

Chứng minh định lý Sperner bằng công cụ đại số tuyến tính

Trương Phước Nhân, Cần thơ, 22/08/2017

Trong bài viết “**Định lý Dilworth và ứng dụng**” ta đã đề cập đến khái niệm poset, trong bài viết này ta sẽ sử dụng mô hình đại số Boole và một vài kiến thức về đại số tuyến tính để chứng minh lại định lý Sperner vốn là một kết quả nổi tiếng trong lý thuyết tối ưu tập hợp (xem lại bài viết “**Định lý Sperner**” và “**Định lý Hall – König**”)

Đầu tiên, ta cần biết về khái niệm về đại số Boole. Cho trước một n -phần tử S , họ tất cả các tập con của S được gọi là đại số Boole có hạng n và được kí hiệu là B_S , nếu $S = \{1, 2, \dots, n\}$ thì ta kí hiệu là B_n . Ta xét quan hệ $\leq$ theo nghĩa bao hàm trên đại số Boole B_n , có nghĩa là $x \leq y$ nếu và chỉ nếu $x \subseteq y$ trong đó $x, y \in B_n$.

Tiếp theo, ta bổ sung thêm một số khái niệm về poset liên quan đến các phân tích mà ta sẽ làm trong bài viết này. Một xích hữu hạn có chiều dài là n nếu nó có $n+1$ phần tử, nói cách khác là khi xích này có dạng $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Một poset được gọi là xếp hạng n nếu như mọi xích cực đại đều có độ dài n . Hiển nhiên, đại số Boole B_n là xếp hạng n . Phần tử $x \in P$ được gọi là có hạng j , kí hiệu là $\rho(x) = j$, nếu một xích bất kì xuất phát từ x , nghĩa là với mọi xích có dạng $x = x_0 < x_1 < \dots < x_i$, có độ dài tối đa là j .

Nếu ta đặt $P_j = \{x \in P : \rho(x) = j\}$, gọi là cấp thứ j của P , thì ta thu được hợp phân biệt sau $P = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n$. Dễ dàng chứng minh được rằng : mọi xích cực đại của poset P đều có dạng $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ trong đó $\rho(x_j) = j$. Kí hiệu $p_i = |P_i|$ là số các phần tử của tập P_i .

(Trường hợp riêng, khi $P = B_n$ thì $\rho(x) = |x|$ (số phần tử của tập x) và $p_i = \left| \{x \in P : |x| = i\} \right| = \binom{n}{i}$)

Giả sử poset P hạng n có p_i phần tử có hạng i . Xét hàm sinh $F(P, q) = \sum_{i=0}^n p_i q^i = \sum_{x \in P} q^{\rho(x)}$.

(Trường hợp riêng, ta dễ dàng chứng minh được $F(B_n, q) = (1+q)^n$)

Một poset P hạng n được gọi là đối xứng hạng nếu $p_i = p_{n-i}$ với mọi $0 \leq i \leq n$; unimoda hạng nếu $p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_j \geq p_{j+1} \geq p_{j+2} \geq \dots \geq p_n$ với một $0 \leq j \leq n$. Nếu một poset đối xứng và unimodal thì ta có $p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_m \geq p_{m+1} \geq p_{m+2} \geq \dots \geq p_n$ nếu $n = 2m$; $p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_m = p_{m+1} \geq \dots \geq p_n$ nếu $n = 2m+1$.

(Trường hợp riêng, dãy $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ là đối xứng và unimodal nên $F(B_n, q) = (1+q)^n$ là đối xứng và unimodal)

Từ cách ta định nghĩa ta nhận thấy rằng P_j là một đối xích trong poset P .

Một poset P được gọi là poset Sperner hoặc có tính chất Sperner nếu không có đối xích nào có kích thước lớn hơn kích thước của cấp P_i lớn nhất, hay nói cách khác

$$\max\{|A| : A \text{ là đối xích của } P\} = \max\{|P_i| : 0 \leq i \leq n\}$$

Nhận thấy rằng khẳng định của định lý Sperner tương đương với việc đại số Boole B_n là poset Sperner.

Bây giờ ta sẽ xác định một điều kiện tổ hợp đơn giản để một poset P là Sperner. Ta gọi một ghép cặp thứ tự từ P_i vào P_{i+1} là một đơn ánh $\mu : P_i \rightarrow P_{i+1}$ thỏa mãn $x < \mu(x)$ với mọi $x \in P_i$. Hiển nhiên nếu tồn tại một ghép cặp thứ tự thì $p_i \leq p_{i+1}$, bởi vì μ là một đơn ánh. Lưu ý rằng điều ngược lại của khẳng định trên là sai, có nghĩa là nếu $p_i \leq p_{i+1}$ thì không đảm bảo tồn tại một ghép cặp thứ tự từ P_i vào P_{i+1}

(xây dựng phản ví dụ). Tương tự ta cũng định nghĩa một ghép cặp thứ tự từ P_i vào P_{i-1} thỏa mãn $\mu(x) < x$ với mọi $x \in P_i$.

Kết quả 1 : Cho P là một poset có hạng n . Giả sử tồn tại một chỉ số j ($0 \leq j \leq n$) và các ghép cặp thứ tự sao cho $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_j \leftarrow P_{j+1} \leftarrow P_{j+2} \leftarrow \dots \leftarrow P_n$ thì P là unimodal và Sperner.

Chứng minh : Do một ghép cặp thứ tự là một đơn ánh nên hiển nhiên $p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_j \geq p_{j+1} \geq \dots \geq p_n$. Do đó P là unimodal.

Ta chứng minh P là Sperner bằng phương pháp đồ thị :

Xây dựng một đồ thị G trên tập các phần tử của poset P sao cho hai đỉnh x, y được nối bởi một cạnh nếu có một ghép cặp thứ tự μ trong số các ghép cặp nêu trong giả thiết sao cho $\mu(x) = y$. Khi đó, G là hợp của một số đường đi phân biệt, bao gồm cả các đỉnh đơn. Các đỉnh cùng nằm trên một đường đi tạo thành một xích trong P . Do đó ta có một cách phân hoạch P thành các xích phân biệt.

Do P là unimodal hạng và có cấp tối đa P_j nên một xích bất kì luôn đi qua P_j . Do vậy số các xích trong phân hoạch này chính xác bằng p_j .

Một đối xích A bất kì có giao với mỗi xích tối đa một phần tử, nên lực lượng của đối xích A không vượt quá số các xích, $|A| \leq p_j$. Do đó P là Sperner.

Bây giờ ta sẽ bổ sung thêm các yếu tố đại số tuyến tính vào trong lý luận. Với một tập hữu hạn $S \subset P$, đặt $\mathbb{R}S$ là không gian vector thực bao gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính hình thức (với hệ số thực) của các phần tử của S . Khi đó hiển nhiên là S là một cơ sở của $\mathbb{R}S$.

Kết quả 2: Nếu có một toán tử tuyến tính $U: \mathbb{R}P_i \rightarrow \mathbb{R}P_{i+1}$ thỏa:

a) U là đơn ánh.

b) Với mọi $x \in P_i, U(x)$ là tổ hợp tuyến tính các phần tử $y \in P_{i+1}$ thỏa mãn $x < y$.

(ta gọi U là toán tử nâng

Khi đó có một ghép cặp thứ tự $\mu: P_i \rightarrow P_{i+1}$

Tương tự, giả sử tồn tại một toán tử tuyến tính $U: \mathbb{R}P_i \rightarrow \mathbb{R}P_{i+1}$ thỏa:

a) U là toàn ánh.

b) U là toán tử nâng

Khi đó có một ghép cặp thứ tự $\mu: P_i \rightarrow P_{i+1}$

Chứng minh: Giả sử $U: \mathbb{R}P_i \rightarrow \mathbb{R}P_{i+1}$ là một toán tử nâng và đơn ánh. Gọi $[U]$ là ma trận của toán tử U theo cơ sở P_i của $\mathbb{R}P_i$ và cơ sở P_{i+1} của $\mathbb{R}P_{i+1}$. Do đó các hàng của $[U]$ được đánh số bởi các phần tử $y_1, \dots, y_{p_{i+1}}$ của P_{i+1} , còn các cột được đánh số bởi các phần tử $x_1, \dots, x_{p_i}$ của P_i .

Do toán tử U là đơn ánh, hạng của ma trận $[U]$ bằng p_i (số các cột). Theo lý thuyết đại số tuyến tính, hạng của các hàng bằng với hạng của các cột, ma trận $[U]$ phải có p_i hàng độc lập tuyến tính. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử p_i hàng đầu tiên của $[U]$ độc lập tuyến tính.

Gọi $A = (a_{ij})$ là ma trận con cấp $p_i \times p_i$ của ma trận vuông $[U]$ tương ứng với p_i hàng đầu tiên của ma trận $[U]$. Do các hàng của A là độc lập tuyến tính nên $\det(A) = \sum_{\pi} \pm a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{p_i\pi(p_i)} \neq 0$, trong đó tổng được lấy trên tất cả các hoán vị π của $1, \dots, p_i$.

Do đó tồn tại một số hạng $\pm a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{p_i\pi(p_i)}$ trong tổng trên khác không.

Lưu ý rằng U là một toán tử nâng nên $y_k > x_{\pi(k)}$ với $1 \leq k \leq p_i$. Do đó ánh xạ $\mu: P_i \rightarrow P_{i+1}$ xác định bởi $\mu(x_k) = y_{\pi^{-1}(k)}$ là một ghép cặp thứ tự.

Bây giờ ta sẽ sử dụng các kết quả thu nhận được ở trên để chứng minh rằng đại số Boole B_n là Sperner.

Với $0 \leq i < n$, ta định nghĩa ánh xạ tuyến tính $U_i: \mathbb{R}(B_n)_i \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$ và chứng minh ánh xạ này thỏa các tính chất nêu trong mệnh đề như sau: với $x \in (B_n)_i$ ta đặt $U_i(x) = \sum_{\substack{y \in (B_n)_{i+1} \\ y > x}} y$. Do $(B_n)_i$ là một cơ sở của

$\mathbb{R}(B_n)_i$ nên hệ thức trên xác định cho ta duy nhất một ánh xạ tuyến tính $U_i: \mathbb{R}(B_n)_i \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$. Sử dụng

định nghĩa thì U_i là một toán tử nâng; ta cần chứng minh U_i là một đơn ánh với $i < \frac{n}{2}$ và là toàn ánh với

$i \geq \frac{n}{2}$. Ta xét toán tử đối ngẫu $D_i: \mathbb{R}(B_n)_{i+1} \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_i$ của toán tử U_i (ta gọi D_i là toán tử hạ), xác định

bởi $D_i(y) = \sum_{\substack{x \in (B_n)_{i-1} \\ x < y}} x$ với mọi $y \in (B_n)_i$.

Gọi $[U_i]$ là ma trận của U_i đối với các cơ sở $(B_n)_i$ và $(B_n)_{i+1}$; tương tự $[D_i]$ là ma trận của D_i đối với các cơ sở $(B_n)_i$ và $(B_n)_{i-1}$. Chìa khóa cho chứng minh của chúng ta nằm ở việc $[D_{i+1}] = [U_i]^T$, hay nói cách khác ma trận $[D_{i+1}]$ là ma trận chuyển vị của ma trận $[U_i]$. Gọi $I_i : \mathbb{R}(B_n)_i \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_i$ là toán tử đồng nhất trên $\mathbb{R}(B_n)_i$, có nghĩa là $I_i(u) = u$ với mọi $u \in \mathbb{R}(B_n)_i$.

Kết quả 3: Với $0 \leq i \leq n$ thì $D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = (n-2i)I_i$

Ta lưu ý một điều quan trọng là $U_n = 0$ và $D_0 = 0$.

Chứng minh: Với $x \in (B_n)_i$. Ta cần chỉ ra rằng nếu ta áp dụng toán tử nêu trong vế trái vào x thì ta sẽ thu được $(n-2i)x$.

$$\text{Thật vậy, } D_{i+1}U_i(x) = D_{i+1} \left(\sum_{\substack{|y|=i+1 \\ x \subset y}} y \right) = \sum_{\substack{|y|=i+1 \\ x \subset y}} \sum_{\substack{|z|=i \\ z \subset y}} z$$

Nếu $x, z \in (B_n)_i$ thỏa $|x \cap z| < i-1$ thì không tồn tại $y \in (B_n)_{i+1}$ sao cho $x \subset y$ và $z \subset y$. Do đó hệ số của z trong $D_{i+1}U_i(x)$ khi ta khai triển nó thành các số hạng của cơ sở $(B_n)_i$ là bằng 0. Nếu $|x \cap z| = i-1$ thì có một y thỏa, $y = x \cup z$. Sau cùng, nếu $x = z$ thì y ta có thể chọn là một phần tử bất kì thuộc $(B_n)_{i+1}$ có chứa x , có $n-i$ phần tử y như vậy tất cả.

$$\text{Điều đó suy ra rằng } D_{i+1}U_i(x) = (n-i)x + \sum_{\substack{|z|=i \\ |x \cap z|=i-1}} z$$

$$\text{Bằng tính toán tương tự ta cũng thu được : } U_{i-1}D_i(x) = ix + \sum_{\substack{|z|=i \\ |x \cap z|=i-1}} z.$$

$$\text{Do đó : } (D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i)x = (n-2i)x$$

Kết quả 4: Toán tử U_i là 1-1 nếu $i < \frac{n}{2}$ và là toàn ánh nếu $i \geq \frac{n}{2}$

Chứng minh: Nhắc lại rằng $[D_i] = [U_{i-1}]^T$. Theo lý thuyết đại số tuyến tính ta nhận ra rằng ma trận AA^T nửa xác định dương và do đó có các giá trị riêng không âm.

Sử dụng kết quả 3) ta suy ra $D_{i+1}U_i = U_{i-1}D_i + (n-2i)I_i$

Do đó các giá trị riêng của $D_{i+1}U_i$ có thể thu được từ các giá trị riêng của $U_{i-1}D_i$ bằng cách cộng thêm $n-2i$. Trong khi ta đã giả thiết rằng $n-2i > 0$, điều đó suy ra rằng các giá trị riêng của $D_{i+1}U_i$ là lớn hơn 0 thật sự. do đó $D_{i+1}U_i$ là khả nghịch (bởi vì không có giá trị riêng nào bằng 0). Nhưng điều này có nghĩa là U_i là một đơn ánh.

Trong trường hợp $i \geq \frac{n}{2}$ thì bằng cách sử dụng lập luận đối ngẫu ta có :

$$U_i D_{i+1} = D_{i+2} U_{i+1} + (2i+2-n) I_{i+1}$$

Ta thu được $U_i D_{i+1}$ là khả nghịch nên U_i là một toàn ánh.

Chứng minh của định lý Sperner thu được từ việc kết hợp các kết quả 1), 2), 4).

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Richard Stanley, Topic in Algebraic Combinatoric, ??/02/2013
- [2]. Trương Phước Nhân, Định lý Hall – Định lý Konig, 24/07/2017
- [3]. Trương Phước Nhân, Định lý Sperner, 02/08/2017