

Câu I (5 điểm) 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x} + x - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 3\sqrt{x} + 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{2x + \sqrt{x} - 3}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

a. Rút gọn biểu thức A b. Tính giá trị của A khi $\frac{x}{4} = \sqrt{\frac{1009 + \sqrt{2017}}{2}} - \sqrt{\frac{1009 - \sqrt{2017}}{2}}$

2. Cho phương trình $x^2 - 2x - 2m - 1 = 0(I)$ (với x là ẩn, m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (I) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn :

$$\frac{x_1^2 + (2m + 5)x_2 + 2m}{2} + \frac{2}{x_2^2 + (2m + 5)x_1 + 2m} = \frac{122}{11}$$

Câu II (5 điểm) 1. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 y^2 + 4 = 2y^2 \\ (xy + 2)(y - x) = x^3 y^3 \end{cases}$$

Câu III (3 điểm) 1. Tìm tất cả bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $\frac{x + y\sqrt{2017}}{y + z\sqrt{2017}}$ là số hữu tỉ, đồng thời $(y + 2)(4zx + 6y - 3)$ là số chính phương.

2. Trong hình vuông cạnh 1 dm đặt một số hình vuông nhỏ có tổng chu vi bằng 9 dm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất ba hình vuông nhỏ (không kể hình vuông bao ngoài)

Câu IV (5 điểm) Cho tam giác OAI vuông tại A, B là điểm đối xứng với A qua đường thẳng OI. Gọi H, E lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BI, D là giao điểm của đường thẳng AE và đường tròn (C) tâm O bán kính OA (D khác A).

1. Chứng minh rằng tứ giác BHDE nội tiếp

2. Gọi J là giao điểm của đường thẳng ID và đường tròn (C) (J khác D). Chứng minh rằng tam giác BJA cân tại B

3. Gọi K là giao điểm của đường thẳng ID và đường tròn (C) (K khác D). Chứng minh rằng $IH^2 = ID \cdot IK - DH \cdot HK$

Câu V (5 điểm) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2\sqrt{xy} + \frac{x}{3} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{y}{x} + \frac{4x}{3y} + 15xy$$