

Bài toán Bernouli-Euler về những bức thư sai địa chỉ

Trương Phước Nhân, 11/11/2018

Bài toán. Một người đưa thư phân phối n bức thư vào n hộp thư. Tính xem có bao nhiêu cách phân phối các bức thư sao cho người đưa thư không chuyển đúng địa chỉ của bức thư nào.

Bài toán này đã được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Niclaus Bernouli (1687-1759), cháu trai của nhà toán học nổi tiếng Jacob và Johann Bernoulli. Sau đó nhà toán học Euler bắt đầu quan tâm đến bài toán này và ông đã giải bài toán này một cách độc lập so với cách giải của Bernoulli.

Bài toán này đặc biệt thú vị do cách giải độc đáo của nó.

Phân tích – Lời giải. (Niclaus Bernouli)

Giả sử những bức thư được đánh số là $a, b, c, \dots$ còn các phong bì được đánh số tương ứng là $A, B, C, \dots$ và ký hiệu số cách phân phối các bức thư thỏa mãn yêu cầu bài toán là a_n .

Bằng cách cố định lá thư a , ta xét hai trường hợp có thể xảy ra sau: trường hợp thứ nhất gồm các cách sắp xếp mà a nằm ở B và b nằm ở A , trường hợp thứ hai gồm các cách sắp xếp mà a nằm ở B và b không nằm ở A .

Với cách phân chia như vậy ta nhận thấy rõ ràng trường hợp thứ nhất sẽ bao gồm a_{n-2} cách sắp xếp còn trường hợp thứ hai bao gồm a_{n-1} cách sắp xếp.

Do đó, số cách sắp xếp sao cho lá thư a nằm ở hộp thư B là $a_{n-1} + a_{n-2}$.

Số cách đặt “ a vào B ”, “ a vào C ”, “ a vào D ”,... đều có cùng số lượng nên: $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$.

Để thu được công thức thu gọn cho a_n , ta sẽ thực hiện tiếp một số biến đổi nhỏ trên công thức truy hồi, cụ thể:

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \\ \Rightarrow a_n - na_{n-1} &= (-1)(a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}) \\ \Rightarrow a_n - na_{n-1} &= (-1)(a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}) = (-1)^2(a_{n-2} - (n-2)a_{n-3}) \\ &\dots \\ \Rightarrow a_n - na_{n-1} &= (-1)^{n-2}(a_2 - 2a_1) = (-1)^n \end{aligned}$$

Thực hiện phép chia hai vế cho $n!$, ta thu được: $\frac{a_n}{n!} - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Bằng cách thay n bởi các số $2, 3, 4, \dots, n$, ta thu được:

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_2}{2!} - \frac{a_1}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!} \\
 + & \frac{a_3}{3!} - \frac{a_2}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!} \\
 & \dots \\
 & \frac{a_n}{n!} - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \\
 \Rightarrow & \frac{a_n}{n!} - \frac{a_1}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \\
 \Rightarrow & a_n = n! \left[\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].
 \end{aligned}$$

Lưu ý. Ngoài trừ cách tính vừa trình bày ở trên ta cũng có thể áp dụng nguyên lý bao hàm và loại trừ để giải quyết bài toán trên, xem thêm các bài viết “**Công thức tính số derangement**”, hoặc sử dụng kỹ thuật hàm sinh để xác định công thức của a_n , xem thêm bài viết “**Chuỗi lũy thừa hình thức**”,...

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Heinrich Dörrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics Their History and Solution, New York Dover Publications.
- [2]. Trương Phước Nhân, Công thức tính số derangement, 21/09/2017.
- [3]. Trương Phước Nhân, Ứng dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ mở rộng, 15/07/2018.
- [4]. Trương Phước Nhân, Chuỗi lũy thừa hình thức, 09/06/2018.