

Bài toán lát domino cho bảng $2 \times n$

Trương Phước Nhân, 11/10/2018

Nội dung của bài viết này bàn về một trường hợp đặc biệt của bài toán dimer, một trong các bài toán quan trọng của vật lý thống kê có cách phát biểu đẹp và liên quan sâu sắc đến lý thuyết tổ hợp hiện đại.

Bài toán. Tính số cách lát bảng ô vuông $2 \times n$ bằng các quân domino ?

Phân tích – Lời giải.

Đầu tiên ta sẽ thiết lập công thức thô để xác định t_n - số cách lát bảng ô vuông $2 \times n$ bằng các quân domino.

Khẳng định 1. $t_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$

Chứng minh khẳng định 1.

Nhận thấy rằng mỗi cách lát bảng ô vuông $2 \times n$ với một cách biểu diễn n dưới dạng tổng các số 1 và 2 - “một phân hoạch của n thành các số 1 và 2”.

$\Rightarrow t_n =$ Số cách viết n thành các số 1 và 2

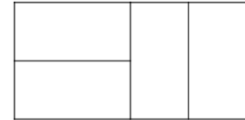
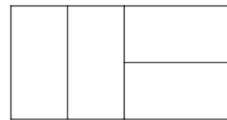
$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{Số cách viết } n \text{ thành } k \text{ số 1 và } (n-2k) \text{ số 2} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \end{aligned}$$

Hình vẽ minh họa cho $n=4$:

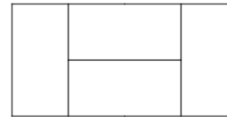


k=2

Các cách lát khác cho bảng 2×4 :



k=1



k=0

Tổng số cách lát bảng $2 \times 5 = 5$.

Tiếp theo, ta sẽ tiếp cận vấn đề theo một hướng hơi khác đi đôi chút nhằm mục tiêu thu gọn lại công thức thô vừa trình bày ở phần trên, cụ thể:

Khẳng định 2. $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$.

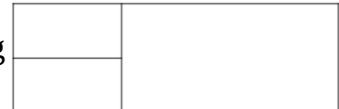
Chứng minh khẳng định 2.

$t_n =$ Số cách lát bảng $2 \times n$

$=$ Số cách lát bảng



$+$ Số cách lát bảng



$$= t_{n-1} + t_{n-2}$$

$$\Rightarrow t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \text{ (đpcm)}$$

Từ kết quả thu được trong khẳng định 2, ta nhận thấy rằng t_n có thể được xác định bởi công thức truy hồi $\begin{cases} t_1 = t_2 = 2 \\ t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \end{cases}$.

$\Rightarrow t_n = f_{n+1}$, trong đó f_n là số Fibonacci thứ n xác định bởi

$$\text{công thức truy hồi } \begin{cases} f_0 = 0, f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}.$$

Sau cùng ta sẽ sử dụng công cụ hàm sinh để giải công thức truy hồi nêu trên, cụ thể:

$$\textbf{Khẳng định 3.} \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Chứng minh khẳng định 3.

Giả sử $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots$ là hàm sinh của dãy số f_n .

Khi đó,

$$\begin{aligned} & \begin{array}{l} f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots \\ + \quad xf(x) = \quad f_0x + f_1x^2 + f_2x^3 + \dots \end{array} \\ \Rightarrow & \quad f(x) + xf(x) = f_0 + f_2x + f_3x^2 + f_4x^3 + \dots \\ \Rightarrow & \quad x + xf(x) + x^2f(x) = \underbrace{f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + \dots}_{f(x)} \\ \Rightarrow & \quad x + xf(x) + x^2f(x) = f(x) \\ \Rightarrow & \quad f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Giả sử } f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}, \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x} \\ &= A \sum_{n \geq 0} \alpha^n x^n + B \sum_{n \geq 0} \beta^n x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} [A\alpha^n + B\beta^n] x^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] x^n$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ (đpcm)}$$

Tài liệu tham khảo:

Bài giảng Enumerative Combinatorics của Federico Ardila.