

Hình học tổ hợp

Trương Phước Nhân, 25/07/2017

Các kết quả cơ bản :

Kết quả 1: (Happy ending/Klein)

Cho trước 5 điểm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Chứng minh rằng ta luôn tìm được 4 điểm trong số 5 điểm cho trước là đỉnh của một tứ giác lồi.

(trong bài viết "Nguyên lý chuồng bồ câu" ta có đề cập đến định lý Klein nhưng chưa ra chứng minh cụ thể)

Chứng minh : Nếu bao lồi của 5 điểm này có kích thước ≥ 4 thì ta chọn 4 điểm là đỉnh của bao lồi, bài toán được chứng minh. Trong trường hợp ngược lại, bao lồi là một tam giác ABC hoặc là một đoạn thẳng, ta loại đi trường hợp cuối vì khi đó cả 5 điểm phải thẳng hàng điều này mâu thuẫn với giả thiết. Xét một đường thẳng đi qua 2 điểm trong CD (điểm trong hiểu theo nghĩa điểm nằm ở trong bao lồi tam giác ABC tức là 2 điểm còn lại trong số 5 điểm), đường thẳng này chia $\{A, B, C\}$ thành 2 nhóm (do không có 3 điểm nào thẳng hàng nên việc chia này luôn xác định duy nhất) và một trong hai nhóm này phải có đúng 2 phần tử ta tạm gọi là A, B . Khi đó, 4 điểm $\{A, B, C, D\}$ là đỉnh của một tứ giác lồi, đpcm.

Kết quả 2: (Caratheodory)

Một tổ hợp lồi của các điểm x_i được định nghĩa là một tổ hợp tuyến tính $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ sao cho α_i là các số không

âm và $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Giả sử X là một tập gồm hữu hạn điểm trong không gian $\mathbb{R}^d$, đặt $\text{conv}(X)$ là tập các điểm thuộc bao lồi của X , hay tập hợp tất cả các điểm có thể biểu diễn thành một tổ hợp lồi của các điểm $x_i \in X$. Chứng minh rằng: Mỗi điểm $x \in \text{conv}(X)$ đều biểu diễn được dưới dạng tổ hợp lồi của $d+1$ điểm thuộc X

Chứng minh : Giả sử điểm $x \in \text{conv}(X)$ biểu diễn được dưới dạng tổ hợp lồi $d+2$ hoặc nhiều hơn các

điểm thuộc X , có nghĩa là $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$, trong đó $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ và $x_i \in X$ và $k \geq d+2$

Ta chứng minh rằng có thể làm giảm số điểm biểu diễn này xuống 1 đơn vị.

Nhận xét 1: Các vector $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1$ là phụ thuộc tuyến tính (bởi vì $k \geq d+2$)

Do đó tồn tại các vô hướng β_i không đồng thời bằng 0 sao cho $\sum_{i=2}^k \beta_i (x_i - x_1) = 0$. Bằng tính toán trực tiếp ta được :

$$\left(-\sum_{i=2}^k \beta_i \right) x_1 + \sum_{i=2}^k \beta_i x_i = 0 \quad (*)$$

Đặt $\beta_1 := -\sum_{i=2}^k \beta_i$ thì hệ thức (*) được viết lại dưới dạng : $\sum_{i=1}^k \beta_i x_i = 0$ (**) với $\sum_{i=1}^k \beta_i = 0$ và β_i không đồng thời bằng 0.

Nhận xét 2: Có ít nhất một $\beta_i > 0$ (nếu tất cả đều ≤ 0 thì $\sum_{i=1}^k \beta_i < 0$ vì lưu ý rằng β_i không đồng thời bằng 0, điều này mâu thuẫn với giả thiết).

Từ biểu diễn $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ và hệ thức (**) ta có :

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^k \beta_i x_i = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \lambda \beta_i) x_i, \text{ với mọi số thực } \lambda$$

Từ nhận xét 2) ta chọn $\lambda := \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{\alpha_i}{\beta_i} : \beta_i > 0 \right\} = \frac{\alpha_j}{\beta_j}$ khi đó $\alpha_i - \lambda \beta_i \geq 0$ với mọi i và đặc biệt là $\alpha_j - \lambda \beta_j = 0$.

Điều này có nghĩa là ta có thể biểu diễn điểm x dưới dạng một tổ hợp lồi của $k-1$ điểm x_i .

Lập lại quá trình này cho đến khi ta thu được biểu diễn của x thành tổ hợp lồi của chính xác $d+1$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Kết quả 2: (Radon)

Cho $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ là một tập hữu hạn điểm với số phần tử $k \geq d + 2$ trong $\mathbb{R}^d$. Chứng minh rằng ta có thể phân hoạch A thành hai tập phân biệt $A_1 \cup A_2$ sao cho $\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset$.

Chứng minh 1: (tiếp cận theo số chiều)

Với mỗi điểm thuộc $\mathbb{R}^d$ ta cho tương ứng với một vector v_i thuộc $\mathbb{R}^{d+1}$ bằng cách bổ sung thêm “1” để làm tọa độ thứ $d + 1$ của vector v_i . Gọi $v_1, v_2, \dots, v_k$ là các vector thuộc $\mathbb{R}^{d+1}$ tương ứng của tập A . Do $k \geq d + 2$ nên ta tìm được các vô hướng α_i không đồng thời bằng 0 sao cho $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$. (*)

Ta tiến hành phân hoạch $A = A_1 \cup A_2$, trong đó $x_i \in A_1$ nếu $\alpha_i \geq 0$ và $x_i \in A_2$ nếu $\alpha_i < 0$.

Đồng nhất tọa độ thứ $d + 1$ từ hệ thức (*) ta suy ra: $\sum_{i \in A_1} \alpha_i = \sum_{i \in A_2} (-\alpha_i)$

Đặt: $\alpha := \sum_{i \in A_1} \alpha_i = \sum_{i \in A_2} (-\alpha_i)$ thì khi đó từ hệ thức (*) ta thu được: $\sum_{i \in A_1} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i = \sum_{i \in A_2} \frac{(-\alpha_i)}{\alpha} x_i$ (**)

Hệ thức (**) chỉ ra rằng $\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh

Chứng minh 2: (tiếp cận theo ngôn ngữ của hệ phương trình)

Ta tiến hành xem xét hệ:
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k a_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^k a_i = 0 \end{cases}$$
, trong đó $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các ẩn số.

Thì hệ này gồm k ẩn số và d phương trình. Nhận thấy rằng hệ này có số biến nhiều hơn số phương trình, do đó tồn tại một nghiệm không tầm thường $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. Ta tiếp hành bước phân hoạch $A = A_1 \cup A_2$ và chứng minh $\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset$ tương tự như chứng minh 1 (xem thêm bài viết “**Bài toán phân hoạch đồ thị - phần 1**” để tham khảo thêm về hướng tiếp cận này)

Kết quả 3: (Helly) Cho $C_1, C_2, \dots, C_n$ là các tập con lồi thuộc $\mathbb{R}^d$ với $n \geq d + 1$ sao cho với $d + 1$ tập bất kì trong số chúng đều có giao khác rỗng. Chứng minh rằng: Tất cả các tập này phải có chung một phần tử (xem lại trong bài viết “**Các bài toán về họ có tính chất giao**” ta đã đề cập đến vấn đề này nhưng chưa đưa ra một phép chứng minh cụ thể cho nó)

Chứng minh: Ta chứng minh bằng qui nạp theo n . Khẳng định là hiển nhiên với $n = d + 1$. Giả sử khẳng định đã được chứng minh là đúng tới $n - 1$ ($n \geq d + 2$). Ta cần chứng minh khẳng định đúng với n .

Theo giả thiết qui nạp ta luôn tìm được điểm $a_i \in \bigcap_{j \neq i} C_j$ với $i = \overline{1, n}$. Áp dụng định lý Radon (kết quả 2) cho

tập $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ta tìm được phân hoạch $\{1, 2, \dots, n\} = A \cup B$ và $\text{conv}(a_i : i \in A) \cap \text{conv}(a_i : i \in B) \neq \emptyset$.

Theo cách mà ta định nghĩa các điểm a_i thì ta suy ra rằng với $i \in A$ và $j \in B$ thì $a_i \in C_j \Rightarrow a_i \in \bigcap_{j \in B} C_j$

Do đó: $\text{conv}(a_i : i \in A) \in \bigcap_{j \in B} C_j$. Lập luận tương tự ta cũng suy ra được: $\text{conv}(a_i : i \in B) \in \bigcap_{j \in A} C_j$.

Kết hợp với điều kiện $\text{conv}(a_i : i \in A) \cap \text{conv}(a_i : i \in B) \neq \emptyset$ ta suy ra rằng $\bigcap_{i=1}^n C_i = \bigcap_{j \in A} C_j \cap \bigcap_{j \in B} C_j \neq \emptyset$.

Kết quả 4: (Định lý tô màu Caratheodory \Barany) Cho $S_1, S_2, \dots, S_{d+1}$ là $d + 1$ tập con trong $\mathbb{R}^d$.

Chứng minh rằng: nếu $x \in \text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \cap \dots \cap \text{conv}(S_n)$ thì ta tìm được

$x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \dots, x_{d+1} \in S_{d+1}$ sao cho $x \in \text{conv}(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$

(nếu quan niệm rằng có $d + 1$ tập các điểm và mỗi tập được tô bởi các màu khác nhau và điểm x thuộc giao của bao lồi của các tập này thì ta luôn có thể tìm được đa giác lồi chứa điểm x với các đỉnh trên bao lồi được tô màu khác nhau, điều này lý giải cho tên gọi của định lý)

Chứng minh : Giả sử phản chứng $x \notin \text{conv}(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$, trong đó $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \dots, x_{d+1} \in S_{d+1}$ bất kì. Xét D là khoảng cách theo nghĩa thông thường trên $\mathbb{R}^d$ từ điểm x đến $\text{conv}(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$.

Giả sử $z \in \text{conv}(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$ tương ứng với khoảng cách D , có nghĩa là $d(x, z) = D$, và theo giả thiết phản chứng ta suy ra rằng $z \neq x$, có nghĩa là $D > 0$. Đặt $S := \text{conv}(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$.

Xét siêu phẳng H đi qua điểm z và trực giao với đường thẳng đi qua x và z . Điểm x thuộc phần trong của một trong hai nửa không gian đóng tạo thành bởi siêu phẳng H , ta tạm gọi là H^- và tập S nằm ở nửa không gian đóng H^+ . Thật vậy, nếu có một điểm $u \in S$ thuộc phần trong của nửa không gian đóng H^- thì góc giữa $[u, z]$ và $[x, z]$ phải nhỏ hơn 90° (trong đó $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ chỉ đoạn thẳng nối hai điểm x, y) thì khi đó mọi điểm $y \in [u, z] := [u, z] \setminus \{z\} \subset S$ sẽ có khoảng cách đến điểm x nhỏ hơn hẳn khoảng cách từ z đến x , điều này mâu thuẫn giả thiết. (xem thêm các giáo trình **giải tích hàm** và **hình học Euclid**)

Từ phân tích nêu trên chỉ ra rằng : $z \in \text{conv}(x_i : 1 \leq i \leq d + 1, x_i \in H)$. Lưu ý rằng siêu phẳng H có số chiều bằng $d - 1$, áp dụng định lý Carathéodory (kết quả 2) ta có thể biểu diễn z thành một tổ hợp lồi của d điểm x_i có nghĩa là $z \in \text{conv}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{d+1})$ với một chỉ số j nào đó.

Nhận xét : $S_j \notin H^+$ (bởi vì nếu $S_j \subset H^+$ thì từ giả thiết trong đầu bài ta suy ra $x \in \text{conv} S_j \subset H^+$, mâu thuẫn)

Do đó tồn tại một điểm $x'_j \in S_j$ thuộc nửa không gian H^- . Xét $S' := \text{conv}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x'_j, x_{j+1}, \dots, x_{d+1})$, thì $z, x'_j \in S'$. Do x'_j thuộc nửa không gian H^- nên mọi điểm thuộc nửa đoạn $(z, x'_j]$ có khoảng cách đến điểm x nhỏ hơn hẳn khoảng cách từ z đến x . Từ điều mâu thuẫn này ta suy ra điều phải chứng minh.

Tài liệu tham khảo :

[1]. Wikipedia

[2]. Gil Kalai, Sarkaria's Proof of Tverberg's Theorem 1, gilkalai.wordpress.com

[3]. Po- Shen Loh, Combinatorics of sets, ??/??/2011