2015.2016$.

$$A = B \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}\right)$$

$$= B \cdot \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2016}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2015}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2014}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1008} + \frac{1}{1009}\right) + \frac{1}{1008}\right]$$

$$= B \cdot \left(\frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2 \cdot 2015} + \frac{2017}{3 \cdot 2014} + \dots + \frac{2017}{1008 \cdot 1009}\right)$$

$$= 2017 \cdot \left(\frac{B}{2016} + \frac{B}{2 \cdot 2015} + \dots + \frac{B}{1008 \cdot 1009}\right)$$

$$\text{Mà } B = 1.2.3...2015.2016. \Rightarrow \frac{B}{2016} \in \mathbb{N}; \frac{B}{2 \cdot 2015} \in \mathbb{N}; \dots; \frac{B}{1008 \cdot 1009} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{2016} + \frac{B}{2 \cdot 2015} + \dots + \frac{B}{1008 \cdot 1009} = k \in N \Rightarrow A = 2017 \cdot k \in N; A: 2017$$

Vậy A là số tự nhiên chia hết cho 2017

Bài 2: (2 đ)

1. Cho đa thức $P(x) = 2x^2 + bx + c$. Tìm các hệ số b, c biết rằng $P(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 tại $x=1$
Ta có:

$$P(x) = 2x^2 + bx + c = (\sqrt{2}x)^2 + 2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \frac{b}{2\sqrt{2}} + \frac{b^2}{8} + c - \frac{b^2}{8} = \left(\sqrt{2}x + \frac{b}{2\sqrt{2}} \right)^2 + c - \frac{b^2}{8} \geq c - \frac{b^2}{8}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{2}x + \frac{b}{2\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = -\frac{b}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{4}$$

$$\text{Do đó } P(x) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 tại } x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \frac{b^2}{8} = 2 \\ x = -\frac{b}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 + \frac{b^2}{8} = 4 \\ b = -4 \end{cases} \quad \text{Vậy } b = -4; c = 4$$

2. Giải phương trình: $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$ ĐK: $-2 \leq x \leq 2$

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{(2-x)(2+x)} = 2$$

Đặt: $\sqrt{2-x} = a \geq 0; \sqrt{2+x} = b \geq 0$ và đặt $S = a+b; P = a \cdot b$ (ĐK: $S^2 \geq 4P$) ta được hệ pt:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b+ab=2 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ab=2-(a+b) \\ (a+b)^2-2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=2-(a+b) \\ (a+b)^2+2(a+b)-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=2-(a+b) \\ a+b=-4 \\ a+b=2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a+b=2 \quad (TM) \\ ab=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-4 \quad (KTM) \\ ab=6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ a=2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{2-x}=0 \\ \sqrt{2+x}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2-x}=2 \\ \sqrt{2+x}=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2-x=0 \\ 2+x=4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x=4 \\ 2+x=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(TMĐK) \\ x=-2(KTMĐK) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm $x=2$

Bài 3: (1 đ) Cho các số x, y, z thỏa $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4xy + 5x - 10y + 2z - 5$ Chứng minh rằng $1 \leq x - 2y \leq 4$

***Đề sai: 5x chứ không phải 5y:**

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4xy + 5x - 10y + 2z - 5 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 5x + 10y - 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + (2y)^2 + 4^2 - 4xy - 8x + 16y] + (z^2 - 2z + 1) + 3x - 6y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 2y - 4) = -[(x - 2y - 4)^2 + (z - 1)^2] \leq 0 \Leftrightarrow x - 2y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x - 2y \leq 4$$

$$\text{Vậy: } x - 2y \leq 4 \quad \text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 \\ y \in R \\ z = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4xy + 5x - 10y + 2z - 5 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 5x + 10y - 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + (2y)^2 + 1^2 - 4xy - 2x + 4y] + (z^2 - 2z + 1) - 3x + 6y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 2y - 1) = (x - 2y - 1)^2 + (z - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2y \geq 1$$

Vậy: $x - 2y \geq 1$ Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $1 \leq x - 2y \leq 4$

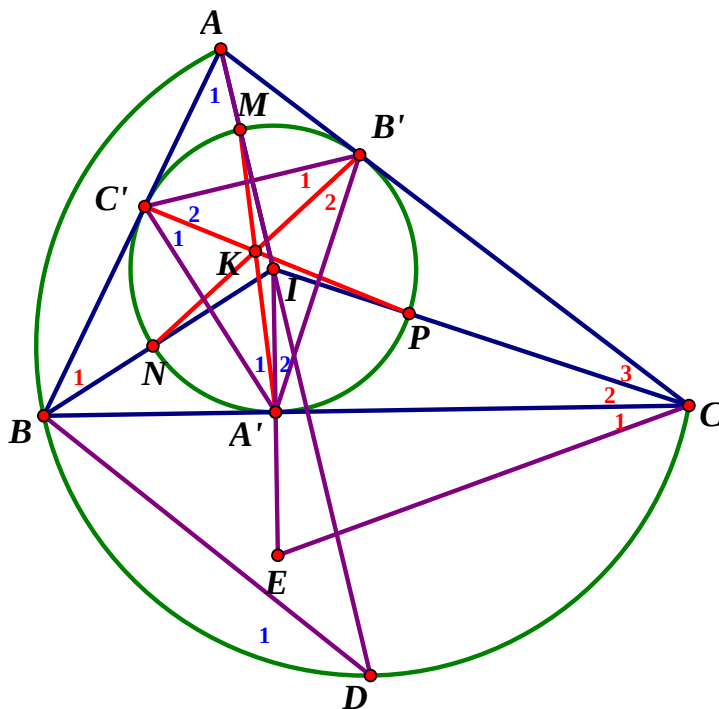
Bài 4: (4 đ) a) Chứng minh rằng ba đường thẳng $A'M$, $B'N$, $C'P$ đồng quy.

Ta có

$$A'_1 = \frac{1}{2} C'IM; A'_2 = \frac{1}{2} B'IM \quad (\text{góc nt và góc ở tâm cùng chắn 1 cung})$$

Mà $B'IM = C'IM$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow A'_1 = A'_2 \Rightarrow A'M$ là phân giác của $\Delta A'B'C'$

Chứng minh tương tự ta được $B'N$, $C'P$ cũng là phân giác của $\Delta A'B'C' \Rightarrow A'M, B'N, C'P$ đồng quy.



b) Tia AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D (D khác A). Chứng minh rằng: $\frac{IB \cdot IC}{ID} = 2r$ trong

đó r là bán kính của đường tròn (C).

Lấy E đối xứng với I qua $A' \Rightarrow E$ đối xứng với I qua trục BC $\Rightarrow IE = 2IA' = 2r$ và ΔICE cân tại E. Suy ra:

$$D_1 = \angle BCA = 2 \cdot C_2 = \angle ICE$$

$$\angle A'IC = 90^\circ - C_2 = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} = A_1 + B_1 = \angle BID$$

$$\text{Suy ra } \Delta ICE \text{ đồng dạng với } \Delta IDB \Rightarrow \frac{IC}{IE} = \frac{ID}{IB} \Rightarrow \frac{IB \cdot IC}{ID} = IE = 2r$$

Bài 5: (1,0 đ) Cho hai số dương x và y thỏa mãn đẳng thức: $\frac{2017}{x} + \frac{2018}{y} = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = x + y$$

Dễ dàng chứng minh BĐT với mọi x, y dương ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (dấu “=” khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$)

Ta có: $1 = \frac{2017}{x} + \frac{2018}{y} \geq \frac{(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2}{x+y} \Leftrightarrow x+y \geq (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2$

Dấu “=” khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2017}}{x} = \frac{\sqrt{2018}}{y} \\ \frac{2017}{x} + \frac{2018}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2018}} \cdot y \\ \frac{\sqrt{2017 \cdot 2018}}{y} + \frac{2018}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2018}} \cdot (2018 + \sqrt{2017 \cdot 2018}) \\ y = 2018 + \sqrt{2017 \cdot 2018} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2017 + \sqrt{2017 \cdot 2018} \\ y = 2018 + \sqrt{2017 \cdot 2018} \end{cases}$$

Vậy GTNN của A là $(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2$ khi $x = 2017 + \sqrt{2017 \cdot 2018}$; $y = 2018 + \sqrt{2017 \cdot 2018}$