

Bài 1: (4 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A ?

b) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên ?

2. Cho $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2}} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}$. Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{4(x+1)x^{2018} - 2x^{2017} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}$

Bài 2: (4 điểm)

1. Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3}$$

2. Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \neq 0$. Tính giá trị biểu thức: $P = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$

Bài 3: (4 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^2}{4}} + \sqrt{x^2 - 4} = 8 - x^2$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 \\ 2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(y+1) - y = 0 \end{cases}$$

Bài 4: (5 điểm)

1. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao CK. Gọi H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Gọi S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH. Chứng minh rằng $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

2. Từ một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AB với B là tiếp điểm. Cắt tuyến ACD với C, D thuộc đường tròn (O) và C nằm giữa A và D sao cho tia AO nằm giữa hai tia AB và AC. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt AB tại E. Từ E vẽ đường vuông góc với OA tại F. Chứng minh rằng đường thẳng CF luôn đi qua một điểm cố định khi cát tuyến ACD di động.

Bài 5: (3 điểm)

1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$.

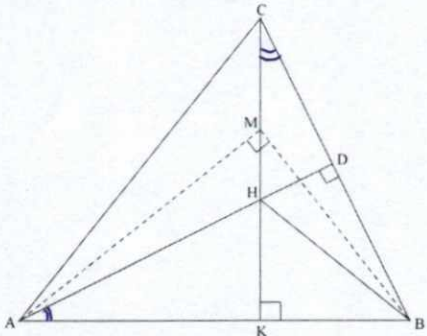
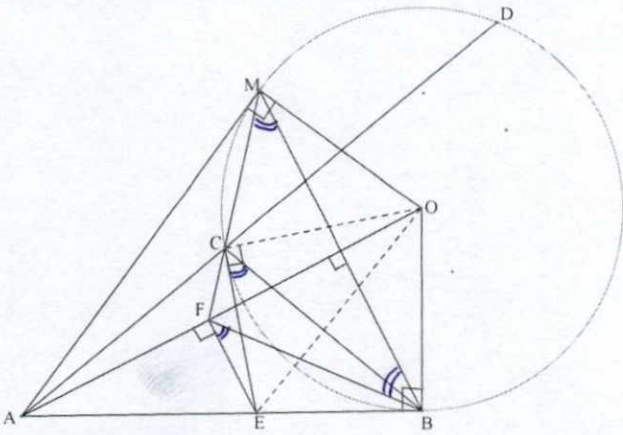
2. Cho a, b, c là độ dài của 3 cạnh một tam giác. Hãy giải phương trình bậc hai sau đây:
 $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN VÀ GỢI Ý ĐÁP ÁN CHẤM THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN
MÔN TOÁN LỚP 9 - NĂM HỌC: 2017 – 2018

Bài	Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
Bài 1	1 (2đ)	a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \frac{4}{3} \end{cases}$	0,25đ
		$A = \left[\frac{6x+4-3x+2\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right] \left[\frac{(\sqrt{3x}+1)(3x-\sqrt{3x}+1)}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right]$	0,25đ
		$= \frac{3x+2\sqrt{3x}+4}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \cdot (3x-\sqrt{3x}+1-\sqrt{3x})$	0,25đ
		$= \frac{3x-2\sqrt{3x}+1}{\sqrt{3x}-2}$	0,25đ
		b) Ta có: $A = \frac{3x-2\sqrt{3x}+1}{\sqrt{3x}-2} = \frac{3x-3}{\sqrt{3x}-2} - 2$	0,25đ
		* Nếu $3x=3 \Leftrightarrow x=1$ thì $A=-2$ (nhận)	0,25đ
		* Nếu $x \neq 1$ và $3x$ không là số chính phương thì $\sqrt{3x}$ là số vô tỷ. Suy ra A là số vô tỷ (loại)	0,25đ
		* Nếu $x \neq 1$ và $3x$ là số chính phương thì $\sqrt{3x}$ là số nguyên nên để A có giá trị nguyên thì $3x-3$ chia hết cho $\sqrt{3x}-2$ hay $(\sqrt{3x}-2)(\sqrt{3x}+2)+1$ chia hết cho $\sqrt{3x}-2$	
		$\Rightarrow 1$ chia hết cho $\sqrt{3x}-2 \Rightarrow \sqrt{3x}-2 \in \{-1;1\}$	0,25đ
		$\Rightarrow \sqrt{3x} \in \{1;3\} \Rightarrow 3x \in \{1;9\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{1}{3}; 3 \right\}$	
		Vì x là số nguyên và so với ĐKXĐ ta được $x=3$ Vậy $x=1$ hoặc $x=3$ thì biểu thức A nhận giá trị nguyên	0,25đ
	2 (2đ)	Ta có: $x = \frac{2\sqrt{3}+2-3(2\sqrt{3}-2)}{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)} = \frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{8} =$	0,25đ
		$= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{4} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0,25đ
		$\Rightarrow 2x = \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{3}$	0,25đ
		$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow 4x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1=0$	0,25đ
		Ta có: $B = \frac{4x^{2019}+4x^{2018}-2x^{2017}+2x+1}{2x^2+3x} = \frac{2x^{2017}(2x^2+2x-1)+2x+1}{(2x^2+2x-1)+x+1} =$	0,25đ
		$= \frac{2x^{2017}(2x^2+2x-1)+2x+1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{2}{2x+2}$	0,25đ
		Thay $2x = \sqrt{3}-1$ vào ta được: $B = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}-1+2} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}+1} =$	0,25đ
		$= 2 - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = 2 - \sqrt{3} + 1 = 3 - \sqrt{3}$	0,25đ
Bài 1	1	Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $a^2+2b^2+3 = (a^2+b^2) + (b^2+1) + 2 \geq 2ab+2b+2$	0,25đ

Bài	Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
2	(2đ)	$\Rightarrow \frac{1}{a^2+2b^2+3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab+b+1}$	0,25đ
		Tương tự: $\frac{1}{b^2+2c^2+3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{bc+c+1}$	0,25đ
		$\frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ca+a+1}$	0,25đ
		$\Rightarrow M \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{abc+bc+c} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{bc}{abc^2+abc+bc} \right)$	0,25đ
		$= \frac{1}{2} \left(\frac{c}{bc+c+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{bc}{bc+c+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c+1+bc}{bc+c+1} \right) = \frac{1}{2}$	0,25đ
		Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$	0,25đ
		Vậy $\text{Max } M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$	0,25đ
	2 (2đ)	Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + z^3 - 3xyz - 3x^2y - 3xy^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z) = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow (x+y+z) \left[(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \right] = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow (x+y+z) \left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \right] = 0$	0,25đ
Bài 3	1 (2đ)	Vi: $x^3 + y^3 + z^3 \neq 0 \Rightarrow x + y + z \neq 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$	0,25đ
		Hay $x - y = y - z = z - x = 0 \Leftrightarrow x = y = z$	0,25đ
		Do đó: $P = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = 2.2.2 = 8$	0,25đ
		Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$	0,25đ
		Đặt: $t = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow x^2 = t^2 + 4 \ (t \geq 0)$	0,25đ
	2 (2đ)	Phương trình trở thành: $\sqrt{\frac{t^2+4}{4}} + t = 8 - (t^2+4) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{t^2+4t+4}{4}} = 4 - t^2$	0,25đ
		$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{t+2}{2}\right)^2} = 4 - t^2 \Leftrightarrow t - 2 = 8 - 2t^2$	0,25đ
		$\Leftrightarrow 2t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \text{ (nhận)} \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$	0,25đ
		Với $t = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4 = \frac{9}{4}$	0,25đ
		$\Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{2} \text{ (nhận)}$	0,25đ
	2 (2đ)	$\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 & (1) \\ 2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(y+1) - y = 0 & (2) \end{cases}$	0,25đ

Bài	Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
		Điều kiện: $x \geq 0$ Từ pt(1) ta có: $(x-y)(x+y^2) = 0$; Kết hợp với đk $x \geq 0$, ta suy ra $x = y$	
		Thay vào pt(2) ta được: $2x^2 - x + 2 = 3\sqrt{x}(x+1) \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 - 5x = 3\sqrt{x}(x+1)$ $\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 5x = 3\sqrt{x}(x+1)$	0,25đ
		Đặt: $u = x+1$ và $v = \sqrt{x}$, ta được: $2u^2 - 3uv - 5v^2 = 0$ $\Leftrightarrow 2u^2 + 2uv - 5uv - 5v^2 = 0 \Leftrightarrow 2u(u+v) - 5v(u+v) = 0 \Leftrightarrow (u+v)(2u-5v) = 0$	0,25đ
		Do: $u+v = x+1+\sqrt{x} > 0$; Suy ra: $2u-5v=0 \Rightarrow 2u=5v$	0,25đ
		$\Leftrightarrow 2(x+1) = 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0$	0,25đ
		Giải phương trình bậc hai với ẩn là $t = \sqrt{x} > 0$; $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2; t_2 = \frac{1}{2}$	0,25đ
		* $t_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (nhận) $\Rightarrow x = y = 4$	0,25đ
		* $t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (nhận) $\Rightarrow x = y = \frac{1}{4}$	0,25đ
		Thử lại ta thấy 2 cặp số $(4;4)$ và $(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$ thỏa mãn hệ phương trình.	0,25đ
		Vậy hệ có 2 nghiệm $(4;4)$ và $(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$	
Bài 4	1 (2đ)	 Tam giác AMB vuông tại M, có $MK \perp AB$, nên $MK^2 = AK.BK$ (1) $\Delta AHK \sim \Delta CBK$ vì có $\widehat{AKH} = \widehat{CKB} = 90^\circ$; $\widehat{KAH} = \widehat{KCB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) Suy ra: $\frac{AK}{CK} = \frac{HK}{BK}$, do đó: $AK.BK = CK.KH$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $MK^2 = CK.HK$, nên: $MK = \sqrt{CK.HK}$ $S_{AMB} = \frac{1}{2} AB.MK = \frac{1}{2} AB\sqrt{CK.HK} = \sqrt{\frac{1}{2} AB.CK} . \frac{1}{2} AB.HK = \sqrt{S_1.S_2}$ Vậy: $S = \sqrt{S_1.S_2}$	0,25đ 0,5đ 0,25đ 0,25đ 0,5đ 0,25đ
	2 (3đ)		

Bài	Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
		Vẽ AM là tiếp tuyến của đường tròn (O), với M là tiếp điểm khác điểm B. Ta có M cố định. Nối MC, MF, OB, OM, BM	0,25đ
		Vì OB = OM; AB = AM, nên OA là đường trung trực của BM.	0,25đ
		Mà F thuộc OA, nên FB = FM $\Rightarrow \triangle FBM$ cân tại F	0,25đ
		$\Rightarrow \widehat{BMF} = \widehat{MBF}$ (1)	0,25đ
		Vì BM $\perp$ OA, EF $\perp$ OA $\Rightarrow BM \parallel EF$	0,25đ
		$\Rightarrow \widehat{MBF} = \widehat{BFE}$ (2) (góc so le trong)	0,25đ
		Vì $\widehat{OBE} = \widehat{OCE} = \widehat{OFE} = 90^\circ$, nên B, C, F, O, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính OE	0,25đ
		$\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{BCE}$ (3) (gnt cùng chắn 1 cung trong đường tròn đường kính OE)	0,25đ
		Ta lại có: $\widehat{BCE} = \widehat{BMC}$ (4) (gnt cùng chắn cung $\widehat{BC}$)	0,25đ
		Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $\widehat{BMF} = \widehat{BMC}$	0,25đ
		Do đó hai tia MF và MC trùng nhau	0,25đ
		Vậy đường thẳng CF luôn đi qua điểm cố định M	0,25đ
Bài 5	1 (2đ)	Ta có: $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$ (1)	0,25đ
		Từ (1) suy ra $7(x + 2y)$ chia hết cho 5 hay $(x + 2y)$ chia hết cho 5	
		Đặt $x + 2y = 5t \Rightarrow x = 5t - 2y$ với $t \in \mathbb{Z}$	
		Từ (1) suy ra $x^2 + xy + y^2 = 7t$ (2)	0,25đ
		Thay x vào (2) ta được $(5t - 2y)^2 + (5t - 2y)y + y^2 = 7t$	
		$\Leftrightarrow 3y^2 - 15ty + 25t^2 - 7t = 0$ (*)	
		Để pt (*) có nghiệm thì: $\Delta = (-15t)^2 - 4.3.(25t^2 - 7t) \geq 0 \Leftrightarrow 84t - 75t^2 \geq 0$	0,25đ
		Hay $0 \leq t \leq \frac{28}{25}$ Vì $t \in \mathbb{Z}$ nên $t = 0$ và $t = 1$	
		* Với $t = 0 \Rightarrow y = 0$ và $x = 0$	0,25đ
		* Với $t = 1$; thay vào pt (*) ta được: $3y^2 - 45y + 18 = 0 \Rightarrow y_1 = 2$ và $y_2 = 3$	0,25đ
		+ Với $y = 2$ thì $x = 1$	0,25đ
		+ Với $y = 3$ thì $x = -1$	0,25đ
		Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x = 0 ; y = 0) ; (x = 1 ; y = 2) ; (x = -1 ; y = 3)$	0,25đ
	2 (1đ)	Ta có	
		$\Delta = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) =$	0,25đ
		$= [(a - b)^2 - c^2][(a + b)^2 - c^2] = (a - b - c)(a - b + c)(a + b + c)(a + b - c)$	
		Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác, nên ta có: $a + b + c > 0$	0,25đ
		Mặt khác: $a + b > c \Rightarrow a + b - c > 0$	
		Tương tự: $b + c > a \Rightarrow a - b - c < 0$ và $a + c > b \Rightarrow a - b + c > 0$	0,25đ
		Do đó $\Delta < 0$ Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.	0,25đ

Ghi chú: Học sinh có thể giải cách khác nếu đúng vẫn đạt tròn số điểm của từng phần, từng câu.