Mặt phẳng affine

Trương Phước Nhân, 02/02/2018

Một *mặt phẳng affine* $AG(2,q)$ bậc q là một $(q^2,q,1)$- design. Sử dụng hệ thức quen thuộc của lý thuyết design $r(k-1)=\lambda(v-1)$ ta suy ra mỗi điểm của mặt phẳng này nằm trong chính xác đường thẳng, sử dụng hệ thức $bk=vr$ ta tính được là sẽ có $b=\frac{vr}{k}=q^2+q$ đường thẳng tất cả (xem bài viết **"Design"** và **"BIBD"**) . Do đó, một mặt phẳng affine có bậc q có q^2 điểm và thỏa :

1) Mọi đường thẳng đều chứa chính xác q điểm
2) Hai điểm bất kì nằm trên chính xác một đường thẳng
3) Mỗi điểm nằm trên chính xác $q+1$ đường thẳng
4) Có tất cả q^2+q đường thẳng

Ở đây, lưu ý rằng khác với mặt phẳng xạ ảnh ta có thể khái niệm về sự "song song", nghĩa là các đường thẳng có thể không giao nhau.

Sau đây ta sẽ trình bày hai mô hình quan trọng của mặt phẳng affine :

Mô hình 1: Một mặt phẳng affine có thể thu được từ một mặt phẳng xạ ảnh bằng cách xóa đi một đường thẳng bất kì của nó. Gỉa sử $(X,\mathcal{L})$ là một mặt phẳng xạ ảnh bậc q. Cố định một đường thẳng $L_0\in\mathcal{L}$ và xét design $(X',\mathcal{L}')$trong đó $X'=X\setminus L_0$ và $\mathcal{L}'=\{L\setminus L_0 : L\in\mathcal{L}, L\neq L_0\}$. Ta có thể dễ dàng kiểm tra lại được rằng cấu hình $(X',\mathcal{L}')$ thu được bằng cách này là một mặt phẳng affine bậc q. Đường thẳng L_0 được gọi là *đường thẳng vô tận* . Với mỗi đường thẳng $L'\in\mathcal{L}'$ của mặt phẳng affine có duy nhất một điểm $x\in L_0$ sao cho $L'\cup\{x\}\in\mathcal{L}$; điểm được xác định như trên được gọi là điểm vô tận của đường thẳng L'.

Mô hình 2: Cho q là một số nguyên tố, và xét tập tất cả các điểm $X=\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$. Đặt $\mathcal{D}$ là họ tất cả các tập có dạng như sau : $L(a,b):=\{(x,y)\in X : y=ax+b\}$ và $L(c):=\{(c,y) : y\in\mathbb{F}_q\}$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{F}_q$.

Ta sẽ chứng minh rằng $(X,\mathcal{D})$ là một $(q^2,q,1)$- design .

Thật vậy, có q^2 điểm và mỗi khối chứa chính xác q điểm. Do vậy ta chỉ cần chỉ ra rằng với mọi cặp điểm $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$ được chứa trong duy nhất một khối. Nếu $x_1=x_2$ thì khối duy nhất chứa hai điểm này là $L(x_1)$. Nếu $x_1\neq x_2$ thì hệ phương trình $y_1=ax_1+b$, $y_2=ax_2+b$ có duy nhất một nghiệm (a,b) và do đó khối duy nhất chứa hai điểm này chính là $L(a,b)$.

Tài liệu tham khảo :

[1]. Stasys Jukna , Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science,Second Edition.
[2]. Đặng Văn Thuận, Nguyễn Thị Thảo Trúc, Bài giảng : Hình học Aphin & Euclide, Đại học Cần Thơ
[3]. Đặng Văn Thuận, Nguyễn Thị Thảo Trúc, Bài giảng : Hình học xạ ảnh, Đại học Cần Thơ
[4]. Trương Phước Nhân, BIBD, 02/02/2018
[5]. Trương Phước Nhân, Bài toán girth cho đồ thị, 22/07/2017
[6]. Trương Phước Nhân, Design, 22/07/2017
[7]. Trương Phước Nhân, Tối ưu đồ thị - phần II, 17/07/2017
[8]. Trương Phước Nhân, Các bài toán về tập hợp, 12/07/2017