ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN HOÀN KIẾM 2017

Bài 1: 1.Gọi 3 số nguyên tố là a,b,c với $a,b,c \in N^*$

Theo bài ra ta có: $5(a+b+c) = abc(*)$

Mà $a,b,c,5$ đều là số nguyên tố , suy ra 1 trong 3 số a, b, c phải bằng 5.

Không mất tính tổng quát giả sử $a=5$, khi đó (*) trở thành:

$5(5+b+c) = 5bc \Leftrightarrow 5+b+c = bc$

$\Leftrightarrow bc-b-c+1 = 6 \Leftrightarrow (b-1)(c-1) = 6 = \pm1.\pm6 = \pm2.\pm3$

Do $b,c \in N^* \Rightarrow b-1;c-1 \in N$ và giả sử $b \ge c$

Suy ra 2 trường hợp: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b-1=6 \\ c-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=7 \\ c=2 \end{cases} (T/M) \\ \begin{cases} b-1=3 \\ c-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4=2.2 \\ c=3 \end{cases} (K.T/M) \end{array}\right.$

Vậy 3 số nguyên tố cần tìm là 2, 5, 7

2. $x,y \in Z$, phương trình: $1+\sqrt{x+y+3} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$. ĐK $x,y \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{x+y+3}\right)^2 = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

$\Leftrightarrow 4+x+y+2\sqrt{x+y+3} = x+y+2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2+\sqrt{x+y+3} = \sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ (1) (thay $1+\sqrt{x+y+3} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$)

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{xy}-1\right)^2 \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy} = xy+1-2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{xy} = xy+1-x-y \Leftrightarrow 4\sqrt{xy} = (x-1)(y-1)$ (2)

Do $(x-1)(y-1) \in Z \Rightarrow 4\sqrt{xy} \in Z \Rightarrow 4\sqrt{xy} = k$ với $k \in N$

$\Rightarrow 16xy = k^2 \Rightarrow k \vdots 4$ hay $k = 4k_1; k_1 \in N \Rightarrow xy = k_1^2$. Gọi $d = UCLN(x,y)$

$\Rightarrow x = d.x_1$ và $y = d.y_1$ với $d,x_1,y_1 \in N$ và $(x_1,y_1) = 1$

$\Rightarrow d^2.x_1.y_1 = k_1^2 \Rightarrow k_1 \vdots d$; $k_2 = k_1.d \Rightarrow x_1y_1 = k_2^2$

Kết hợp với $(x_1,y_1) = 1$

$\Rightarrow x_1 = m^2; y_1 = n^2$ với $m,n \in Z$ và $m.n = k_2$

$\Rightarrow x = d.m^2;\ y = d.n^2$ với $(m,n) = 1; d,m,n \in N$

Thay vào (2) suy ra:

$4\sqrt{d^2m^2n^2} = \left(d.m^2-1\right)\left(d.n^2-1\right) \Leftrightarrow 4.d.m.n = \left(d.m^2-1\right)\left(d.n^2-1\right)$

Nếu $d>1$ ta thấy vế trái chia hết cho d còn vế phải không chia hết cho d vô lý, vậy $d=1$ khi đó thay vào (1) ta được:

$1+\sqrt{m^2}+\sqrt{n^2} = \sqrt{m^2n^2} \Leftrightarrow 1+m+n = mn \Leftrightarrow 2 = mn-m-n+1$

$\Leftrightarrow (m-1)(n-1) = 2 = \pm 1.\pm 2$

Do $m,n \in N \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1=1 \\ n-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} (TM) \\ \begin{cases} m-1=2 \\ n-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases} (TM) \end{array}\right.$

Vậy các cặp (x,y) thỏa mãn đề bài là $(4,9);(9,4)$

Bài 2.

1. $x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3x+1$

ĐKXĐ: $\begin{cases} x-\frac{1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Từ $x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3x+1$ chia cả 2 vế cho x ta được:

$x+2\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x-\frac{1}{x}+2\sqrt{x-\frac{1}{x}}-3=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+3\right)\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1\right)=0$

$\Rightarrow \sqrt{x-\frac{1}{x}}-1=0$ (do $\sqrt{x-\frac{1}{x}} \geq 0$)

$\Rightarrow x-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. (TM)$

2. $\begin{cases} 6y+2=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} y \neq 0 \\ x-2y \geq 0 \\ x+\sqrt{x-2y} \geq 0 \end{cases}$

Từ $6y+2=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y}$ chia cả 2 vế cho y ta được $6+\frac{2}{y}=\frac{x}{y^2}-\frac{\sqrt{x-2y}}{y}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2y}{y^2}-\frac{\sqrt{x-2y}}{y}-6=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x-2y}}{y}+2\right)\left(\frac{\sqrt{x-2y}}{y}-3\right)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{x-2y}}{y}-3=0 \Rightarrow \sqrt{x-2y}=3y \\ \frac{\sqrt{x-2y}}{y}+2=0 \Rightarrow \sqrt{x-2y}=-2y\end{array}\right.$$

TH1: $\sqrt{x-2y}=-2y$, khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \\ \sqrt{x-2y}=-2y\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2y}=-2y \\ \sqrt{x-2y}=x+3y-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2y}=-2y \\ -2y=x+3y-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2y}=-2y \\ 2-5y=x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2-5y-2y}=-2y \\ x=2-5y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2-7y=4y^2; y\le 0 \\ x=2-5y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=12 \\ y=-2\end{cases}$$

TH2: $\sqrt{x-2y}=3y$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x+3y}=x+3y-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2y}=3y \\ \left(\sqrt{x+3y}-2\right)\left(\sqrt{x+3y}+1\right)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x+3y}=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2y}=3y \\ x+3y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=4-3y \\ \sqrt{4-3y-2y}=3y\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=4-3y \\ 4-5y=9y^2 \\ y\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{11}{3} \\ y=\frac{4}{9}\end{cases}$$

Bài 3:

Cho $x, y, z \ge 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Không mất tính tổng quát giả sử y nằm giữa x và z, khi đó:

$(x-y)(z-y) \le 0 \Rightarrow x.z + y^2 - xy - yz \le 0 \Rightarrow x.z + y^2 \le xy + yz$

Vậy:

$xy^2 + yz^2 + zx^2 = x\left(y^2 + x.z\right) + y.z^2 \le x(xy + yz) + yz^2$

$= xy^2 + yz^2 + xyz = xyz + y\left(x^2 + z^2\right) = xyz + y\left(3 - y^2\right)$

Vậy BĐT tương đương với $y\left(3 - y^2\right) \le 2$

$\Leftrightarrow y^3 - 3y + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(y+2) \ge 0$. Điều này luôn đúng do $y \ge 0$.

Vậy $xy^2 + yz^2 + zx^2 \le xyz + y\left(3 - y^2\right) \le 2 + xyz$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

2. Giá trị lớn nhất: Áp dụng câu a ta được bất đẳng thức như sau:

$$P = \frac{x}{y+2} + \frac{y}{z+2} + \frac{z}{x+2} = \frac{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 6 + x^2z + y^2x + z^2y}{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 8 + xyz}$$

$$\le \frac{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 6 + 2 + xyz}{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 8 + xyz} = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Giá trị bé nhất: Sử dụng BĐT với $b \ge a > 0; c \ge 0$ thì $\frac{a+c}{b+c} \ge \frac{a}{b}$

Áp dụng cho $b = 4(x+y+z) + 8 \ge a = 4(x+y+z) + 6 > 0$ và $c = 2(xy+yz+zx) + xyz \ge 0$

ta được $\frac{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 6 + xyz}{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 8 + xyz} \ge \frac{4(x+y+z) + 6}{4(x+y+z) + 8}$

Và sử dụng: $3 = x^2 + y^2 + z^2 \le (x+y+z)^2 \Rightarrow x+y+z \ge \sqrt{3}$ và $x^2z + y^2x + z^2y \ge 3xyz$,

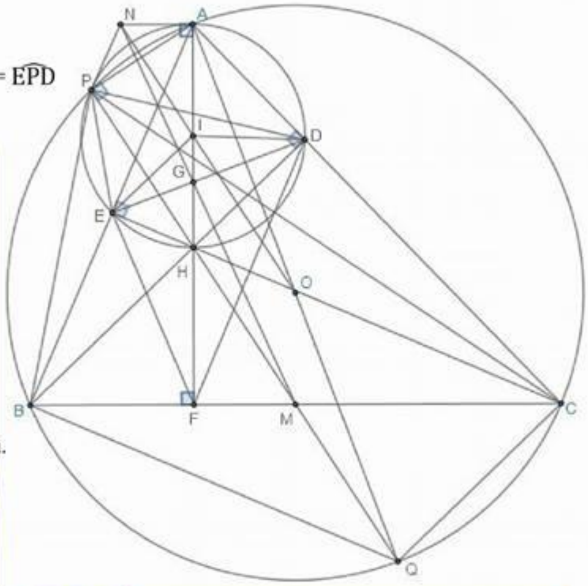
khi đó :

$$P \ge \frac{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 6 + 3xyz}{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 8 + xyz} \ge \frac{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 6 + xyz}{4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 8 + xyz}$$

$$\ge \frac{4t+6}{4t+8} = 1 - \frac{2}{4t+8} = 1 - \frac{1}{2t+4} \ge 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}+4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 0; z = \sqrt{3}$ hoặc hoán vị của nó

Bài 4 : a. Dễ dàng CM được :



$\Delta PBC \sim \Delta PED (g.g)$ ($\widehat{BPC} = \widehat{BAC} = \widehat{EPD}$

và $\widehat{BCP} = \widehat{BAP} = \widehat{ECP}$) (đpcm)

b. Kéo dài AO cắt (O) tại Q

=> AQ là đường kính

=> $\widehat{ABQ} = \widehat{ACQ} = \widehat{APQ} = 90^0$

Suy ra : BH//AC (cùng ⊥AC)

CE//BQ (cùng ⊥AB)

⇨ Hình BHCQ là hình bình hành.
⇨ H, M, Q thẳng hàng.
Lại có AH là đường kính (I) nên
$\widehat{APH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{APH} = \widehat{APQ}$
⇨ P, H, Q thẳng hàng.
⇨ 4 điểm P, H, M, Q thẳng hàng (đpcm)
c. Gọi G là giao điểm của AF và MN

Ta có NI//PQ (cùng ⊥AP) => $\frac{NI}{HM} = \frac{IG}{HG}$

Lại có: Δ NAI ~ Δ MFH (g.g) => $\frac{AI}{HF} = \frac{NI}{HM} \Rightarrow \frac{AI}{HF} = \frac{IG}{HG} = \frac{AI+IG}{FH+HG} = \frac{AG}{FG}$ (1)

Gọi G' là giao điểm của AF và ED. Áp dụng phương tích cho tứ giác nội tiếp ADHE ta có AG'. G'H = EG'.G'D

Dễ dàng CM được tứ giác IDFE là tứ giác nội tiếp => áp dụng phương tích ta có: EG'.G'D = IG'. G'F

⇨ AG'. G'H = IG'. G'F => $\frac{AG'}{FG'} = \frac{IG'}{HG'} = \frac{AG'-IG'}{FG'-HG'} = \frac{AI}{HF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra G ≡ G'. Hay MN, ED, AH đồng quy tại G (đpcm)

Bài 5: Ta thấy nếu trên bảng chỉ có 2 số khác nhau thì ta luôn chọn được 2 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Chẳng hạn 2 số là $2^n - 1$ và $2^n + 1$ có tổng là 2^{n+1}.

Giả sử trên bảng có nhiều hơn hoặc bằng 3 số thỏa mãn điều kiện bài toán.
Chẳng hạn là a, b, c với $a > b > c \,\&\, a,b,c \in N$ khi đó:

$$\begin{cases} a+b=2^m \\ a+c=2^n \\ b+c=2^p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2^{m-1}+2^{n-1}-2^{p-1} \\ b=2^{m-1}+2^{p-1}-2^{n-1} \\ c=2^{n-1}+2^{p-1}-2^{m-1} \end{cases} \text{ với } m,n,p \in N^*$$

Do a > b > c ≥ 0. Suy ra m > n > p > 0 => m-1 ≥ n và n -1 > p-1 ≥ 0

⇨ $2^{m-1} \geq 2^n = 2^{n-1+1} = 2.2^{n-1} > 2^{n-1} + 2^{p-1} \Rightarrow c = 2^{n-1} + 2^{p-1} - 2^{m-1} < 0$. Vô lý.

Vậy trên bảng chỉ có tối đa 2 số khác nhau thỏa mãn bài toán.