

Hướng dẫn giải bài tập

1. Bài 1:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 30 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})[(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 3\sqrt{xy}] = 35 \end{cases}$$

$$+ \text{đặt } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = u \\ \sqrt{xy} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u, v \geq 0 \\ uv = 30 \\ u[u^2 - 3v] = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

Bình phương hai vế pt (1)

$$\text{Bài 2: } \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = a^2 \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = \frac{a^2 - a}{3} \geq 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{điều kiện } \begin{cases} a = 0 \\ a \geq 1 \end{cases} ; \sqrt{x}, \sqrt{y} \text{ là nghiệm của phương trình:}$$

$$X^2 - aX + \frac{a^2 - a}{3} = 0$$

$$\text{ta có } \Delta = \frac{4a - a^2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4 \text{ kết hợp các điều kiện ta có:}$$

với $a = 0$ hoặc $1 \leq a \leq 4$ hệ có nghiệm. cụ thể như sau:

+ nếu $a = 0$ hệ có nghiệm $x = y = 0$

+ nếu $a = 4 \Rightarrow$ hệ có nghiệm $x = y = 4$

$$+ \text{nếu } 1 \leq a < 4 \Rightarrow \sqrt{x}, \sqrt{y} \text{ nhận các giá trị } \frac{1}{2} \left[a \pm \sqrt{\frac{4a - a^2}{3}} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \left[a \pm \sqrt{\frac{4a - a^2}{3}} \right]^2 \\ y = \frac{1}{4} \left[a \mp \sqrt{\frac{4a - a^2}{3}} \right]^2 \end{cases}$$

3. Bài 3.

- Nhận xét nếu (x_0, y_0) là nghiệm của hệ thì $(-x_0, y_0)$ cũng nghiệm hệ; nên hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0$ thay vào hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1 = y + a \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Điều kiện đủ: $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ hệ có 2 nghiệm $(0, -1); (1, 0)$ không thỏa mãn

+ nếu $a=0$ hệ có dạng $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow 0 \leq |x| \leq 1; |y| \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq |x| \Rightarrow VT(1) \geq 1 + |x| \geq y + x^2 = VP(1)$

Do đó pt (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ |x| = x^2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

- Kết luận với $a = 0$ hệ pt có nghiệm duy nhất

4. Bài 4:

+ nhận thấy từ (2) $\Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{10}{3} - x + y \right| = \left(x + \frac{1}{y} \right) + \frac{10}{3} - x + y$

xảy ra như trên $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} \geq 0 & (3) \\ \frac{10}{3} - x + y \geq 0 & (4) \end{cases}$

+ Từ (2) $\Rightarrow \frac{10}{3} + y + \frac{1}{y} \geq 0$ (5) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq y \leq -\frac{1}{3} \\ y > 0 \end{cases}$

- Nếu $-3 \leq y \leq -\frac{1}{3}$ Kết hợp (3), (4) $\Rightarrow 0 < -\frac{1}{y}x \leq \frac{10}{3} + y$ bình phương các

vế và cộng với y^2 ta có $\frac{82}{9} \leq x^2 + y^2 \leq \left(\frac{10}{3}y \right)^2 + y^2 \Rightarrow$

$y^2 + \frac{10}{3} + 1 \geq 0$ (6) từ (5) do $y < 0 \Rightarrow y^2 + \frac{10}{3} + 1 \leq 0$ (7)

+ từ (6), (7) $\Rightarrow y^2 + \frac{10}{3} + 1 = 0 \Rightarrow y = -3; y = -\frac{1}{3}$ có x tương ứng là: $x = \frac{1}{3}; x = 3 \Rightarrow$

hệ có 2 nghiệm: $\left(\frac{1}{3}, -3 \right); \left(3, -\frac{1}{3} \right)$

- Nếu $y > 0 \Rightarrow$ (5) luôn đúng; do $x^2 + y^2 = \frac{82}{9}$ nên chỉ có thể $0 < y \leq \sqrt{\frac{82}{9}}$

- nếu $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{82}{9} - y^2} \Rightarrow (3), (4)$ thỏa mãn
 - nếu $x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{82}{9} - y^2} \Rightarrow (4)$ thỏa mãn còn (3) thỏa mãn
- $$\Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{9}; y^2 \geq 9 \Leftrightarrow 0 < y < \frac{1}{3} \text{ hoặc } 3 \leq y \leq \sqrt{\frac{82}{9}} \text{ thì } x = -\sqrt{\frac{82}{9} - y^2}$$

vấn đề 3: hệ phương trình bậc cao 1 ẩn.

Giải hệ pt đã có nhiều phức tạp; khi giải hệ bpt cần phải cẩn thận hơn, chặt chẽ hơn. Ta xét một số ví dụ:

1. ví dụ 1:

Giải hệ bpt sau:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0 & (1) \\ x^3 - 3x + 1 > 0 & (2) \end{cases}$$

Giải:

+ giải (1) được nghiệm $-1 < x < \frac{1}{3}$

+ đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$ khi $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ lại có

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ do hàm số nghịch biến với mọi } x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

Vậy nghiệm của hệ bpt trên là $-1 < x < \frac{1}{3}$

2. Ví dụ 2: giải và biện luận hệ:

$$(I) \begin{cases} (x^2 - 1)(x - 2) \geq 0 \\ x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a \leq 0 \end{cases}$$

(giải bằng phương pháp khoảng)

Giải: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2; -1 \leq x \leq 1 \\ (x - a)[x - 2a - 1] \leq 0 \end{cases} \quad (2)$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq 2a + 1 & \text{nếu } a \geq -1 \\ 2a + 1 \leq x \leq a & \text{nếu } a < -1 \end{cases}$

• Biện luận:

+ nếu $a < -1 \Rightarrow 2a + 1 \leq x \leq a < -1 \leq x \leq 1$ hệ (I) khi đó vô nghiệm

+ khi $0 \geq a \geq -1 \Rightarrow -1 \leq a < 2a + 1 \leq 1 \Rightarrow$ nghiệm của hệ là $a \leq x \leq 2a + 1$

+ khi $0 < a < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < a < 1 < 2a + 1 < 2 \Rightarrow$ nghiệm của hệ là $a \leq x \leq 1$

+ khi $\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \Rightarrow -1 < a < 1 < 2 \leq 2a + 1 \Rightarrow$ nghiệm của hệ bpt là

$$a \leq x \leq 1; 2 \leq x \leq 2a + 1$$

+ khi $1 < a < 2 \Rightarrow 1 < a < 2 < 2a + 1 \Rightarrow$ nghiệm của hệ bpt là $2 \leq x \leq 2a + 1$

+ khi $a \geq 2 \Rightarrow 2 \leq a < 2a + 1 \Rightarrow$ nghiệm của hệ là $a \leq x \leq 2a + 1$.

Chú ý: trong 2 ví dụ trên chúng ta có thể giải từng bpt sau đó chỉ có nhiệm vụ biện luận vị trí tương đối khoảng của 2 bpt.

3.ví dụ 3: xác định a để hệ bpt:

$$\begin{cases} x+3y \geq (x+y)^2 + a \\ (x-y)^2 \leq 3y - x - a \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Giải: giải theo phương pháp cần- đủ

+ đk cần: nhận thấy nếu $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ vì thay vào hệ:

$$\begin{cases} -x_0 + 3y_0 \geq (-x_0 + y_0)^2 + a \\ (-x_0 - y_0)^2 \leq 3y_0 + x_0 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3y_0 \geq (x_0 + y_0)^2 + a \\ (x_0 - y_0)^2 \leq 3y_0 + x_0 - a \end{cases}$$

Vậy để hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow (0, y_0)$ là nghiệm của

$$\text{hệ} \Rightarrow y_0^2 - 3y_0 + a \leq 0 \Rightarrow 9 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

$$+ \text{điều kiện đủ: với } a = \frac{9}{4} \text{ hệ trở thành } \begin{cases} x+3y \geq (x+y)^2 + \frac{9}{4} \\ (x-y)^2 \leq 3y - x - \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 3(y+x) + \frac{9}{4} \leq -2x \\ (y-x)^2 - 3(y-x) + \frac{9}{4} \leq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y-\frac{3}{2}\right)^2 \leq -2x \\ \left(y-x-\frac{3}{2}\right)^2 \leq 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

+Kết luận $a = \frac{9}{4}$ hệ có nghiệm duy nhất

$$4. \text{ Ví dụ 4: cho hệ } \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 < 0 & (1) \\ x^2 + (2a+1)x + a^2 + a - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

a. tìm a để hệ có nghiệm

b. tìm a để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải:

$$\text{Câu a: giải (1) được } 1 < x^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Giải (2) được } x_1 = -a-2; x_2 = -a+1$$

Theo yêu cầu của bài toán, để hệ có nghiệm ta cần có:

$$\begin{aligned}
 & -2 < x_1 < -1 \text{ hoặc } -2 < x_2 < -1 \text{ hoặc } 1 < x_1 < 2 \text{ hoặc } 1 < x_2 < 2 \\
 \Leftrightarrow & -2 < a-2 < -1 \text{ hoặc } -2 < a+1 < -1 \text{ hoặc } 1 < a-2 < 2 \text{ hoặc } 1 < a+1 < 2 \\
 \Leftrightarrow & -1 < a < 0 \text{ hoặc } 2 < a < 3 \text{ hoặc } -4 < a < -3 \text{ thì hệ có nghiệm}
 \end{aligned}$$

Câu b:

- gọi $f(x) = x^2 + (2a+1)x + a^2 + a - 2$ theo yêu cầu của bài toán ta cần tìm a để $f(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm thuộc $(-2, -1)$ hoặc thuộc $(1, 2)$ điều đó tương đương với

$$\begin{cases} f(-2)f(-1) < 0 \\ f(1)f(2) \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(-2)f(-1) \geq 0 \\ f(1)f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < a < 3 \\ -4 < a < -3 \end{cases}$$

- Kết luận với $\begin{cases} -4 < a < -3 \\ 2 < a < 3 \end{cases}$

thì hệ có nghiệm duy nhất

3. Ví dụ 5: Giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} (x-1)(x-2a) \leq 0 & (1) \\ (x+2)(x+a) \leq 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

+ta có nghiệm tam thức vế trái của (1) là $x_1 = 1; x_2 = 2a$

+ nghiệm vế trái của (2) là $x_3 = -2; x_4 = -a$

+ Biện luận:

- nếu $a = 0 \Rightarrow x_2 \equiv x_4$ hệ (I) có 1 nghiệm $x = 0$
- nếu $a > 0 \Rightarrow x_2 = 2a > 0; x_4 = -a < 0 \Rightarrow$ hệ (I) vô nghiệm
- nếu $a < 0 \Rightarrow -1 < a < 0 \Rightarrow -2 < 2a < 0 < -a < 1$ nghiệm của hệ (I) là $[2a, -a]$
- nếu $a \leq -1 \Rightarrow 2a \leq -2 < 1 < -a$ nghiệm của hệ (I) là $[-2, 1]$

Bài tập:

Bài 1: giải hệ

$$\begin{cases} y - |x^2 - x| - 1 \geq 0 & (1) \\ |y - 2| + |x + 1| - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

a. giải hệ khi $y = 2$

b. tìm nghiệm nguyên (x, y) của hệ.

Bài 2:

Tìm a để hệ
$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1:

a. $y=2$ (các em tự giải) đáp số: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 0$

b. + từ (2) $\Leftrightarrow |y-2| + |x+1| \leq 1$ với $x, y \in \mathbb{Z}; |y-2| \geq 0 \Rightarrow 0 \leq |x+1| \leq 1 \Leftrightarrow$
 $x = 0 \vee x = -1$

+ $x = 0$ thay vào (2) $\Rightarrow y = 2$ thoả mãn (1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ nghiệm

+ $x = -1$ thay vào (2) $\Rightarrow |y - 2| \leq 1 \Rightarrow y = 1; 2; 3$

thay vào (1) được $y = 3$ thoả mãn đáp số: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

Bài 2: Giải theo điều kiện cần - đủ

- điều kiện cần: (x_0, y_0) là nghiệm của hệ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0y_0 - 7y_0^2 \geq \frac{1-a}{1+a} & (1) \\ 3x_0^2 + 10x_0y_0 - 5y_0^2 \leq -2 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

+ nhân 2 vế của (1) với (2) và cộng 2 bpt ta được

$$x_0^2 + 6x_0y_0 + 9y_0^2 \leq \frac{-4}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 3y_0)^2 \leq \frac{-4}{a+1} \Rightarrow a+1 < 0 \Rightarrow a < -1$$

- điều kiện đủ: với $a < -1$

Ta có $\frac{1-a}{1+a} = -1 + \frac{2}{a+1} < -1$ suy ra hệ

$$(II) \begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1 & (3) \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = 2 & (4) \end{cases}$$

hệ này có nghiệm thì hệ (I) có nghiệm (vì mọi nghiệm của (II) đều là nghiệm của (I))

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = 1 \\ (x + 3y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp \frac{3}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hệ (II) có nghiệm

+ kết luận: với $a < -1$ hệ đã cho có nghiệm.