

[Đáp Án] Đề Thi Chọn Đội Tuyển Tỉnh Bắc Ninh Dự Thi Học Sinh Giỏi Quốc Gia THPT 2018-2019

1. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực

$$\begin{cases} \frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{2\sqrt{xy} + x + y}{2} \\ \log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2y - 11) = \log_{2+\sqrt{5}}(y^2 - 2x - 12) \end{cases}$$

2. Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} - \sqrt{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy (b_n) xác định bởi $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

3. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC .

a) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, AC ; B_1, C_1 lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC . Đường thẳng IK cắt B_1C_1 tại U , đường thẳng OH cắt IK tại V . Chứng minh rằng V là trực tâm tam giác AHU .

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AH , T là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) với đường thẳng BC , P là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng TM . Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng MP nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC . (Đường tròn Euler của tam giác ABC là đường tròn qua 9 điểm gồm trung điểm các cạnh, chân đường cao và trung điểm của các đoạn thẳng nối các đỉnh với trực tâm tam giác ABC .)

4. a) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + x^2) + xy + f^2(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Tìm đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn tính chất $P(2^n)$ chia hết cho n , với mọi số nguyên dương n .

5. Cho tam giác nhọn ABC , không cân, nội tiếp đường tròn w . Đường tròn w' thay đổi đi qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F ($E, F \neq A$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại đường tròn w tại K ($A \neq K$). KE, KF lần lượt cắt lại đường tròn w tại Q, P

$(P, Q \neq K)$. Gọi T là giao điểm của BQ và CP . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BF, CE .

a) Chứng minh rằng T thuộc một đường thẳng cố định khi đường tròn w' thay đổi.

b) Chứng minh rằng KA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

6. a) Với p là số nguyên tố, đặt $n = \frac{2^{2p} - 1}{3}$. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2^n - 2$ không chia hết cho n .

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm $(m; n)$ thỏa mãn phương trình

$$m^2 + (3 - 2^{n+1})m + 2(3^n - 2^n + 1) = 0.$$

7. a) Có 4 cặp vợ chồng được xếp ngồi trên một ghế dài. Biết rằng mỗi người vợ chỉ ngồi cạnh chồng mình hoặc ngồi cạnh một người phụ nữ khác. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi thỏa mãn.

b) Có n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$) cặp vợ chồng tham dự buổi dạ tiệc. Biết rằng mỗi người đều có thể trò chuyện với tất cả những người khác, trừ vợ hoặc chồng mình. Các cuộc trò chuyện lập thành các nhóm người $C_1, C_2, \dots, C_k$ với tính chất sau: Không có một cặp vợ chồng nào ở trong cùng một nhóm và hai người bất kì không phải vợ chồng thì đều có đúng một nhóm để họ trò chuyện. Chứng minh rằng $k \geq 2n$.

DOWNLOAD ĐÁP ÁN 