Ghép cặp - Số Whitney

Trương Phước Nhân, 20/02/2018

Ta nhắc lại một số khái niệm quan trọng về poset (partially ordered set) :

Một poset $P=(S,\le)$ là một tập S trên đó có trang bị một quan hệ thứ tự $\le$ thỏa mãn

i) $x\le x$ với mọi $x\in S$

ii) Nếu $x\le y$ và $y\le x$ thì $x=y$

iii) Nếu $x\le y$ và $y\le z$ thì $x\le z$

Ta nói rằng x và y là *so sánh được* nếu $x\le y$ hoặc $y\le x$. Nếu $x\le y$ và $x\ne y$ ta viết $x<y$. Nếu $x<y$ và không tồn tại một phần tử z nào mà $x<z<y$ thì ta nói rằng y *phủ* x. Nếu tồn tại duy nhất một phần tử z thuộc S sao cho $z\le x$ với mọi $x\in S$, ta nói rằng z là *phần tử không* của poset và kí hiệu là 0. Một phần tử x có tính chất không có bất kì phần tử y nào sao cho $y<x$ được gọi là *phần tử nhỏ nhất*, và một phần tử x có tính chất không có bất kì phần tử y nào sao cho $x<y$ được gọi là *phần tử lớn nhất*.

Nếu $x_1<x_2<\ldots<x_n$ thì ta nói rằng $x_1,x_2,\ldots,x_n$ có dạng một *xích*. Một xích $x_1<x_2<\ldots<x_n$ được gọi là *bão hòa* nếu x_{i+1} phủ x_i với mọi $i<n$. Một số poset có tính chất, với $x<y$ bất kì, tất cả các xích bão hòa bắt đầu tại x và kết thúc tại y đều có cùng số phần tử, giá trị này không phụ thuộc vào x và y. Trường hợp đặc biệt, tất cả các xích bão hòa bắt đầu tại 0 và kết thúc tại x cũng sẽ có cùng kích thước. Nếu ta định nghĩa *chiều dài* của một xích bằng số phần tử của xích trừ đi 1 thì khi đó ta định nghĩa hạng $r(x)$ của một phần tử x bằng với chiều dài của một xích bão hòa bất kì bắt đầu tại 0 và kết thúc tại x.

Tương ứng với một poset P và hàm hạng r ta tiến hành định nghĩa các *số Whitney* $N_0,N_1,\ldots$ như sau

$$N_i = \text{số các phần tử của } P \text{ có hạng } i$$

Không giống như *xích bão hòa*, một xích gọi là *cực đại* nếu xích này chứa một phần tử của mỗi hạng của poset. Hiển nhiên từ định nghĩa trên ta suy ra ngay rằng mỗi xích cực đại đều là xích bão hòa nhưng chiều ngược lại thì không đúng.

Sau cùng ta sẽ gọi một họ các phần tử của một poset P là một *đối xích* nếu nhưng hai phần tử bất kì của nó đều không so sánh được.

<u>Kết quả 1:</u> (Kleitman) Cho P là một poset với hàm hạng và các số Whitney N_i. Khi đó các khẳng định sau tương đương nhau:

(1) P có *tính chất LYM*, có nghĩa là nếu $\mathcal{A}$ là một đối xích của poset P với p_i thành viên có hạng i thì ta có đánh giá $\sum_i \frac{p_i}{N_i}\le 1$.

(2) P có *tính chất ghép cặp*, có nghĩa nếu $\mathcal{B}$ là một tập gồm các thành viên của poset P có hạng k và nếu $\nabla\mathcal{B}$, shade của $\mathcal{B}$, là tập các phần tử của P có hạng $k+1$ so sánh được với ít nhất một thành viên của $\mathcal{B}$ thì ta có đánh giá $\frac{|\nabla\mathcal{B}|}{N_{k+1}}\ge\frac{|\mathcal{B}|}{N_k}$.

(3) Có một *phủ đều* của poset P bởi các xích, có nghĩa là tồn tại một họ không rỗng $\mathcal{C}$ gồm các xích cực đại của P sao cho với mỗi k thì mọi phần tử có hạng k xuất hiện với cùng một số lần trong các xích của họ $\mathcal{C}$

<u>Chứng minh:</u>

$(1)\Rightarrow(2)$ Gỉa sử P có tính chất LYM, và đặt $\mathcal{B}$ là một tập các phần tử của P có hạng k. Gọi $\mathcal{D}$ là tập tất cả các phần tử của P có hạng $k+1$, ngoại trừ các phần tử của $\nabla\mathcal{B}$. Khi đó $\mathcal{B}\cup\mathcal{D}$ là một đối xích, và bất đẳng thức LYM cho ta $\frac{|\mathcal{B}|}{N_k}+\frac{N_{k+1}-|\nabla\mathcal{B}|}{N_{k+1}}\le 1$, hay $\frac{|\mathcal{B}|}{N_k}\le\frac{|\nabla\mathcal{B}|}{N_{k+1}}$

$(2)\Rightarrow(3)$ Gỉa sử P có tính chất ghép cặp. Ta xây dựng một poset mới P' như sau. Với mỗi j, ta lấy ra $\prod_{i\ne j}N_i$ bản sao của mỗi phần tử của P có hạng j, và ta cho bản sao của x trong P' là nhỏ hơn mỗi bản sao của y nếu như ta có $x<y$ trong P. Khi đó poset P' có $\prod_i N_i$ phần tử của mỗi hạng.

Bây giờ ta xét r phần tử bất kì của P' có hạng k. Chúng phát sinh từ ít nhất $\frac{r}{\prod_{i\neq k} N_i}$ phần tử phân biệt có hạng k trong P, sử dụng tính chất ghép cặp của P, thì các phần tử này so sánh được với ít nhất

$$\frac{N_{k+1}}{N_k}\frac{r}{\prod_{i\neq k} N_i} = \frac{r}{\prod_{i\neq k+1} N_i}$$

phần tử có hạng $k+1$ trong P. Như vậy r phần tử của P' có hạng k so sánh được với ít nhất r phần tử của P' có hạng $k+1$. Bằng cách sử dụng định lý Hall ta suy ra các phần tử của P' có hạng k có thể được ghép cặp theo quan hệ so sánh với các phần tử phân biệt có hạng $k+1$. Bằng cách lặp lại quá trình ghép cặp mà ta vừa trình bày với mỗi cấp hạng và sau đó ta ghép nối các phép ghép cặp lại, ta thu được một họ $\prod_i N_i$ xích cực đại sao cho mỗi phần tử của P có hạng k xuất hiện chính xác $\prod_{i\neq k} N_i$.

$(3)\Rightarrow(1)$ Gọi $\mathcal{C}$ là họ các xích cực đại có dạng một phủ đều của poset P, nên mỗi phần tử có hạng k xuất hiện chính xác $\frac{|\mathcal{C}|}{N_k}$ xích của họ $\mathcal{C}$. Nếu $\mathcal{A}$ là một đối xích với p_k phần tử có hạng k thì p_k phần tử này cùng xuất hiện trong $\frac{p_k}{N_k}|\mathcal{C}|$ xích. Chú ý rằng do $\mathcal{A}$ là một đối xích nên các xích ta vừa nêu trong các phần tích trên đều phân biệt nhau , khi ta lặp lại quá trình lý luận trên cho mỗi giá trị k ta sẽ suy ra được rằng

$$\sum_k \frac{p_k}{N_k}|\mathcal{C}| \le |\mathcal{C}|$$

$$\Rightarrow \sum_k \frac{p_k}{N_k} \le 1$$

<u>Kết quả 2:</u> (Kleitman) Cho P là một poset với hàm hạng r với tính chất LYM, và gọi $\mathcal{C}$ là một phủ đều nào đó của poset P. Khi đó, λ là một hàm giá trị thực được định nghĩa trên tập các phần tử của P và R là một tập con bất kì của P, $\sum_{x\in R}\frac{\lambda(x)}{N_{r(x)}} \le \max_{C\in\mathcal{C}} \sum_{x\in C\cap R}\lambda(x)$.

<u>Chứng minh:</u> Với một xích $C\in\mathcal{C}$ ta xét $f(C)=\sum_{x\in C\cap R}\lambda(x)$. Khi đó :

$\sum_{C\in\mathcal{C}} f(C) = \sum_{C\in\mathcal{C}}\sum_{x\in C\cap R}\lambda(x) = \sum_{x\in R}\lambda(x)\sum_{C:x\in C} 1 = \sum_{x\in R}\lambda(x)\frac{|\mathcal{C}|}{N_{r(x)}}$, bởi vì mỗi một trong $N_{r(x)}$ phần tử của P có hạng $r(x)$ xuất hiện với cùng một số lần trong số $|\mathcal{C}|$ xích. Do đó giá trị trung bình của $f(C)$ lấy trên tất cả các xích C của $\mathcal{C}$ bằng $\sum_{x\in R}\frac{\lambda(x)}{N_{r(x)}}$. Theo nguyên lý trung bình ta suy ra giá trị lớn nhất của $f(C)$ phải lớn hơn giá trị này.

Bằng cách đặt $\lambda(x)=N_{r(x)}$ và sử dụng kết quả 2) ta suy ra ngay kết quả sau

<u>Kết quả 3:</u> $|R| \le \max_{C\in\mathcal{C}} \sum_{x\in C\cap R} N_{r(x)}$

Bây giờ ta xét trường hợp đặc biệt khi P là họ các tập con của một tập S có n phần tử và R là một họ các tập con của S sao cho không có bất kì $k+1$ tập con nào lập thành một xích. Khi đó, nếu $\mathcal{C}$ là một phủ đều của poset P và nếu $C\in\mathcal{C}$ thì $C\cap R$ có thể chứa tối đa k tập ; nên biểu thức $\sum_{x\in C\cap R} N_{r(x)}$ tối đa là bằng k hệ số nhị thức lớn nhất. Như vậy thu được một dạng mở rộng của định lý Sperncer như sau, trong trường hợp $k=1$ ta thu lại được định lý Sperncer kinh điển:

<u>Kết quả 4:</u> (Erdos) Nếu $\mathcal{A}$ là một họ các tập con của một n - tập sao cho không có bất kì $k+1$ thành viên nào của họ $\mathcal{A}$ lập thành một xích. Khi đó : $|\mathcal{A}| \le \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{\left[\frac{n+i}{2}\right]}$

Nếu R là một đối xích trong poset P thì mỗi $C \cap R$ chỉ chứa tối đa một phần tử và do đó giá trị $|R|$ không thể lớn hơn các số Whitney lớn nhất.

Một poset P xếp hạng được gọi là có *tính chất Sperner* nếu kích thước của đối xích lớn nhất trong P bằng với số Whitney lớn nhất.

Từ các phân tích trên ta nhận được kết quả sau đây:

Kết quả 5: Nếu poset P có bất kì một trong ba tính chất nào được liệt kê trong kết quả 1) thì P có tính chất Sperncer.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Ian Anderson, Combinatorics of Finite sets, First Edition

[2]. Trương Phước Nhân, Tối ưu tập hợp, 17/07/2017

[3]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết cực trị tập hợp, 10/02/2018

[4]. Trương Phước Nhân, Chứng minh định lý Sperncer bằng công cụ đại số tuyến tính, 22/08/2017

[5]. Trương Phước Nhân, Định lý Sperncer, 02/08/2017

[6]. Trương Phước Nhân, Dạng mở rộng định lý Sperncer của Griggs, 20/02/2018