

Bài toán đếm trên cây

Trương Phước Nhân, 02/01/2018

Bài toán 1: Giả sử cho trước các đỉnh $v_1, \dots, v_n$ và các số nguyên dương $d_1, \dots, d_n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2, d_i \geq 1. \text{ Khi đó số cây có tập đỉnh } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ sao cho đỉnh } v_i \text{ có bậc } d_i \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{)} \text{ là}$$

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!}$$

Chứng minh: Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Với $n=1, 2$ khẳng định là hiển nhiên.

Do $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2 < 2n$, nên ta luôn tìm được một chỉ số i sao cho $d_i = 1$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $d_n = 1$. Ta thực hiện xóa đỉnh v_n . Ta nhận thấy rằng đỉnh v_n sẽ được nối với một đỉnh v_j với $1 \leq j \leq n-1$ nào đó và khi ta thực hiện xóa đỉnh v_n thì cây thu được có tập đỉnh là $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ với các bậc tương ứng là $d_1, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$. Ngược lại, nếu cho trước một cây có tập đỉnh là $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ với dãy bậc là $d_1, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$ thì bằng cách nối đỉnh v_j với đỉnh v_n ta sẽ thu được một cây trên $\{v_1, \dots, v_n\}$ với dãy bậc tương ứng là $d_1, \dots, d_n$. Theo giả thiết quy nạp, số cây trên $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ có dãy bậc $d_1, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$ là

$$\frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{j-1}-1)! (d_j-2)! (d_{j+1}-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} = \frac{(d_j-1)(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{j-1}-1)! (d_j-1)! (d_{j+1}-1)! \dots (d_{n-1}-1)!}$$

Do đó, số cây trên $\{v_1, \dots, v_n\}$ có dãy bậc tương ứng $d_1, \dots, d_n$ là

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(d_j-1)(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} = \left(\sum_{j=1}^{n-1} (d_j-1) \right) \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} = (n-2) \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!}$$

Bài toán 2: Kí hiệu T_n là số cây trên $\{v_1, \dots, v_n\}$. Khi đó: $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k}$

Chứng minh: Nếu T là một cây trên $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ và $e \in E(T)$ thì $T - e$ chứa hai cây phân biệt T', T'' và chúng phủ V . Bằng cách này ta thu được $(n-1)T_n$ cặp (T', T'') . Giả sử T', T'' là hai cây phân biệt và chúng phủ V ; đặt $|V(T')| = k, |V(T'')| = n - k$. Khi đó ta có $k(n-k)$ cách để bổ sung thêm một cạnh nối T' với T'' để thu được một cây trên V . Do đó từ một cặp (T', T'') này sinh ra $k(n-k)$ cây T . Số các cặp (T', T'')

thỏa mãn như vậy là $\binom{n-1}{k-1} T_k T_{n-k}$.

$$\text{Do đó: } (n-1)T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} T_k T_{n-k} k(n-k)$$

$$\Rightarrow T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k} \quad \left(\text{do } \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n-k} \binom{n-2}{k-1} \right)$$

Bài toán 3: (Công thức Cayley) Số cây có n đỉnh đúng bằng n^{n-2}

Chứng minh thứ nhất: Theo kết quả của bài toán 1, ta suy ra số cây có n chính là

$$\sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_n = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_n = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1! \dots k_n!} = \left(\underbrace{1 + \dots + 1}_n \right)^n$$

Chứng minh thứ hai : Bằng cách đặt $t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} x^n$.

Sử dụng hệ thức truy hồi thu được trong bài toán 2), ta có :

$$\frac{T_n}{(n-2)!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{kT_k}{(k-1)!} \frac{T_{n-k}}{(n-k-1)!}$$

$$\text{Do đó ta suy ra : } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{T_n}{(n-2)!} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{kT_k}{(k-1)!} \frac{T_{n-k}}{(n-k-1)!} \right) x^{n-2}$$

Vế phải của hệ thức trên là tích Cauchy của hai chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kT_k}{(k-1)!} x^{k-1}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k}{(k-1)!} x^{k-1}$, nên ta có thể viết

$$\text{lại hệ thức trên dưới dạng } \left(\frac{t(x)}{x} \right)' = t'(x) \frac{t(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{t(x)}{x} \right)'}{\frac{t(x)}{x}} = t'(x)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{t(x)}{x} = t(x) + C$$

$$\Rightarrow \frac{t(x)}{x} = C' t(x)$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu của $t(x)$ ta thu được : $x = t(x)e^{-t(x)}$

Sử dụng công thức tích phân Cauchy ta suy ra :

$$T_n = \frac{t^{(n)}(0)}{n} = \frac{(n-1)!}{2\pi i n} \oint_C \frac{t'(z)}{z^n} dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i n} \oint_C \frac{t'(z)}{(t(z)e^{-t(z)})^n} dz$$

trong đó chu tuyến lấy tích phân C là đường tròn đủ nhỏ bao quanh gốc tọa độ.

Do $t'(0) = 1 \neq 0$, áp dụng lý thuyết hàm phức ta suy ra $t(C)$ là một đường cong đơn đóng bao quanh 0, nên

$$T_n = \frac{(n-1)!}{2\pi i n} \oint_{t(C)} \frac{dw}{(we^{-w})^n} = \frac{(n-1)!}{2\pi i n} \oint_{t(C)} \frac{e^{wn} dw}{w^n}$$

Nhận thấy rằng $\frac{1}{2\pi i} \oint_{t(C)} \frac{e^{wn} dw}{w^n}$ chính là hệ số của số hạng x^{n-1} trong khai triển chuỗi $e^{xn} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xn)^k}{k!}$ nên

bằng với $\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$. Do đó ta suy ra $T_n = \frac{(n-1)!}{n} \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-2}$

Tài liệu tham khảo :

[1]. Lovasz, Combinatorial problems and exercises, 2nd Edition.