

BIBD

Trương Phước Nhân, 02/02/2018

Một BIBD (viết tắt của cụm từ *balanced incomplete block design*) là một tập B gồm v vật kết hợp với một họ F gồm b tập con của B (mà ta gọi là các khối) thỏa mãn:

- (1) Mỗi khối chứa chính xác k vật;
- (2) Mỗi vật nằm trong chính xác r khối;
- (3) Mỗi cặp các vật phân biệt được chứa trong chính xác λ khối.

Ta gọi bộ (b, v, r, k, λ) là tham số BIBD tương ứng

Kết quả 1: Nếu một BIBD có tham số (b, v, r, k, λ) thì $bk = vr$ và $r(k-1) = \lambda(v-1)$

Chứng minh:

Đăng thức thứ nhất suy ra bằng phương pháp đếm bằng hai cách số các cặp vật – khối sao cho vật được chứa trong khối. (Bởi vì, mỗi một trong b khối chứa k vật, và mỗi một trong v nằm trong chính xác r khối). Sử dụng phương pháp lập luận tương tự ta cũng chứng minh được tính đúng đắn của hệ thức thứ hai, ở đây ta thực hiện đếm số các cặp vật – khối sao cho khối luôn chứa vật cố định a_1 :

Vật cố định a_1 xuất hiện trong chính xác r khối và đối với mỗi khối như vật ta có $k-1$ các để chọn vật tương ứng. Mặt khác, vật a_1 tạo thành cặp với mỗi một trong $v-1$ vật còn lại, và mỗi cặp được chứa chính xác trong λ khối. (xem lại bài viết “Design”)

Giả sử X là một tập với v phần tử, và $X_1, X_2, \dots, X_v$ là một họ gồm v thành viên của tập X . Ta sẽ gọi họ này là (v, k, λ) - cấu hình nếu như nó thỏa mãn các điều kiện sau:

- (1) $|X_i| = k$ với $i = 1, 2, \dots, v$;
- (2) $|X_i \cap X_j| = \lambda$ với mỗi $i \neq j$
- (3) $0 < \lambda < k < v-1$

Xét $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq v}$ là ma trận liên thuộc của (v, k, λ) - cấu hình, điều đó có nghĩa là $a_{ij} = 1$ nếu phần tử i của tập X nằm trong tập X_j , và $a_{ij} = 0$ trong trường hợp còn lại.

Kết quả 2: A là một ma trận liên thuộc của một (v, k, λ) - cấu hình khi và chỉ khi $A^T A = (k - \lambda)I + \lambda J$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp v còn J là ma trận vuông cấp v với tất cả các phần tử đều bằng 1.

Chứng minh: Ma trận $(k - \lambda)I + \lambda J$ có dạng $\begin{pmatrix} k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & k \end{pmatrix}$, trong đó phần tử trên đường chéo chính đều

bằng k còn tất cả các phần tử còn lại đều bằng λ . Nếu A là ma trận liên thuộc của một (v, k, λ) - cấu hình, điều đó có nghĩa là mỗi cột của ma trận chứa k phần tử bằng 1 và $v-k$ vị trí còn lại đều bằng 0.

Đặt $B = A^T A$. Khi đó phần tử b_{ij} của ma trận B sẽ là tích vô hướng của cột thứ i và j của ma trận A . Do đó $b_{ii} = k$, bằng số các số 1 trong cột thứ i của ma trận A . Nếu $i \neq j$ thì cột thứ i và j của ma trận A có một số 1 ở hàng thứ t khi và chỉ khi phần tử t của ma trận X nằm trong cả hai tập X_i và X_j . Do đó các phần tử b_{ij} không nằm trên đường chéo chính bằng $|X_i \cap X_j| = \lambda$.

Ngược lại nếu ma trận 0-1 A cấp v thỏa mãn hệ thức $A^T A = (k - \lambda)I + \lambda J$ trong đó $0 < \lambda < k < v-1$.

Đặt $X_j = \{i : a_{ij} = 1\}$ với mỗi $1 \leq j \leq v$. Ta dễ dàng kiểm tra lại rằng đây là một (v, k, λ) - cấu hình và A là ma trận liên thuộc của cấu hình này.

Kết quả 3: Mỗi (v, k, λ) - cấu hình là một BIBD với tham số (v, v, k, k, λ)

Chứng minh:

Để thực hiện phép chứng minh (v, k, λ) - cấu hình là một BIBD với tham số (v, v, k, k, λ) ta cần chỉ ra rằng mỗi phần tử được chứa trong chính xác k khối và mỗi cặp vật phân biệt được chứa trong chính xác λ khối.

Các yêu cầu ta vừa dẫn ra nêu trên tương đương với việc chỉ ra rằng ma trận A thỏa mãn hệ thức :

$$AA^T = (k - \lambda)I + \lambda J \quad (1)$$

Việc chứng minh khẳng định này tương tự như phép chứng minh hệ thức đặc trưng của một (v, k, λ) - cấu hình, bởi vì nếu ta đặt $C = AA^T$, phần tử c_{ij} là tích vô hướng của hàng thứ i và j . Do đó $c_{ii} = k$ nếu số các số 1 ở hàng thứ i của ma trận A bằng k , nên mỗi vật được chứa trong chính xác k khối. Nếu $i \neq j$ thì hàng thứ i và j có số 1 ở cột thứ t nếu và chỉ nếu các phần tử i và j cùng nằm trong khối t . Điều đó có nghĩa là số các khối chứa cặp $\{i, j\}$ bằng λ .

Đầu tiên, từ kết quả 2) ta suy ra: $A^T A = (k - \lambda)I + \lambda J = \begin{pmatrix} k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & k \end{pmatrix}$. Áp dụng kiến thức đại số tuyến tính

ta có thể dễ dàng chỉ ra được rằng $\det(A^T A) = (k - \lambda)^{v-1} (v\lambda - \lambda + k) = (k - \lambda)^{v-1} [k + \lambda(v - 1)] > 0$, do đó ma trận A là không suy biến, bởi vì $\det(A^T A) = (\det A)^2$.

Bởi vì mỗi cột của ma trận A chứa chính xác k số 1 và $v - k$ số 0 nên ta có thể dễ dàng chỉ ra được rằng

$$\begin{aligned} JA &= kJ \\ \Rightarrow (JA)A^{-1} &= (kJ)A^{-1} \\ \Rightarrow JAA^{-1}.AA^{-1} &= kJA^{-1}.AA^{-1} \\ \Rightarrow J &= kJA^{-1} \\ \Rightarrow JA^{-1} &= k^{-1}J \end{aligned} \quad (2)$$

Từ hệ thức (2) ta suy ra : $A^T = (A^T A)A^{-1} = ((k - \lambda)I + \lambda J)A^{-1} = (k - \lambda)A^{-1} + \lambda JA^{-1} = (k - \lambda)A^{-1} + \lambda k^{-1}J$

Do đó : $A^T J = (A^T A)A^{-1}J = (k - \lambda)A^{-1}J + \lambda k^{-1}J^2 = (k - \lambda)A^{-1}J + \lambda k^{-1}vJ$, lưu ý: $J^2 = vJ$.

Mặt khác ta lại có $A^T J = (JA)^T = (kJ)^T = kJ$.

Áp dụng đẳng thức khai triển cho $A^T J$, ta thu được : $kJ = (k - \lambda)A^{-1}J + \lambda k^{-1}vJ$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^{-1}J &= mJ, \text{ trong đó } m = \frac{k - \lambda k^{-1}v}{k - \lambda} \\ \Rightarrow J &= mAJ \end{aligned}$$

Nhưng $vJ = J^2 = J(mAJ) = m(JA)J = mkJ^2 = mkvJ$, dẫn đến $v = mkv \Rightarrow mk = 1$.

Suy ra : $k - \lambda = k^2 - \lambda v \Rightarrow k^2 - k = \lambda(v - 1)$

Đồng thời $A^{-1}J = mJ = k^{-1}J \Rightarrow J = k^{-1}AJ \Rightarrow AJ = kJ$

Sau cùng ta có

$$AA^T = A(A^T A)A^{-1} = A((k - \lambda)I + \lambda J)A^{-1} = (k - \lambda)I + \lambda(AJ)A^{-1} = (k - \lambda)I + \lambda J(AA^{-1}) = (k - \lambda)I + \lambda J$$

Một BIBD được gọi là đối xứng nếu $b = v$ (hay nói một cách tương đương $k = r$).

Kết quả 4: Nếu một BIBD là đối xứng với tham số (v, v, k, k, λ) trong đó v là một số chẵn thì $k - \lambda$ là một số chính phương

Chứng minh : Từ chứng minh của kết quả 3) ta có :

$$\det(A^T A) = (\det A)^2 = (k - \lambda)^{v-1} [k + \lambda(v - 1)]$$

Do $r = k$ nên hệ thức $r(k - 1) = \lambda(v - 1)$ (xem kết quả 1) trở thành $k(k - 1) = \lambda(v - 1)$ nên

$$(\det A)^2 = (k - \lambda)^{v-1} k^2$$

Do $v - 1$ lẻ nên $k - \lambda$ phải là một số chính phương.

Cho X là một v - tập với $v \geq 3$. Một bộ ba Steiner bậc v là một họ các 3- tập con của tập X (gọi là các bộ ba) sao cho hai phần tử bất kì của X được chứa trong chính xác một bộ ba.

Kết quả 5: Điều kiện cần để tồn tại một bộ ba Steiner có bậc v là $v \equiv 1$ hoặc $3 \pmod{6}$

Chứng minh: Theo cách ta định nghĩa thì một bộ ba Steiner là một BIBD với $k=3$ và $\lambda=1$.

Sử dụng hệ thức $r(k-1) = \lambda(v-1)$ ta suy ra được $r = \frac{v-1}{2}$.

Sử dụng hệ thức $bk = vr$ kết hợp với kết quả vừa tính được ta suy ra $b = \frac{v(v-1)}{6}$.

Từ đây ta suy ra $v \equiv 1$ hoặc $3 \pmod{6}$ (bởi vì b luôn là một số nguyên).

Một mặt phẳng xạ ảnh Δ là một BIBD đối xứng với tham số (v, v, k, k, λ) trong đó $v \geq 4$ và $\lambda=1$. Ta sẽ gọi các vật là các *điểm* còn các khối là các *đường*. Từ kết quả 1) ta có thể tính ra được rằng $v = k^2 - k + 1$ (xem bài viết “**Các bài toán về tập hợp**”)

Số $n = k - 1$ được gọi là bậc của Δ . Do đó, đối với một mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn bậc n ta sẽ có

$$b = v = n^2 + n + 1, \quad r = k = n + 1$$

Lưu ý là ta sẽ nói các điểm là thẳng hàng với nhau nếu như chúng cùng được chứa trong một đường thẳng.

Kết quả 6: Một hệ tập $\Delta = (V, E)$ trong đó E là một họ các tập con của tập V là một không gian xạ ảnh hữu hạn nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

- (1) Mọi cặp điểm đều nằm trên chính xác một đường thẳng
- (2) Mọi cặp đường thẳng phân biệt giao nhau tại chính xác một điểm
- (3) Tồn tại một bộ 4 điểm của V sao cho không có 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng.

Chứng minh: Đầu tiên ta giả sử Δ là một mặt phẳng hữu hạn. Chú ý rằng điều kiện $v \geq 4$ kéo theo rằng bậc n của Δ tối thiểu bằng 2 và kích thước k của mỗi khối tối thiểu bằng 3. Điều kiện (1) được thỏa mãn, bởi vì $\lambda=1$. Ta chứng minh hai đường thẳng bất kì thuộc Δ luôn cắt nhau. Giả sử tồn tại hai đường thẳng L_1 và L_2 sao cho $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Nếu $L_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ thì theo giả thiết x_i nằm trên chính xác k đường thẳng $L_1, L_1^2, \dots, L_1^k$ với $i=1, \dots, k$.

Điều kiện (1) kéo theo rằng $L_i^m \neq L_j^p$ với $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$, và $2 \leq m, p \leq k$.

Thật vậy, nếu $L_i^m = L_j^p$ thì cặp $\{x_i, x_j\}$ được chứa trong hai đường thẳng L_1 và L_i^m , điều này mâu thuẫn với điều kiện (1).

Theo lập luận của chúng ta thì số các đường thẳng của Δ tối thiểu sẽ là $v \geq k(k-1) + 2 > k^2 - k + 1$, mâu thuẫn.

Bởi vì hai đường thẳng bất kì L_1 và L_2 luôn có giao với nhau, nên từ điều kiện (1) ta suy ra $|L_1 \cap L_2| = 1$ và do đó điều kiện (2) được thỏa mãn. Do $r = k \geq 3$, ta có thể chọn một điểm x_0 và hai đường thẳng L_1 và L_2 chứa nó. Bây giờ ta chọn ra hai điểm x_1 và x_3 trên L_1 khác với điểm x_0 , và chọn ra hai điểm x_2 và x_4 trên L_2 khác với x_0 . Theo điều kiện 1) nên ta có thể dễ dàng thử lại được rằng bộ 4 điểm $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ thỏa mãn điều kiện (3).

Ngược lại, giả sử Δ thỏa mãn các điều kiện 1), 2) và 3). Đầu tiên ta sẽ chỉ ra rằng hai đường thẳng bất kì chứa cùng một số lượng các điểm; để thực hiện điều này ta sẽ chọn ra hai đường thẳng và tiến hành xây dựng một song ánh giữa chúng.

Cho trước hai đường thẳng L và L' , tồn tại một điểm $x_0 \notin L \cup L'$. Sự tồn tại này được suy ra từ việc tồn tại bộ $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ thỏa mãn điều kiện (3) như sau:

Đặt $L \cap L' = \{y\}$. Nếu $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \not\subset L \cup L'$ thì ta có thể chọn điểm $x_0 \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Nếu

$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset L \cup L'$ thì từ điều kiện (3) kéo theo $y \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $x_1, x_2 \in L \setminus L'$ và $x_3, x_4 \in L' \setminus L$. Gọi L_1 là đường thẳng đi qua x_1 và x_3 , L_2 là đường thẳng đi qua x_2 và x_4 tồn tại theo điều kiện (1). Đặt $\{x_0\} = L_1 \cap L_2$. Theo điều kiện (2) ta suy ra $x_0 \notin L \cup L'$.

Bây giờ ta tiến hành xây dựng ánh xạ $\gamma: L \rightarrow L'$ như sau:

Nếu $x \in L$, ta gọi L_x là đường thẳng đi qua x và x_0 (tồn tại duy nhất theo điều kiện 2) và ta đặt $\gamma(x)$ là giao điểm của L_x và L' (tồn tại duy nhất theo điều kiện 1). Theo điều kiện (2) ta suy ra γ là một đơn ánh,

bởi vì chỉ có duy nhất một đường thẳng đi qua x_0 và $\gamma(x)$. Do đó $|L| \leq |L'|$. Dấu bằng xảy ra do tính chất đối xứng của bài toán.

Do đó, mỗi đường thẳng chứa chính xác $k \geq 2$ điểm. Bây giờ ta giả sử rằng $k = 2$. Ta suy ngay ra điều vô lí, bởi $x_1, x_3 \in L_1$; $x_2, x_4 \in L_2$ và $L_1 \cap L_2 = \{x_0\}$, và điều kiện (3) suy ra $x_0 \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Điều đó suy ra rằng $k \geq 3$ và số các điểm $v \geq 4$. Do $x_2, x_4 \notin L_1$ nên ta có thể thấy rằng $k \leq v - 2$ hay $k < v - 1$. Suy ra Δ là một $(v, k, 1)$ - cấu hình. Sử dụng kết quả 3) ta suy ra Δ là một mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn.

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [2]. Ioan Tomescu, Problem in Combinatorics and Graph theory.
- [3]. Đặng Văn Thuận, Nguyễn Thị Thảo Trúc, Bài giảng : Hình học xạ ảnh, Đại học Cần Thơ
- [4]. Trương Phước Nhân, Bài toán girth cho đồ thị, 22/07/2017
- [5]. Trương Phước Nhân, Design, 22/07/2017
- [6]. Trương Phước Nhân, Tối ưu đồ thị - phần II, 17/07/2017
- [7]. Trương Phước Nhân, Các bài toán về tập hợp, 12/07/2017