

Bài toán Sylvester – Gallai

Trương Phước Nhân, 14/08/2018

1. Phát biểu của bài toán Sylvester - Gallai

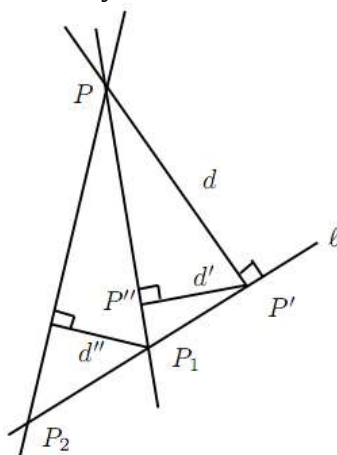
Năm 1893, nhà toán học người Anh James Joseph Sylvester (1814-1897) đã phát biểu bài toán sau đây mà mãi sau gần 40 năm sau mới tìm được lời giải lần đầu tiên bởi nhà toán học Tibor Gallai.

Bài toán 1. (Sylvester – Gallai) Cho $\mathcal{P}$ là tập gồm hữu hạn những điểm trên mặt phẳng sao cho tất cả những điểm này không cùng nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng đi qua đúng hai điểm trong số những điểm đã cho.

Cũng cần phải nói thêm rằng ngoài lời giải của Tibor Gallai ta cũng còn một số lời giải của một số tác giả khác như Erdős, Helly, Motzkin,...; trong đó lời giải của Helly là độc đáo nhất. Sau đây ta sẽ trình bày lại cách chứng minh của Helly.

Lời giải. (Helly) Ký hiệu $\mathcal{L}$ là tập hợp tất cả những đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm thuộc $\mathcal{P}$. Ta xem xét những khoảng cách từ tất cả các điểm của $\mathcal{P}$ đến tất cả những đường thẳng của $\mathcal{L}$ và ký hiệu khoảng cách nhỏ nhất trong tất cả những khoảng cách này là d .



Giả sử $P \in \mathcal{P}$ và $l \in \mathcal{L}$ là cặp điểm-đường thẳng sao cho có khoảng cách nhỏ nhất d . Lấy P' là chân đường vuông góc từ P đến l . Vì $l \in \mathcal{L}$, nên tồn tại ít nhất hai điểm P_1, P_2 thuộc $\mathcal{P}$ cùng nằm trên l . Một trong những điểm này phải khác P' , ta tạm giả sử đó là P_1 .

Đầu tiên ta sẽ chứng minh rằng $P' \notin \mathcal{P}$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng $P' \in \mathcal{P}$, đường thẳng PP_1 đi qua hai điểm P và P_1 thuộc $\mathcal{P}$ nên đường thẳng PP_1 thuộc $\mathcal{L}$. Ký hiệu chân đường vuông góc từ P' đến PP_1 là P'' và khoảng cách $P'P''$ từ P' đến PP_1 là d' .

Do tam giác $PP'P''$ vuông tại P'' nên ta có $d' = P'P'' < PP' = d$.

Như vậy, khoảng cách từ P' đến PP_1 nhỏ hơn khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $P' \in \mathcal{P}$ đến đường thẳng PP_1 thuộc $\mathcal{L}$, điều này mâu thuẫn với tính cực tiểu của cặp (P, l) .

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng trên đường thẳng l không thể chứa ba điểm phân biệt của tập $\mathcal{P}$.

Thật vậy, giả sử ngược lại thì khi đó l chứa ít nhất hai điểm của $\mathcal{P}$ nằm về cùng một phía của P' . Giả sử P_2 là một điểm của $\mathcal{P}$ nằm về cùng một phía đối với P' như P_1 .

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng P_1 nằm giữa P' và P_2 . Ký hiệu khoảng cách từ P_1 đến đường thẳng PP_2 bằng d'' .

Do $\sin P_1P_2P = \frac{d''}{P_2P_1} = \frac{d}{PP_2}$ và $P_2P_1 < P_2P' < PP_2$ nên ta suy ra $d'' < d$, điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của khoảng cách d .

Do đó, đường thẳng l chứa đúng hai điểm của $\mathcal{P}$ và đồng thời mỗi điểm nằm ở một bên của điểm P' .

2. Các dạng tổng quát hóa của bài toán Sylvester – Gallai

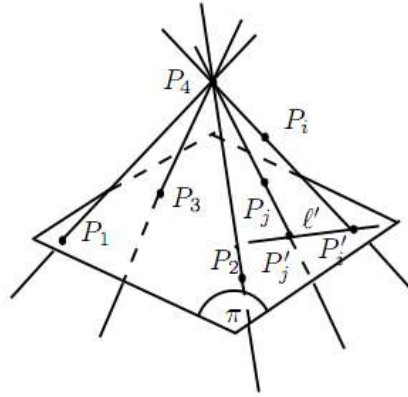
Kết quả sau là dạng tổng quát của bài toán Sylvester – Gallai cho các điểm và các mặt phẳng trong không gian ba chiều được đề xuất bởi Motzkin.

Bài toán 2. Cho $\mathcal{P}$ là tập hữu hạn gồm những điểm trong không gian sao cho tất cả các điểm này không cùng nằm trên một mặt phẳng.

- a) Chứng minh rằng tồn tại một mặt phẳng trong không gian sao cho những điểm thuộc $\mathcal{P}$ nằm trên mặt phẳng đó đều nằm trên không quá hai đường thẳng.
b) Chứng minh rằng trong trường hợp tổng quát không tồn tại một mặt phẳng trong không gian chứa đúng ba điểm không thẳng hàng thuộc $\mathcal{P}$.

Lời giải.

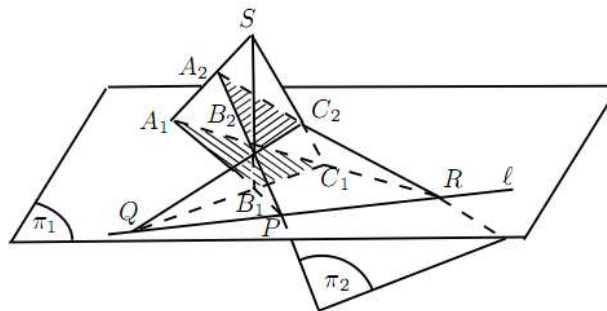
a) Do những điểm thuộc $\mathcal{P}$ không nằm trên một mặt phẳng, nên $\mathcal{P}$ phải chứa ít nhất bốn điểm P_1, P_2, P_3, P_4 không cùng nằm trên một mặt phẳng. Nói riêng, mọi bộ ba điểm trong số bốn điểm P_1, P_2, P_3, P_4 không cùng nằm trên một đường thẳng.



Gọi π là mặt phẳng đi qua ba điểm P_1, P_2, P_3 . Với mọi điểm $P \in \mathcal{P}$, khác P_4 , ký hiệu P' là giao điểm của đường thẳng P_4P với mặt phẳng π . Gọi $\mathcal{P}'$ là tập hợp tất cả những điểm P' . Tập hợp $\mathcal{P}'$ khác rỗng, vì nó chứa các điểm $P'_1 = P_1, P'_2 = P_2, P'_3 = P_3$. Hơn nữa, do P_1, P_2, P_3 không nằm trên một đường thẳng, nên tất cả những điểm thuộc $\mathcal{P}'$ không nằm trên cùng một đường thẳng.

Áp dụng kết quả của bài toán Sylvester-Gallai ta suy ra rằng tồn tại một đường thẳng l' trên π đi qua đúng hai điểm, ta tạm giả sử là hai điểm P'_i và P'_j thuộc $\mathcal{P}'$. Do đó, trong mặt phẳng đi qua P_4, P'_i, P'_j , tất cả những điểm thuộc $\mathcal{P}$ ở trên mặt phẳng $(P_4P'_iP'_j)$ phải nằm hoặc trên đường thẳng $P_4P'_i$ hoặc trên đường thẳng $P_4P'_j$.

b)



Hình vẽ trên bao gồm hình chóp đỉnh S và đáy $A_1B_1C_1$. Đáy $A_1B_1C_1$ nằm trong mặt phẳng π_1 . Mặt phẳng π_2 giao với các cạnh SA_1, SB_1, SC_1 và mặt phẳng π_1 theo thứ tự tại các điểm A_2, B_2, C_2 và đường thẳng l tương ứng. Các đường thẳng A_2B_2 và A_1B_1 giao nhau tại điểm P , các đường thẳng B_2C_2 và B_1C_1 giao nhau tại điểm Q , các đường thẳng C_2A_2 và C_1A_1 giao nhau tại điểm R . Các điểm P, Q, R cùng nằm trên đường thẳng l . Dễ dàng kiểm tra được rằng tập hợp $\mathcal{P} = \{S, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, P, Q, R\}$ có thỏa mãn điều kiện tất cả các điểm này đều không cùng nằm trên một mặt phẳng nhưng không tồn tại một mặt phẳng trong không gian chỉ chứa đúng ba điểm không thẳng hàng thuộc $\mathcal{P}$.

Dạng tổng quát thứ hai của bài toán Sylvester-Gallai được đề xuất bởi Erdős bằng cách thay các đường thẳng bằng các đường tròn trong phát biểu của bài toán.

Bài toán 3. Cho $\mathcal{P}$ là một tập hữu hạn những điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và tất cả chúng không cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường tròn trên mặt phẳng đi qua đúng ba điểm của $\mathcal{P}$.

Lời giải. Để giải quyết bài toán này ta sẽ sử dụng đến phép nghịch đảo. Gọi P_1 là một điểm thuộc $\mathcal{P}$, c là một đường tròn bất kì trong mặt phẳng với tâm là P_1 và ký hiệu α là phép nghịch đảo tương ứng với đường tròn c . Khi đó, phép biến đổi α biến những điểm của $\mathcal{P}$ khác với P_1 thành những điểm mới mà chúng ta sẽ tạm thời ký hiệu là $\mathcal{P}'$. Do tất cả các điểm thuộc $\mathcal{P}$ không cùng nằm trên một đường tròn nên tất cả các điểm thuộc $\mathcal{P}'$ không cùng nằm trên một đường thẳng. Áp dụng kết quả của bài toán Sylvester-Gallai ta tìm được một đường thẳng l trong mặt phẳng chứa chính xác hai điểm thuộc $\mathcal{P}'$ mà ta sẽ tạm gọi là P'_2 và P'_3 .

Do không có ba điểm nào trong tập $\mathcal{P}$ thẳng hàng, nên l không đi qua P_1 , trong trường hợp ngược lại ảnh l' của l qua phép biến đổi α sẽ là một đường thẳng đi qua P_1, P_2, P_3 .

Do đó, ảnh l' của l qua phép biến đổi α sẽ là một đường tròn đi qua P_1 , và đồng thời đây cũng là đường tròn đi qua đúng ba điểm thuộc $\mathcal{P}$ là P_1, P_2, P_3 .

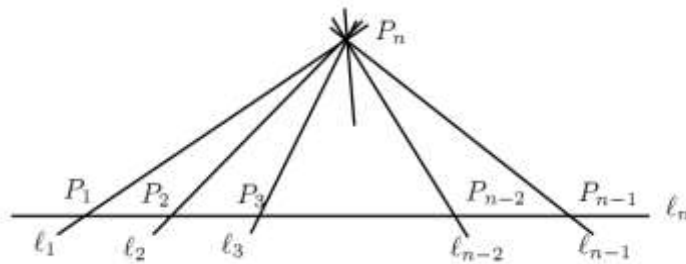
3. Đánh giá số lượng các đường thẳng trong bài toán Sylvester-Gallai

Bài toán 4. Cho $\mathcal{P}$ là tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho tất cả các điểm này không cùng nằm trên một đường thẳng và tập hợp $\mathcal{L}$ gồm những đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm thuộc $\mathcal{P}$.

Chứng minh rằng số lượng những đường thẳng trong $\mathcal{L}$ ít nhất là n .

Lời giải. Áp dụng kết quả bài toán Sylvester – Gallai ta tìm được đường thẳng $l \in \mathcal{L}$ đi qua đúng hai điểm thuộc $\mathcal{P}$. Bỏ đi một trong hai điểm này, ta tạm giả sử là điểm P_1 , và loại bỏ khỏi $\mathcal{L}$ tất cả các đường thẳng đi qua P_1 chứa đúng một điểm thuộc $\mathcal{P}$ khác P_1 . Ký hiệu tập hợp các điểm thu được là $\mathcal{P}_1$ và tập hợp các đường thẳng là $\mathcal{L}_1$. Số lượng $|\mathcal{L}_1|$ những đường thẳng trong $\mathcal{L}_1$ nhiều nhất là $|\mathcal{L}|-1$, có nghĩa là $|\mathcal{L}_1| \leq |\mathcal{L}|-1$.

Nếu những điểm thuộc $\mathcal{P}_1$ nằm trên một đường thẳng thì tồn tại đúng $n-1$ đường thẳng trong $\mathcal{L}$ nối P_1 với những điểm thuộc $\mathcal{P}_1$. Do đó, $|\mathcal{L}| = (n-1) + 1 = n$.



Trong trường hợp những điểm thuộc $\mathcal{P}_1$ không nằm cùng trên một đường thẳng thì theo kết quả của bài toán Sylvester – Gallai ta tìm được một đường thẳng $l_1 \in \mathcal{L}_1$ chứa đúng hai điểm thuộc $\mathcal{P}_1$. Bỏ đi một trong hai điểm này, ta tạm giả sử điểm đó là P_2 , và loại bỏ khỏi $\mathcal{L}_1$ tất cả các đường thẳng đi qua P_2 chứa đúng một điểm thuộc $\mathcal{P}_1$ khác P_2 . Ta tạm ký hiệu tập hợp các điểm còn lại sau lần bỏ đi này là $\mathcal{P}_2$ và tập hợp các đường thẳng là $\mathcal{L}_2$. Nếu những điểm thuộc $\mathcal{L}_2$ cùng nằm trên một đường thẳng thì $|\mathcal{L}_1| = n-1$ và $|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{L}_1| + 1 = n$.

Nếu những điểm thuộc $\mathcal{P}_2$ không cùng nằm trên một đường thẳng thì bằng cách xây dựng như trên ta thu được $\mathcal{P}_3$ và $\mathcal{L}_3$. Tiếp tục quá trình loại bỏ các điểm và các đường thẳng từ $\mathcal{P}_3$ và $\mathcal{L}_3$ ta tiếp tục xây dựng được $\mathcal{P}_4, \mathcal{L}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{L}_5, \dots$ cho tới khi tập hợp $\mathcal{P}_k$ chỉ gồm các điểm nằm trên cùng một đường thẳng (tối đa là cần $n-2$ bước làm như vậy).

Khi đó, $|\mathcal{L}_{k-1}| = n - (k-1)$.

Từ đánh giá $|\mathcal{L}_{k-1}| \leq |\mathcal{L}| - (k-1)$, ta suy ra $|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{L}_{k-1}| + (k-1) = n - (k-1) + (k-1) = n$.

Erdős đưa ra giả thiết rằng kết quả tương tự cũng đúng cho trường hợp những đường tròn đi qua ít nhất ba điểm thuộc tập hợp hữu hạn những điểm trong mặt phẳng. Nếu tất cả các điểm trừ một điểm nằm trên một đường tròn chung thì tồn tại $\binom{n-1}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ đường tròn đi qua ba điểm hoặc nhiều điểm hơn trong tập điểm đã cho.

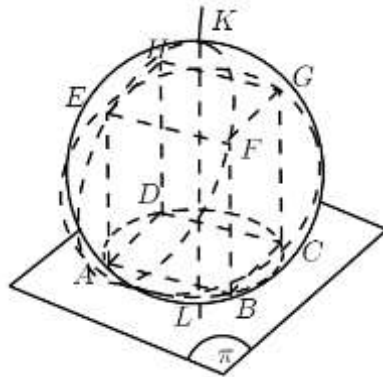
Do đó, Erdős đã phát biểu mệnh đề sau đây:

Nếu $\mathcal{P}$ là tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho tất cả các điểm không cùng nằm trên một đường tròn, không có ba điểm nào thẳng hàng và ký hiệu $\mathcal{C}$ là tập hợp những đường tròn đi qua ít nhất ba điểm thuộc $\mathcal{P}$ thì $\mathcal{C}$ có ít nhất $\binom{n-1}{2} + 1$ phần tử.

Segre chỉ ra mệnh đề trên là sai bằng cách đưa ra một phản ví dụ như sau:

Bài toán 4. Cho $\mathcal{K}$ là khối lập phương, $\mathcal{P}'$ là tập hợp gồm những đỉnh của khối lập phương và $\mathcal{C}'$ là tập hợp gồm những đường tròn chứa ít nhất ba điểm thuộc $\mathcal{P}'$. Khi đó, tồn tại một phép chiếu nổi biến $\mathcal{P}'$ thành $\mathcal{P}$ và $\mathcal{C}'$ thành $\mathcal{C}$ sao cho $|\mathcal{C}| < \binom{|\mathcal{P}|-1}{2} + 1$.

Lời giải.



Tập hợp $\mathcal{C}'$ gồm ba loại đường tròn:

- (1) Những đường tròn ngoại tiếp các mặt của $\mathcal{K}$ (ví dụ như đường tròn đi qua A, B, C, D);
- (2) Những đường tròn đi qua hai đường chéo của $\mathcal{K}$ (ví dụ như đường tròn đi qua A, C, G, E);
- (3) Những đường tròn đi qua đúng ba đỉnh của $\mathcal{K}$ (ví dụ như đường tròn đi qua A, F, H);

Có 6 đường tròn loại (1), 6 đường tròn loại (2) và 8 đường tròn loại (3). Như vậy có tổng cộng 20 đường tròn trong $\mathcal{C}'$.

Gọi S là hình cầu ngoại tiếp $\mathcal{K}$ và KL là đường kính của S đi qua tâm của hình vuông $ABCD$ và $EFGH$. Ký hiệu π là mặt phẳng tiếp xúc với S tại L .

Những điểm thuộc $\mathcal{P}'$ và những đường tròn thuộc $\mathcal{C}'$ đều nằm trên S . Ta dựng phép chiếu nổi của chúng trên mặt phẳng π từ tâm K . Hình chiếu của $\mathcal{P}'$ là tập hợp $\mathcal{P}$ gồm 8 điểm. Ta biết rằng hình chiếu nổi của một đường tròn trên S không chứa tâm K của phép chiếu nổi là một đường tròn trên π .

Do K không nằm trên bất cứ đường tròn nào của $\mathcal{C}'$, nên ảnh của $\mathcal{C}'$ tạo ra một tập $\mathcal{C}$ gồm 20 đường tròn trên π .

Những đường tròn thuộc $\mathcal{C}$ chính là những đường tròn trên π mà nó có ít nhất ba điểm thuộc $\mathcal{P}$. Những điểm thuộc $\mathcal{P}$ không cùng nằm trên một đường tròn và $\binom{|\mathcal{P}|-1}{2} + 1 = \binom{7}{2} + 1 = 22$, nên $|\mathcal{C}| < \binom{|\mathcal{P}|-1}{2} + 1$.

4. Dạng tổng quát hóa của bài toán Sylvester – Gallai trong lý thuyết block design

Lý thuyết block design khởi đầu từ lý thuyết thống kê. Nó là một nhánh quan trọng của toán tổ hợp hiện đại. Có nhiều loại block design khác nhau. Trong bài viết này ta chỉ khảo sát sơ bộ trên một lớp các block design đặc biệt thường được biết đến với tên gọi **không gian tuyến tính hữu hạn** như sau:

Block design $\mathcal{D}$ bao gồm n phần tử, thường gọi là điểm, và một họ các tập con bất kì những điểm, thường gọi là khối, được gọi là một không gian tuyến tính hữu hạn nếu như:

- Mỗi khối chứa ít nhất hai điểm khác nhau;
- Hai điểm phân biệt bất kì được chứa trong chính xác một khối.

Tập hợp $\mathcal{P}$ và $\mathcal{L}$ trong bài toán Sylvester – Gallai đóng vai trò là những điểm và những khối tương ứng của một không gian tuyến tính hữu hạn, ở đây những khối khác nhau không cần chứa cùng số các điểm.

Năm 1938, Hanani đã đưa ra một dạng tổng quát hóa của bài toán Sylvester-Gallai cho các không gian tuyến tính hữu hạn.

Bài toán 5. (Hanani) Nếu $\mathcal{D}$ là một không gian tuyến tính hữu hạn gồm n điểm và m khối sao cho $m > 1$, thì $m > n$.

Lời giải. Ký hiệu những điểm của $\mathcal{D}$ là $p_1, p_2, \dots, p_n$ và các khối là $B_1, B_2, \dots, B_m$. Hơn nữa, ký hiệu số những khối chứa p_i bằng r_i với $i = 1, 2, \dots, n$, và số những điểm trong B_j bằng k_j với $j = 1, 2, \dots, m$.

Theo định nghĩa của không gian tuyến tính hữu hạn, ta có $1 < k_j < n$ và $1 < r_i < m$.

Số lượng I những cặp điểm – khối (p_i, B_j) sao cho p_i thuộc B_j có thể được đếm bằng hai cách:

1. Bằng cách đếm các khối thông qua các điểm, nên $I = r_1 + r_2 + \dots + r_n$;
2. Bằng cách đếm các điểm thông qua các khối, nên $I = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.

Từ hai cách đếm trên ta suy ra $r_1 + r_2 + \dots + r_n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. (1)

Không mất tính tổng quát ta có thể gán nhãn cho các điểm sao cho $r_j \leq r_i$ nếu $j > i$. (2)

Hơn nữa, ta cũng gán nhãn cho các khối chứa các điểm sao cho các khối đi qua p_n là $B_1, B_2, \dots, B_{r_n}$.

Mục đích của ta là cần tìm ra những mối liên kết giữa những số k_j và r_i nên ta sẽ tiến hành như sau:

Nếu p_i là một điểm bất kì và B_j là một khối bất kì không chứa p_i thì qua một điểm bất kì của B_j có đúng một khối chứa p_i đi qua. Hơn nữa, những khối đi qua p_i mà nó đi qua thêm những điểm khác nhau của B_j là khác nhau, bởi vì hai điểm bất kì của $\mathcal{D}$ được chứa trong chính xác một khối.

Như vậy, $k_j \leq r_i$. (3)

Áp dụng (3) cho điểm p_n và cho mỗi khối trong số các khối $B_{r_n+1}, B_{r_n+2}, \dots, B_m$, ta nhận được

$$k_{r_n+i} \leq r_n \text{ với } i = 1, 2, \dots, m - r_n. \quad (4)$$

Cộng tất cả các đánh giá trên lại với nhau ta nhận được

$$k_{r_n+1} + k_{r_n+2} + \dots + k_m \leq (m - r_n) r_n. \quad (5)$$

Các số $k_1, k_2, \dots, k_{r_n}$ có thể được đánh giá như sau:

Khối B_1 đi qua ít nhất một điểm khác với điểm p_n , ta tạm coi như điểm đó là p_1 .

Do đó, các khối $B_2, B_3, \dots, B_{r_n}$ không thể chứa điểm p_1 nên áp dụng (3) ta thu được $r_1 \geq k_2$.

Khối B_2 cũng chứa một điểm khác với p_n (và khác cả p_1), ta tạm coi như điểm đó là p_2 . Điểm p_2 cũng không nằm trong các khối $B_3, \dots, B_{r_n}$, nên áp dụng (3) ta thu được $r_2 \geq k_3$.

Bằng cách lặp lại các lập luận trình bày ở trên ta thu được các đánh giá $r_i \geq k_{i+1}$ với $i = 1, 2, \dots, r_n - 1$. (6)

Cuối cùng, tồn tại một điểm thuộc B_{r_n} mà không được chứa trong B_1 , ta tạm coi như điểm đó là p_{r_n} , nên $r_{r_n} \geq k_1$. (7)

Cộng các đánh giá (6) và (7) với nhau, ta nhận được $r_1 + r_2 + \dots + r_{r_n} \geq k_1 + k_2 + \dots + k_{r_n}$. (8)

Kết hợp (5) và (8) ta thu được kết quả

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{r_n} + (m - r_n) r_n \geq k_1 + k_2 + \dots + k_m. \quad (9)$$

Kết hợp (9), (1) và (2) ta thu được

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \dots + r_{r_n} + (m - r_n) r_n &\geq r_1 + r_2 + \dots + r_n \\ &\geq r_1 + r_2 + \dots + r_{r_n} + (n - r_n) r_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$m \geq n.$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Nguyễn Hữu Điền, Giải toán bằng phương pháp đại lượng cực biên, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [2]. Trương Phước Nhân, Không gian tuyến tính hữu hạn, 22/07/2017.
- [3]. Trương Phước Nhân, Không gian tuyến tính hữu hạn – phần 2, 03/08/2017.