

Tối ưu tập hợp – phần II

Trương Phước Nhân, 18/07/2017

Số Turan :

Bài toán 1: Cho X là một tập với n phần tử, và F là một họ các l -tập con của X thỏa mãn tính chất : Với mọi k -tập con của X luôn chứa ít nhất một thành viên của F , trong đó $1 \leq l \leq k \leq n$.

Số Turan $T(n, k, l)$ là số thành viên nhỏ nhất của họ F thỏa mãn tính chất nêu trên.

Chứng minh rằng :

$$a) T(n, k, l) \geq \frac{n}{n-l} T(n-1, k, l)$$

$$b) T(n, k, l) \leq T(n-1, k-1, l-1) + T(n-1, k, l)$$

$$c) \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}} \leq T(n, k, l) \leq \binom{n-k+l}{l}$$

Chứng minh:

Giả sử F là họ các l -tập con của tập X với số thành viên nhỏ nhất thỏa mãn tính chất : Với mọi k -tập con bất kì của X luôn chứa một thành viên của họ F .

a) Ta xét ma trận 0-1 $M = (m_{x,A})$ trong đó các hàng được đánh số bởi các phần tử của tập X , các cột được đánh số bởi các thành viên của họ F , và $m_{x,A} = 1$ khi và chỉ khi $x \in A$. Đặt r_x là số các số 1 được điền ở x -hàng và c_A là số các số 1 được điền ở A -cột. Thì c_A là số các phần tử của tập A nên $c_A = l$. Mặt khác r_x bằng số các thành viên của họ F có chứa x , có nghĩa là $r_x = |\{A | A \in F, x \in A\}|$.

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng nguyên lí Fubini, ta được : } \sum_x |\{A | A \in F, x \in A\}| &= \sum_x r_x = \sum_{A \in F} c_A = |F|l = T(n, k, l)l \\ &\Rightarrow \frac{\sum_x |\{A | A \in F, x \in A\}|}{|X|} = \frac{l}{n} T(n, k, l) \quad (\text{bởi vì } |X| = n) \end{aligned}$$

Theo nguyên lí trung bình, ta tìm được phần tử x sao cho $|\{A | A \in F, x \in A\}| \geq \frac{l}{n} T(n, k, l)$.

Nếu ta đặt $G := \{A | A \in F, x \in A\}$ thì

$$|G| = |F| - |\{A | A \in F, x \notin A\}| = T(n, k, l) - |\{A | A \in F, x \notin A\}| \leq \frac{n-l}{n} T(n, k, l)$$

Ta cần chứng minh rằng : $|G| \geq T(n-1, k, l)$, có nghĩa là họ G thỏa tính chất : Với mọi k -tập con bất kì của X luôn chứa một thành viên của họ G .

Thật vậy, G là một họ trên $Y := X \setminus \{x\}$. Gọi B là một tập con với k phần tử bất kì thuộc Y , vì B hiển nhiên là một tập con gồm k phần tử của X nên B chứa một tập con T với l phần tử thuộc họ F . Do B không chứa x nên $x \notin T$. Suy ra T là một thành viên của họ G , đpcm.

b) Xét một phần tử $x \in X$, và gọi G, H lần lượt là các họ h -tập và $(h-1)$ -tập con của $Y = X \setminus \{x\}$ với số thành viên tương ứng là $T(n-1, k, l)$ và $T(n-1, k-1, l-1)$ thỏa mãn tính chất của bài toán.

Gọi E là họ thu được từ họ H bằng cách bổ sung thêm phần tử x vào các thành viên của họ H . Thì họ $G \cup E$ thỏa $G \cap E = \emptyset$ và do đó $|G \cup E| = T(n-1, k, l) + T(n-1, k-1, l-1)$. Bây giờ ta cần chỉ ra rằng với mọi k -tập A thuộc X luôn chứa l -tập B là một thành viên của họ $G \cup E$.

Thật vậy, nếu $x \in A$, thì $A \setminus \{x\}$ là một $(k-1)$ -tập con của Y , và do đó chứa một $(l-1)$ -tập con B' là thành viên của họ H , nên $B := B' \cup \{x\} \subset A$ và $B \in E$. Nếu $x \notin A$, thì A là một k -tập con của Y và do đó chứa một l -tập con $B \in G$.

c) Chứng minh chặn dưới : Xét ma trận 0-1 $M = (m_{A,B})$ trong đó các hàng được đánh số bởi các thành viên của họ F , các cột được đánh số bởi các k -tập con của X , và $m_{A,B} = 1$ khi và chỉ khi $A \subseteq B$. Đặt r_A là số các số 1 được điền ở A -hàng và c_B là số các số 1 được điền ở B -cột. Thì $c_B \geq 1$ với mọi tập B , bởi vì theo B phải chứa ít nhất là một thành viên của họ F . Mặt khác r_A bằng số các k -tập con chứa một l -tập con cho trước; nên $r_A = \binom{n-l}{k-l}$ với mọi tập $A \in F$.

$$\text{Áp dụng nguyên lí Fubini ta thu được : } |F| \binom{n-l}{k-l} = \sum_{A \in F} r_A = \sum_B c_B \geq \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow T(n, k, l) = |F| \geq \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k-l}} = \binom{n}{l}, \text{ đpcm.}$$

Chứng minh chặn trên: Ta chứng minh qui nạp theo n , khẳng định là hiển nhiên đúng trong trường hợp tầm thường. Giả sử khẳng định được chứng minh với mọi giá trị $\leq n-1$.

Sử dụng kết quả ở câu b) ta được :

$$T(n, k, l) \leq T(n-1, k-1, l-1) + T(n-1, k, l-1) \leq \binom{n-k+l-1}{l-1} + \binom{n-k+l-1}{l} = \binom{n-k+l}{l}, \text{ đpcm}$$

Bài toán 2: Chứng minh rằng :

a) $T(n, k, 2) = \binom{n}{2} - \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} - \binom{r}{2}$ với mọi $n \geq k \geq 2$, trong đó r là số dư trong phép chia của số n cho $k-1$

b) $T(n, n-l, k) = l+1$ với mọi $n \geq k(l+1)$ và $k \geq 1$.

Chứng minh

a) Ta xây dựng đồ thị G với tập đỉnh X với n phần tử và một 2-tập là một cạnh của đồ thị G . Ta cần xác định số cạnh nhỏ nhất của đồ thị G sao cho với mọi k -tập đỉnh luôn chứa ít nhất một cạnh. Nếu ta xét bài toán với đồ thị liên hợp G^* của G , thì ta cần tìm số cạnh lớn của đồ thị G^* sao cho nó không chứa một k -clique. Áp dụng định lí Turan (xem bài viết “Định lí Turan và các hướng tiếp cận khác nhau

trong chứng minh – phần 1” – chứng minh thứ 2) thì số này bằng $T(n, k) := \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}$.

$$\text{Suy ra: } T(n, k, 2) = \binom{n}{2} - T(n, k) = \binom{n}{2} - \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} - \binom{r}{2}, \text{ đpcm.}$$

b) Nếu $k=1$, bằng tính toán trực tiếp ta thu được : $T(n, n-l, 1) = n - (n-l) + 1 = l+1$.

Bây giờ ta xét với $k \geq 2$:

Đầu tiên ta chứng minh : $T(n, n-l, k) \geq l+1$ (*)

Thật vậy, bất đẳng thức (*) có nghĩa là tồn tại một họ F gồm các k -tập con với $|F| = l$ không thỏa mãn tính chất Turan. Ta tiến hành xây dựng họ F như sau:

Gọi S là một l -tập con của X . Đặt $\binom{X \setminus S}{k-1}$ là họ các $(k-1)$ -tập con của $X \setminus S$. Nhận thấy rằng do $\left| \binom{X \setminus S}{k-1} \right| > |S|$ (bởi vì $n-l > l(k-1)$ nên $\binom{X \setminus S}{k-1}$ luôn chứa ít nhất là l tập con với $k-1$ phần tử) nên ta

có thể xác định được một ánh xạ $f: S \rightarrow \binom{X \setminus S}{k-1}$ sao cho các tập $(f(x))_{x \in S}$ là phân biệt từng đôi một. Gọi

F là họ k -tập con với l thành viên được xác định bởi $F = (\{x\} \cup f(x))_{x \in S}$. Hiển nhiên tập $X \setminus S$ có $n-l$ phần tử và không chứa bất kì thành viên nào thuộc F . Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Tiếp theo chứng minh chiều ngược lại: $T(n, n-l, k) \leq l+1$ (**)

Thật vậy, bất đẳng thức (**) có nghĩa là tồn tại một họ G gồm các k -tập con với $|G| = l+1$ thành viên thỏa mãn tính chất Turan. Ta tiến hành xây dựng họ G như sau :

Gọi T là một $(l+1)$ -tập con của X . Nhận thấy rằng do $\left| \binom{X \setminus T}{k-1} \right| \geq |T|$ (bởi vì $n-l-1 \geq (l+1)(k-1)$) nên $\binom{X \setminus T}{k-1}$ luôn chứa ít nhất là $l+1$ tập con với $k-1$ phần tử) nên ta có thể xác định được một ánh xạ $g: T \rightarrow \binom{X \setminus T}{k-1}$ sao cho các tập $(g(x))_{x \in T}$ là phân biệt từng đôi một. Đặt $G = (\{x\} \cup g(x))_{x \in T}$. Khi đó G là một họ gồm $l+1$ thành viên và mỗi thành viên đều có kích thước k (vì $|\{x\} \cup g(x)| = k$ với mọi $x \in T$).

Ta cần chứng minh rằng với mọi tập con gồm $n-l$ phần tử luôn chứa một tập con thuộc họ G .

Gọi $A \subset X, |A| = n-l$, ta có đẳng thức sau : $n-l = |A| = |A \cap T| + |A \cap (X \setminus T)|$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử các tập $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r)$ không thuộc tập A và $n_1, n_2, \dots, n_r$ lần lượt là số phần tử của các tập $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r)$ không nằm trong A . Khi đó :

$$\begin{aligned} n-l &= |A \cap T| + |A \cap (X \setminus T)| \leq |A \cap T| + n-l-1 - \sum_{i=1}^r n_i \\ &\Rightarrow |A \cap T| \geq \sum_{i=1}^r n_i + 1 \geq 1+r \end{aligned}$$

Do đó, A chứa ít nhất một phần tử $x \in T$ và $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. Từ đây ta suy ra $A \supset \{x\} \cup g(x) \in G$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Từ (*) và (**) ta suy ra : $T(n, n-l, k) = l+1$

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [2]. Ioan Tomescu, Problem in Combinatorics and Graph theory.