

Công thức tính số derangement

Trương Phước Nhân, 21/09/2017

Một hoán vị $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ được gọi là derangement khi và chỉ khi $\pi(i) \neq i, \forall i$.

Bài toán: Số các derangement $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bằng $n! \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$

Chứng minh : Gọi X là tập tất cả các hoán vị của tập $\{1, 2, \dots, n\}$, có tất cả $n!$ hoán vị.

Đặt A_i là tập tất cả các hoán vị $\pi \in X$ nhận i làm điểm bất động, nghĩa là $A_i = \{\pi \in X \mid \pi(i) = i\}$. Bằng phương pháp đếm cơ bản ta suy ra được rằng $|A_i| = (n-1)!$, lưu ý rằng $\pi(i) = i$ nên $\pi(1), \dots, \pi(i-1), \pi(i+1), \dots, \pi(n)$ là một hoán vị của tập $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$.

Lập luận tương tự ta suy ra rằng $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (n-|I|)!$, lưu ý rằng $\bigcap_{i \in I} A_i$ là tập tất cả các hoán vị π có tập các điểm cố định là I .

Mặt khác, theo các ta định nghĩa các tập A_i thì $X / \bigcup_{i=1}^n A_i$ là tập tất cả các derangement của tập $\{1, 2, \dots, n\}$.

Sử dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ ta suy ra rằng :

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} \\ \Rightarrow \left| X / \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= |X| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Bài giảng của Jacob Fox – Math 307 : Combinatorics
- [2]. Trương Phước Nhân, Nguyên lý bao hàm – loại trừ, 28/08/2017
- [3]. Trương Phước Nhân, Công thức tính số các toàn ánh, 20/09/2017