

Cấu hình đối xứng

Trương Phước Nhân, 06/02/2018

Một (v, k, λ) - design được gọi là đối xứng nếu $b = v$, hay nói cách khác ma trận liên thuộc của nó là ma trận vuông. Đối với một design đối xứng, ta quan tâm đến đại lượng $n = k - \lambda$, nếu $n = 1$ thì design đối xứng được gọi là *tầm thường*.

Hiển nhiên, điều kiện $b = v$ là tương đương với $k = r$ (xem lại các bài viết “**BIBD**” và “**Lý thuyết cấu hình tổ hợp**”). Do $k < v$ và $\lambda(v-1) = k(k-1)$ (xem lại bài viết “**BIBD**”) nên ta suy ra $\lambda < k$, hay nói cách khác $n = k - \lambda \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $k = v - 1$ và bởi vì $b = v$ nên design gồm tất cả các $(v-1)$ - tập con của S .

Như vậy ta chỉ quan tâm đến các design đối xứng không tầm thường, $k \leq v - 2$.

Kết quả 1: Nếu $\mathcal{D}$ là một (v, k, λ) - design thì phần bù $\overline{\mathcal{D}}$ được định nghĩa bởi $\overline{\mathcal{D}} = \{S \setminus B \mid B \in \mathcal{D}\}$ là một $(v, v - k, b - 2r + \lambda)$ - design với điều kiện là $b - 2r + \lambda > 0$.

Chứng minh: Hiển nhiên mỗi khối của $\overline{\mathcal{D}}$ có $v - k$ phần tử. Hơn nữa, một cặp (x, y) , $x, y \in S$, $x \neq y$, được chứa trong $S \setminus B$ khi và chỉ khi B không chứa x và cũng không chứa y . Bằng nguyên lý bao hàm – loại trừ ta có thể tính ra được là số các khối thuộc $\mathcal{D}$ không chứa x và cũng không chứa y là bằng $b - 2r + \lambda$.

Kết quả 2: Nếu A là ma trận liên thuộc của một (v, k, λ) - design đối xứng thì $AA^T = A^T A$.

Chứng minh:

Ý tưởng cốt lõi của phép chứng minh này dựa trên việc một ma trận khả nghịch giao hoán với ma trận nghịch đảo của chính nó.

Để dàng nhận thấy: $AJ = JA = kJ$, $A^T J = JA^T = kJ$ và $J^2 = vJ$.

Bằng cách phép tính đại số ta thu được:

$$\left(A^T - \sqrt{\frac{\lambda}{v}}J\right)\left(A + \sqrt{\frac{\lambda}{v}}J\right) = A^T A + \sqrt{\frac{\lambda}{v}}(A^T J - JA) - \frac{\lambda}{v}J^2 = A^T A - \lambda J = (k - \lambda)I$$

(Chú ý hệ thức: $AA^T = (r - \lambda)I + \lambda J$ và $k = r$)

Đẳng thức trên suy ra rằng $\frac{1}{k - \lambda}\left(A + \sqrt{\frac{\lambda}{v}}J\right)$ là ma trận khả nghịch của ma trận $\left(A^T - \sqrt{\frac{\lambda}{v}}J\right)$, do đó ta có

$$\text{thể viết lại: } \left(A + \sqrt{\frac{\lambda}{v}}J\right)\left(A^T - \sqrt{\frac{\lambda}{v}}J\right) = (k - \lambda)I$$

$$\Rightarrow AA^T + \sqrt{\frac{\lambda}{v}}(AJ - JA^T) - \frac{\lambda}{v}J^2 = (k - \lambda)I$$

$$\Rightarrow AA^T - \lambda J = (k - \lambda)I$$

$$\Rightarrow AA^T = (k - \lambda)I + \lambda J$$

Từ đây ta suy ra: $AA^T = (k - \lambda)I + \lambda J = A^T A$

Kết quả 3: Nếu $\mathcal{D}$ là một (v, k, λ) - design đối xứng không tầm thường thì $v - 2r + \lambda$, và phần bù $\overline{\mathcal{D}}$ là một $(v, \bar{k}, \bar{\lambda}) = (v, v - k, v - 2k + \lambda)$. Hơn nữa, $\bar{n} = \bar{k} - \bar{\lambda} = k - \lambda = n$.

Chứng minh: Theo lập luận phân tích dẫn nhập thì $k \leq v - 2$. Gọi B là một khối bất kì của $\mathcal{D}$ và $\{x, y\} \subseteq S \setminus B$, $x \neq y$. Theo chứng minh của kết quả 2, $v - 2k + \lambda$ là số các khối của $\mathcal{D}$ không chứa x và cũng không chứa y nên dương. Kết quả được suy ra từ kết quả 2).

Kết quả 4: Nếu tồn tại một (v, k, λ) - design đối xứng không tầm thường thì $4n-1 \leq v \leq n^2 + n + 1$

Chứng minh :

Sử dụng lại lời kí hiệu trong kết quả 3) ta suy ra $\lambda + \bar{\lambda} = v - 2n$ và

$$\lambda \bar{\lambda} = \lambda(v - 2k + \lambda) = \lambda(v - 1) + \lambda - 2\lambda k + \lambda^2 = k(k - 1) + \lambda - 2\lambda k + \lambda^2 = (k - \lambda)^2 - (k - \lambda) = n(n - 1)$$

Đối với các số thực x, y bất kì ta có đánh giá $(x + y)^2 \geq 4xy$, áp dụng đánh giá trên cho $x = \lambda$ và $y = \bar{\lambda}$, ta thu được kết quả $(v - 2n)^2 \geq 4n(n - 1) > (2n - 2)^2$ bởi vì $n \geq 2$, và do vậy $(v - 2n)^2 \geq (2n - 1)^2$.

$$\text{Hiển nhiên } v - 2n = \lambda + \bar{\lambda} > 0 \text{ nên } v - 2n \geq 2n - 1 \\ \Rightarrow v \geq 4n - 1$$

$$\text{Bởi vì } \lambda \geq 1 \text{ và } \bar{\lambda} \geq 1, (\lambda - 1)(\bar{\lambda} - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda \bar{\lambda} - (\lambda + \bar{\lambda}) + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow n(n - 1) - (v - 2n) + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow n^2 + n + 1 \geq v$$

Kết hợp hai đánh giá trên ta thu được kết quả cần chứng minh : $4n - 1 \leq v \leq n^2 + n + 1$

Ta tiến hành xem xét các trường hợp cực trị (trường hợp xảy ra dấu bằng trong các đánh giá) :

Kết quả 5: Nếu $\mathcal{D}$ là một (v, k, λ) - design đối xứng không tầm thường với $v = n^2 + n + 1$ thì $\mathcal{D}$ hoặc $\bar{\mathcal{D}}$ là một $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ - design.

Chứng minh : Từ chứng minh của kết quả 4) ta suy ra là $v = n^2 + n + 1$ kéo theo $\lambda = 1$ hoặc $\bar{\lambda} = 1$. Nếu $\lambda = 1$ thì $k = n + \lambda = n + 1$ và do đó $\mathcal{D}$ là một $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ - design. Nếu $\bar{\lambda} = 1$ thì $\bar{k} = \bar{n} + \bar{\lambda} = n + 1$ (xem lại kết quả 3) nên $\bar{\mathcal{D}}$ là một $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ - design.

Một $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ - design sẽ được gọi là một *mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn bậc n* (xem lại các bài viết “**BIBD**”, “**Lý thuyết cấu hình tổ hợp**”)

Kết quả 6: Nếu $\mathcal{D}$ là một (v, k, λ) - design đối xứng không tầm thường với $v = 4n - 1$ thì $\mathcal{D}$ hoặc $\bar{\mathcal{D}}$ là một $(4n - 1, 2n - 1, n - 1)$ - design.

Chứng minh: Từ chứng minh của kết quả 4) ta nhận thấy $\lambda \bar{\lambda} = n(n - 1)$ và $\lambda + \bar{\lambda} = v - 2n = 2n - 1$. Do vậy λ và $\bar{\lambda}$ là các nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - (2n - 1)x + n(n - 1) = 0$, do đó chúng là n hoặc $n - 1$.

Nếu $\lambda = n - 1$ thì $k = n + \lambda = 2n - 1$ và $\mathcal{D}$ là một $(4n - 1, 2n - 1, n - 1)$ - design

Nếu $\bar{\lambda} = n - 1$ thì $\bar{k} = \bar{n} + \bar{\lambda} = n + \bar{\lambda} = 2n - 1$ và $\bar{\mathcal{D}}$ là một $(4n - 1, 2n - 1, n - 1)$ - design

Một $(4n - 1, 2n - 1, n - 1)$ - design được gọi là một *Hadamard design bậc n* .

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Ian Anderson, A short Course in Combinatorial Designs, ??/??/2012
- [3]. Trương Phước Nhân, BIBD, 02/02/2018
- [4]. Trương Phước Nhân, Design, 22/07/2017