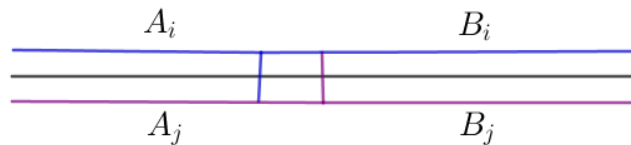


Tiếp cận theo phương pháp đếm của Lubell cho định lý Bollobas

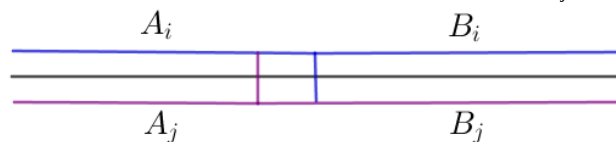
Trương Phước Nhân, 18/02/2018

Định lý Bollobas: Cho $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ là các tập con của một tập n - phần tử S sao cho $A_i \cap B_j = \emptyset$ khi và chỉ khi $i = j$. Đặt $a_i = |A_i|$ và $b_i = |B_i|$. Khi đó :
$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{a_i + b_i}{a_i}} \leq 1$$

Chứng minh: Ta xét một hoán vị bất kì trong $n!$ hoán vị của các phần tử của S , và ta nói một hoán vị π chứa B theo sau A nếu tất cả các phần tử của tập A xuất hiện trong hoán vị π đứng trước tất cả các phần tử của tập B . Nhận xét : nếu một hoán vị π chứa B_i theo sau A_i và đồng thời cũng chứa B_j theo sau A_j thì ta phải có $A_i \cap B_j = \emptyset$ (nếu A_i kết thúc trước khi B_j bắt đầu) hoặc $A_j \cap B_i = \emptyset$ (nếu A_j kết thúc sau khi B_j bắt đầu), nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết $A_i \cap B_j = \emptyset$ khi và chỉ khi $i = j$.



Hình vẽ minh họa A_i kết thúc trước khi B_j bắt đầu



Hình vẽ minh họa A_i kết thúc sau khi B_j bắt đầu

Do đó, với mỗi hoán vị π , có nhiều nhất một chỉ số i sao cho hoán vị π chứa B_i theo sau A_i .

Tuy nhiên, cho trước một chỉ số i , số các hoán vị chứa B_i theo sau A_i được xác định như sau:

Chọn $a_i + b_i$ vị trí để điền các phần tử của A_i và B_i ; có $\binom{n}{a_i + b_i}$ cách để thực hiện. Sắp xếp a_i phần tử của

A_i vào các vị trí đầu tiên trong số $a_i + b_i$ vị trí vừa chọn và sắp xếp tiếp b_i phần tử của B_i vào b_i vị trí đứng sau; có $a_i!b_i!$ cách để thực hiện. Sau cùng ta sắp xếp $n - a_i - b_i$ phần tử còn lại của tập S vào $n - a_i - b_i$ vị trí còn lại của hoán vị π ; có tất cả $(n - a_i - b_i)!$ cách để thực hiện điều này. Do đó, số các hoán vị π chứa

$$B_i \text{ theo sau } A_i \text{ là } \binom{n}{a_i + b_i} a_i! b_i! (n - a_i - b_i)! = \frac{n!}{\binom{a_i + b_i}{a_i}}.$$

Từ hai phân tích vừa nêu, bằng lấy tổng theo các chỉ số $i = 1, \dots, m$, trên ta suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{n!}{\binom{a_i + b_i}{a_i}} &\leq n! \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{a_i + b_i}{a_i}} &\leq 1 \end{aligned}$$

Lưu ý: Bằng cách chọn $B_i = \overline{A_i}$ là phần bù của tập A_i , khi đó điều $A_i \cap B_i = \emptyset$ trở thành $A_i \cap \overline{A_i} = \emptyset$ (hiển nhiên đúng), còn điều kiện $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ trở thành $A_i \cap \overline{A_j} \neq \emptyset$, hay $A_i \not\subseteq B_j$; và khi đó

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{a_i + b_i}{a_i}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{n}{a_i}} = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{\binom{n}{k}}, \text{ trong đó } p_k \text{ là số các tập con } k \text{ phần tử của họ } A_1, \dots, A_m. \text{ Do đó, ta thu lại}$$

được bất đẳng thức Lubell – Yamamoto – Meshanlkin.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Ian Anderson, Combinatorics of Finite sets, First Edition
- [2]. Trương Phước Nhân, Tối ưu tập hợp, 17/07/2017
- [3]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết cực trị tập hợp, 10/02/2018
- [4]. Trương Phước Nhân, Chứng minh định lý Bollobas bằng đại số tuyến tính, 09/08/2017