

Tiếp cận định lý Erdos – Ko – Rado bằng kỹ thuật shifting

Trương Phước Nhân, 09/02/2018

Cho X là một tập hữu hạn. Một họ $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ được gọi là *giao* nếu $F \cap F' \neq \emptyset$ với mọi $F, F' \in \mathcal{F}$.

Kết quả 1: Nếu $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ là một họ giao thì $|\mathcal{F}| \leq 2^{|X|-1}$

Chứng minh: Đặt $n = |X|$. Xét 2^{n-1} cặp $\{A, \bar{A}\}$, trong đó $A \in 2^X$. Theo định nghĩa của họ giao, $\mathcal{F}$ chỉ có thể chứa nhiều nhất là một tập trong mỗi cặp như vậy. Nói tóm lại, $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. (xem lại bài viết “**Tối ưu tập hợp – phần I**”, “**Định lý Erdos – Ko – Rado**”)

Với một tập hữu hạn X , một họ $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ và hai phần tử phân biệt $x, y \in X$, ta xây dựng toán tử shifting của họ $\mathcal{F}$ như sau:

$$S_{x,y}(\mathcal{F}) = \{S_{x,y}(F) : F \in \mathcal{F}\}, \text{ trong đó } S_{x,y}(F) = \begin{cases} F' = (F \setminus \{y\}) \cup \{x\} & \text{ nếu } y \in F, x \notin F \\ F & \text{ trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Nếu $x \in F$ và $y \notin F$ thì ta nói rằng $S_{x,y}$ shift tập F hay là tập F bị shift bởi $S_{x,y}$.

Kết quả 2: i) $|S_{x,y}(F)| = |F|$

ii) $|S_{x,y}(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$

iii) Nếu $\mathcal{F}$ là một họ giao thì $S_{x,y}(\mathcal{F})$

Chứng minh: Các tính chất i) và ii) được suy ra dễ dàng từ cách xây dựng.

Để chứng minh tính chất iii), cho F và F' là hai tập phân biệt thuộc họ $\mathcal{F}$. Nếu cả hai tập F và F' đều được shift bởi $S_{x,y}$ hoặc đều không được shift bởi $S_{x,y}$ thì ta có thể dễ dàng nhận thấy được rằng

$S_{x,y}(F) \cap S_{x,y}(F') \neq \emptyset$. Bây giờ công việc của ta là xem xét trường hợp F bị shift nhưng F' thì không, trường hợp còn lại thu được qua tính đối xứng của bài toán, ta chứng minh rằng trong trường hợp này ta cũng sẽ có $S_{x,y}(F) \cap S_{x,y}(F') \neq \emptyset$. Giả sử phản chứng khẳng định này.

Do $(F \cap F') \setminus (S_{x,y}(F) \cap S_{x,y}(F')) \subseteq \{y\}$ nên ta chỉ có thể có $S_{x,y}(F) \cap S_{x,y}(F') = \emptyset$ khi $F \cap F' = \{y\}$.

Do F bị shift suy ra ta phải có $x \notin F$ và $x \in S_{x,y}(F) = (F \setminus \{y\}) \cup \{x\}$. Nhưng do F' không bị shift nên $x \in F'$ suy ra $x \in S_{x,y}(F') = F'$, khi đó ta lại nhận được $\{x\} \subseteq S_{x,y}(F) \cap S_{x,y}(F')$, mâu thuẫn giả thiết phản chứng.

Kết quả 3: Giả sử X là một tập hữu hạn gồm n phần tử thỏa $n \geq 2k$.

Nếu $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ là một họ giao thì $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

Chứng minh: Nếu $n = 2k$ thì bằng cách ghép cặp một tập với phần bù của nó và sử dụng lại lời lập luận của kết quả 1) ta dễ dàng suy ra rằng $|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2} \binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}$. Do đó, không mất tính tổng quát của bài toán ta có thể giả thiết rằng $n \geq 2k+1$ và xét $X = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp kết hợp với kỹ thuật shifting, với các trường hợp tầm thường thì việc kiểm tra trực tiếp khẳng định của bài toán là dễ dàng.

Với mỗi chỉ số $i = 1, 2, \dots, n$, ta xây dựng dãy các họ tập như sau : $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ và $\mathcal{F}_i = S_{i,n}(\mathcal{F}_{i-1})$. Sử dụng kết quả 2) ta suy ra rằng $|\mathcal{F}_{n-1}| = |\mathcal{F}|$ và $\mathcal{F}_{n-1}$ là một họ giao.

Đặt $\mathcal{G} = \{F \in \mathcal{F}_{n-1} : n \notin F\}$ và $\mathcal{H} = \{F \setminus \{n\} : n \in F \in \mathcal{F}\}$. Hiển nhiên $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}| + |\mathcal{H}|$, áp dụng giả thiết quy

nap cho họ $\mathcal{G}$ ta được $|\mathcal{G}| \leq \binom{n-2}{k-1}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{H}$ là một họ giao.

Thật vậy, nếu $\mathcal{H}$ không phải là một họ giao thì ta có thể tìm được $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ sao cho $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

Do $|H_1 \cup H_2| \leq 2(k-1) < n-1$ nên tồn tại một phần tử $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sao cho $i \notin H_1 \cup H_2$. Ta xem xét tập $F = H_1 \cup \{n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Do $n \in F$ nên $F \in \mathcal{F}$, kết quả là $F \in \mathcal{F}_j$ với mọi $1 \leq j \leq n-1$. Điều đó có nghĩa là

$S_{i,n}(F) = F$, hay nói cách khác F không thay đổi qua phép toán $S_{i,n}$, sự kiện này xảy ra nếu như $H_1 \cup \{i\} = (F \setminus \{n\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}_{i-1}$. Lập luận tương tự ta cũng suy ra được rằng $H_2 \cup \{i\} \in \mathcal{F}_{i-1}$. Nhưng khi đó ta lại có $(H_1 \cup \{i\}) \cap (H_2 \cup \{i\}) = \emptyset$, mâu thuẫn với việc $\mathcal{F}_{i-1}$ là một họ giao.

Áp dụng giả thiết quy nạp cho họ $\mathcal{H}$ ta có đánh giá : $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}| + |\mathcal{H}| \leq \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1}$.

Tài liệu tham khảo :

- [1]. P.Frankl, R.L. Graham, Old and New Proofs of Erdos – Ko – Rado Theorem, ??/??/??
- [2]. Trương Phước Nhân, Định lý Erdos - Ko –Rado, 03/02/2018