

Nguyên lý bao hàm – loại trừ

Trương Phước Nhân, 28/08/2017

Kết quả : Với mọi họ các tập hữu hạn $A_1, A_2, \dots, A_n$ cùng thuộc tập nền X thì ta có

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Chứng minh thứ nhất : Với mỗi tập A_i ta định nghĩa hàm đặc trưng như sau : $f_i(x) = \begin{cases} 1 : x \in A_i \\ 0 : x \notin A_i \end{cases}$.

Nhận thấy rằng hàm đặc trưng của phần bù của tập $\bigcup_{i=1}^n A_i$ là $F(x) = \prod_{i=1}^n (1 - f_i(x))$, $F(x)$ bằng 1 khi và chỉ khi x không thuộc bất kì tập A_i nào. Khi đó $\sum_{x \in X} F(x) = \left| X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$ (1)

Mặt khác, $F(x) = \prod_{i=1}^n (1 - f_i(x)) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} f_i(x)$

nên $\sum_{x \in X} F(x) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \sum_{x \in X} \prod_{i \in I} f_i(x) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$ (2)

(lưu ý rằng hàm đặc trưng của tập $\bigcap_{i \in I} A_i$ là $\prod_{i \in I} f_i(x)$ với qui ước hàm đặc trưng của tập $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i$ là $f(x) = 1$ với mọi $x \in X$)

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2) ta suy ra : } \left| X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ \Rightarrow |X| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ \Rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad (\text{bởi vì } \left| \bigcap_{i \in \emptyset} A_i \right| = |X|) \end{aligned}$$

Chứng minh thứ hai : Ta cần đến bổ đề sau trong chứng minh :

Bổ đề : Cho S là một tập hữu hạn với n phần tử. Gọi V là không gian vector 2^n chiều (trên một trường F) gồm tất cả các ánh xạ $f : 2^S \rightarrow K$. Nếu $\phi : V \rightarrow V$ là ánh xạ tuyến tính được định nghĩa bởi $\phi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} f(Y)$ với mọi $T \subseteq S$ thì ϕ^{-1} tồn tại và $\phi^{-1} f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f(Y)$ với mọi $T \subseteq S$.

Chứng minh bổ đề : Đặt $\psi : V \rightarrow V$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi $\psi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f(Y)$.

Khi đó :

$$\phi \psi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \phi f(Y) \quad (\phi \text{ là ánh xạ tuyến tính})$$

$$= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \sum_{Z \supseteq Y} f(Z)$$

$$= \sum_{Z \supseteq T} \left(\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \right) f(Z)$$

Đặt $m = |Z - T|$: $\sum_{\substack{Z \supseteq Y \supseteq T \\ Z, T: \text{ cố định}}} (-1)^{|Y-T|} = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} = \delta_{m,0}$ (sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton ta

được $(x+1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k$ với $m \geq 1$ nên khi thay $x = -1$ ta thu được $\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} = 0$, trường hợp $m = 0$ là tầm thường)

Từ kết quả trên ta suy ra : $\phi \psi f(T) = f(T)$.

Do đó : $\phi\psi f = f$, hay $\psi = \phi^{-1}$ (lưu ý : theo lý thuyết đại số tuyến tính thì đối với một phép biến đổi tuyến tính (một ánh xạ tuyến tính có cùng tập nguồn và tập đích) thì hai tính chất đơn ánh và toàn ánh là tương đương với nhau). Kết thúc chứng minh bổ đề.

Trở lại bài toán ban đầu :

Với mỗi tập A_i ta định nghĩa một *tính chất* P_i như sau: ta nói rằng phần tử $x \in X$ có tính chất P_i nếu và chỉ nếu $x \in A_i$, đặt $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Với mỗi tập con $T \subseteq S$ ta gọi $f_=(T)$ là số các phần tử của tập X có chính xác một tính chất thuộc T và $f_>(T)$ là số các phần tử của tập X có ít nhất một tính chất thuộc T .

$$\text{Khi đó : } f_>(T) = \sum_{Y \supseteq T} f_=(Y)$$

$$\text{Sử dụng bổ đề vừa chứng minh ta suy ra : } f_=(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f_>(Y)$$

$$\Rightarrow f_=(\emptyset) = \sum_{Y \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|Y|} f_>(Y) \quad (1)$$

Mặt khác, bằng cách đặt $A_T := \bigcap_{P_i \in T} A_i$, với quy ước $A_\emptyset = X$.

Khi đó :

$$\text{Tập } A_T \text{ gồm tất cả các phần tử của tập } X \text{ có ít nhất một tính chất thuộc } T, \text{ hay } f_>(T) = \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right| \quad (2)$$

Tập $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ bao gồm tất cả các phần tử của tập X không có bất kì tính chất nào trong số các tính chất

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \text{ hay } f_=(\emptyset) = \left| \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \right| = |X| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \quad (\text{luật De Morgan}) \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta suy ra : } \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Tài liệu tham khảo :

[1]. Bài giảng Algebraic Combinatorics của Lionel Levine , 15/02/2011

[2]. Richard Stanley, Enumerative Combinatorics - Volume I, Second Edition