

Ứng dụng đại số tuyến tính trong một số bài toán về hoán vị

Trương Phước Nhân, 08/03/2018

Kết quả 1: Cho $n \geq 3$ và kí hiệu A_n, B_n lần lượt là tập các hoán vị chẵn và hoán vị lẻ của tập $\{1, 2, \dots, n\}$.

$$\text{Khi đó: } \sum_{\sigma \in A_n} \sum_{i=1}^n |i - \sigma(i)| = \sum_{\sigma \in B_n} \sum_{i=1}^n |i - \sigma(i)|$$

Chứng minh bổ đề:

Ta biểu diễn lại hiệu $\sum_{\sigma \in A_n} \sum_{i=1}^n |i - \sigma(i)| - \sum_{\sigma \in B_n} \sum_{i=1}^n |i - \sigma(i)|$ dưới dạng $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sum_{i=1}^n |i - \sigma(i)|$, trong đó ta kí hiệu

$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, \sigma \in A_n \\ -1, \sigma \in B_n \end{cases}$ và $S_n = A_n \cup B_n$ là tập các hoán vị của tập $\{1, 2, \dots, n\}$. Ta nhớ lại công thức Leibniz

trong đại số tuyến tính $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ và bằng cách xét ma trận $A = (x^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq n}$ với x

là một số thực bất kì, ta có :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x^{|1-\sigma(1)|} \dots x^{|n-\sigma(n)|} = \sum_{\sigma \in A_n} x^{\sum_{i=1}^n |i-\sigma(i)|} - \sum_{\sigma \in B_n} x^{\sum_{i=1}^n |i-\sigma(i)|}$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^2 & x & 1 & \dots & x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in A_n} x^{\sum_{i=1}^n |i-\sigma(i)|} - \sum_{\sigma \in B_n} x^{\sum_{i=1}^n |i-\sigma(i)|}$$

Ta nhận thấy rằng đa thức $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^2 & x & 1 & \dots & x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$ chia hết cho $(x-1)^2$, thật vậy bằng cách trừ hàng thứ

nhất cho hàng thứ hai, hàng thứ hai cho hàng thứ ba và rút thừa số chung $(x-1)$ ở mỗi hàng này ta nhận được ngay kết quả trên. Khi đó, đạo hàm của đa thức này là một đa thức chia hết cho $(x-1)$. Bằng cách lấy đạo hàm đa thức vừa xét và thay $x=1$ thì vế trái đồng nhất bằng không còn vế phải trở thành

$$\sum_{\sigma \in A_n} \sum_{i=1}^n |i - \sigma(i)| - \sum_{\sigma \in B_n} \sum_{i=1}^n |i - \sigma(i)|$$

Trong bài viết "**Công thức tính số derangement**" ta đã có đề cập đến việc xác lập công thức tính cho số các hoán vị không có điểm bất động nào – derangement. Mọi chuyện sẽ như thế nào nếu như ta bổ sung thêm điều kiện hoán vị đó phải là một hoán vị chẵn thì với cách lập luận cũ ta không tài nào xác định được giá trị này, nhưng bằng cách vận dụng các kiến thức đại số tuyến tính một cách thích hợp ta sẽ thấy vấn đề trở nên thật sáng tỏ và đơn giản.

$$\text{Kết quả 2: Số các derangement chẵn là } \frac{1}{2} \left[n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \right) + (-1)^{n-1} (n-1) \right]$$

Chứng minh:

Đặt C_n và D_n là tập các derangement chẵn và derangement lẻ của tập $\{1, 2, \dots, n\}$, bằng cách sử dụng nguyên

lý bao hàm – loại trừ ta tìm được $|C_n| + |D_n| = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$.

Do đó, nếu ta xác định được thêm hiệu $|C_n| - |D_n|$ thì việc chỉ ra khẳng định của bài toán trở nên dễ dàng.

$$|C_n| - |D_n| = \sum_{\substack{\sigma \in A_n \\ \sigma(i) \neq i}} 1 - \sum_{\substack{\sigma \in B_n \\ \sigma(i) \neq i}} 1$$

Bằng cách suy nghĩ tương tự như khi chứng minh kết quả 1, để tính biểu thức trên ta liên tưởng đến việc tính định thức của ma trận $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, trong đó $t_{ij} = \begin{cases} 1, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases}$, và khi đó :

$$|C_n| - |D_n| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Việc tính định thức vừa nêu không khó lắm, thật vậy bằng cách cộng tất cả các cột vào cột đầu tiên và đặt thừa số chung $(n-1)$, sau đó trừ đi cột đầu đối với mỗi cột còn lại.

Kết quả ta nhận được $|C_n| - |D_n| = (-1)^{n-1} (n-1)$. Sau cùng không mấy khó khăn ta tính ra được :

$$|C_n| = \frac{1}{2} \left[n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) + (-1)^{n-1} (n-1) \right]$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, Problems from the books, Second Edition
- [2]. Trương Phước Nhân, Công thức tính số derangement, 21/09/2017