

Công thức tính số toàn ánh

Trương Phước Nhân, 20/09/2017

Bài toán : Số các toàn ánh $f : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bằng $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$

Chứng minh :

Ta thực hiện đồng nhất mỗi ánh xạ $f : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ với dãy $(f(1), f(2), \dots, f(m))$. Bằng phép đếm cơ bản ta dễ dàng nhận thấy rằng có tất cả n^m ánh xạ từ $\{1, 2, \dots, m\}$ vào $\{1, 2, \dots, n\}$.

Đặt A_i là tập tất cả các ánh xạ không nhận giá trị i , điều đó có nghĩa là

$$A_i = \{f : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \mid f(j) \neq i, \forall j\}$$

Suy ra $|A_i| = (n-1)^m$, do ta có $n-1$ cách chọn cho mỗi $f(1), f(2), \dots, f(m)$.

Bằng phương pháp tương tự ta suy ra được : $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (n-|I|)^m$, do mỗi vị trí $f(1), f(2), \dots, f(m)$ có $n-|I|$ cách chọn.

Theo cách ta định nghĩa các tập A_i thì $\bigcup_{i=1}^n A_i$ là tập tất cả các ánh xạ $f : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ không phải là toàn ánh

Sử dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ ta suy ra rằng

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} (n-|I|)^m = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^m$$

Từ đây ta suy ra số các toàn ánh bằng

$$n^m - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = n^m + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

Tài liệu tham khảo :

[1]. Bài giảng của Jacob Fox – Math 307 : Combinatorics

[2]. Trương Phước Nhân, Nguyên lý bao hàm – loại trừ, 28/08/2017