

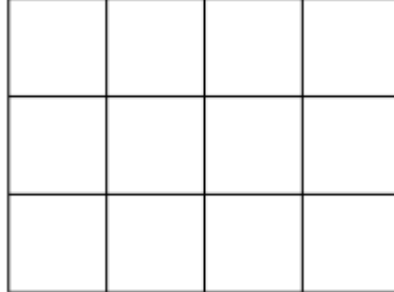
Công thức tính số cách lát bảng ô vuông kích thước $m \times n$ bởi các quân domino

Trương Phước Nhân, 16/08/2018

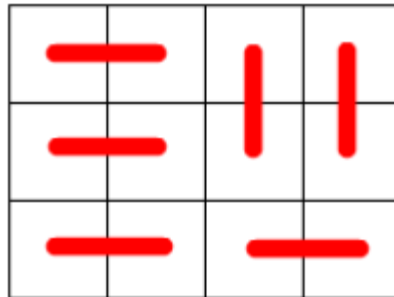
Bài toán. Có bao nhiêu cách lát một bảng ô vuông kích thước $m \times n$ bởi các quân domino kích thước 2×1 ?

Trong bài viết này ta sẽ cùng tìm hiểu lời giải cho câu hỏi thú vị vừa nêu. Câu hỏi này không chỉ đơn thuần là một bài toán tổ hợp hay và nó còn đóng một vai trò quan trọng trong các khảo sát lý thuyết của ngành vật lý thống kê và lý thuyết hóa học trạng thái rắn.

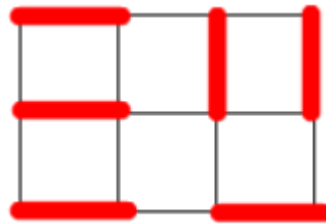
Để đơn giản hóa vấn đề ta sẽ xem xét trên bảng ô vuông với $m = 3$ và $n = 4$, như sau:



Một cách lát tương ứng cho bảng ô vuông này sẽ có dạng như sau:



Để đơn giản hóa vấn đề ta sẽ khảo sát bài toán trên đồ thị đối ngẫu của bảng ô vuông kích thước $m \times n$, như hình vẽ dưới đây:



Do đó ta dễ dàng nhận thấy rằng số cách lát cần tìm của bảng ô vuông kích thước $m \times n$ chính là số cách ghép cặp của đồ thị đối ngẫu của nó.

1. Chứng minh công thức Kasteleyn

Kết quả 1. (Kasteleyn)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị con hữu hạn của $\mathbb{Z}^2$.

Định nghĩa ma trận Kasteleyn của đồ thị G là ma trận cấp $|V| \times |V|$ với các hàng và các cột được đánh số bởi các phần tử của G và xác định bởi:

$$K_{u,v} = \begin{cases} 1 & (u,v) \text{ là một cạnh ngang,} \\ i & (u,v) \text{ là một cạnh dọc,} \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó, số ghép cặp hoàn hảo của G được tính bởi $\sqrt{|\det K|}$.

Chứng minh.

Giả sử G là một đồ thị lưỡng phân với các phần X và Y .

Đặt $w(u,v) = \begin{cases} 1 & (u,v) \text{ là một cạnh ngang,} \\ i & (u,v) \text{ là một cạnh dọc,} \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$

Do đó, $K = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$ trong đó A là ma trận cấp $|X| \times |Y|$ với các hàng được đánh số bởi X , các cột được

đánh số bởi Y và xác định bởi $A_{u,v} = \begin{cases} w(u,v), & \text{nếu } (u,v) \in E, \\ 0 & , \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$

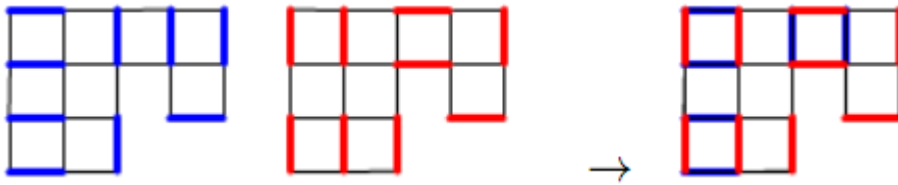
Bằng cách hoán đổi vị trí của các cột ta nhận thấy rằng $|\det K| = |\det^2 A| = |\det A|^2$. Từ đây để chứng minh kết quả nêu trong khẳng định đầu bài ta chỉ cần chứng minh rằng $|\det A|$ bằng với số ghép cặp hoàn hảo của đồ thị G .

Đặt $|X| = |Y| = n$ và $X = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, Y = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, ta có

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sign} \sigma} w(1, \sigma(1)) \dots w(n, \sigma(n)) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma w(u_1, v_{\sigma(1)}) \dots w(u_n, v_{\sigma(n)}).$$

Nhận thấy rằng trong biểu diễn cuối cùng, số hạng sẽ bằng 0 nếu có một nhân tử bằng 0, điều này có nghĩa là số hạng này sẽ khác 0 nếu σ biểu diễn cho một ghép cặp.

Xem xét hai ghép cặp phân biệt M và M' , ta tạm giả sử rằng hai ghép cặp này tương ứng với hai hoán vị là σ và σ' .



Khi đó, hợp $M \cup M'$ của chúng là hợp của các chu trình chẵn phân biệt nên ta có thể biến đổi M thành M' bằng cách quay các cạnh trong mỗi chu trình này theo cùng một hướng.

Do đó, để chỉ ra rằng hai ghép cặp phân biệt xuất hiện trong tổng trên với cùng một dấu ta chỉ cần chứng minh rằng phép quay các cạnh quanh mỗi chu trình này không ảnh hưởng đến dấu của các số hạng tương ứng là được. Trường hợp riêng, ta chỉ cần khảo sát trường hợp khi hợp $M \cup M'$ chỉ bao gồm một chu trình.

Ta cần kết một kết quả phụ quan trọng sau cho quá trình khảo sát:

Bổ đề. Giả sử $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$ là một chu trình của đồ thị $\mathbb{Z}^2$.

Nếu ta ký hiệu $\pi = \left(\prod_{i \text{ lẻ}} w(v_i, v_{i+1}) \right) / \left(\prod_{i \text{ chẵn}} w(v_i, v_{i+1}) \right)$ thì $\pi = (-1)^{k+l-1}$ trong đó l là số điểm của $\mathbb{Z}^2$ giới

hạn bởi chu trình $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$.

Chứng minh bổ đề. Ta sẽ chứng minh bổ đề vừa nêu bằng phương pháp quy nạp theo số l gồm các điểm của $\mathbb{Z}^2$ giới hạn bởi chu trình $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$.

- Trường hợp $l = 0$, khẳng định là hiển nhiên.

Thật vậy, chỉ có duy nhất một khả năng khiến cho số các điểm của $\mathbb{Z}^2$ giới hạn bởi chu trình $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$ bằng 0 như trong hình vẽ bên dưới:

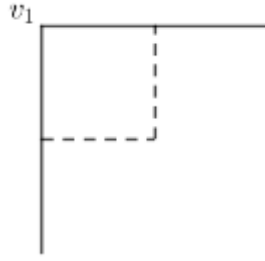


$$\text{Khi đó, } \pi = \frac{w(v_1, v_2)}{w(v_2, v_1)} = 1 = (-1)^{1+0-1}.$$

- Giả sử rằng khẳng định nêu trong bổ đề đã được kiểm chứng cho mọi chu trình chẵn có số các điểm của $\mathbb{Z}^2$ giới hạn bởi chu trình nhỏ hơn l . Giả sử $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$ là chu trình có số điểm giới hạn đúng bằng l .

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử v_1 là điểm nằm ở vị trí trên cùng bên tay trái và ta sẽ khảo sát trường hợp con quan trọng sau:

Trường hợp 1.



Ta thu được một chu trình mới tương ứng với đường gạch nét như trên hình vẽ.

Chu trình mới này có $k' = k$, $l' = l - 1$ nên áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra $\pi' = (-1)^{k'+l'-1} = (-1)^{k+l-2}$.

Do đó, $\pi = \pi' \frac{-i}{i} = -\pi' = (-1)^{k+l-1}$.

Trường hợp 2.

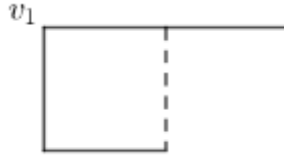


Ta thu được một chu trình mới tương ứng với đường gạch nét như trên hình vẽ.

Chu trình mới này có $k' = k - 1$, $l' = l$ nên áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra $\pi' = (-1)^{k'+l'-1} = (-1)^{k+l-2}$.

Do đó, $\pi = \pi' \frac{1}{i^2} = -\pi' = (-1)^{k+l-1}$.

Trường hợp 3.



Ta thu được một chu trình mới tương ứng với đường gạch nét như trên hình vẽ.

Chu trình mới này có $k' = k - 1$, $l' = l$ nên áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra $\pi' = (-1)^{k'+l'-1} = (-1)^{k+l-2}$.

Do đó, $\pi = \pi' \frac{i^2}{1} = -\pi' = (-1)^{k+l-1}$.

Tóm lại, trong cả ba trường hợp ta luôn có $\pi = (-1)^{k+l-1}$, nên theo nguyên lý quy nạp ta nhận được điều phải chứng minh.

Điều này chứng minh tính đúng đắn của bổ đề.

Giả sử $M \cup M'$ là chu trình $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ trong đó $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ là các cạnh của M còn $(u_1, v_n), (u_2, v_1), \dots, (u_n, v_{n-1})$ là các cạnh của M' , tức là σ là hoán vị đồng nhất còn $\sigma' = (n, 1, \dots, n-1)$ là hoán vị vòng quanh độ dài n , nên $\text{sign} \sigma = 1$ và $\text{sign} \sigma' = (-1)^{n-1}$.

Áp dụng kết quả nêu trong bổ đề, ta có

$$\frac{w(u_1, v_{\sigma(1)}) w(u_2, v_{\sigma(2)}) \dots w(u_n, v_{\sigma(n)})}{w(u_1, v_{\sigma'(1)}) w(u_2, v_{\sigma'(2)}) \dots w(u_n, v_{\sigma'(n)})} = \frac{w(u_1, v_1) w(u_2, v_2) \dots w(u_n, v_n)}{w(v_1, u_2) w(v_2, u_3) \dots w(v_n, u_1)} = (-1)^{n+l-1},$$

trong đó l là số điểm của $\mathbb{Z}^2$ giới hạn bởi $M \cup M'$.

Do các điểm giới hạn bởi $M \cup M'$ chính là hợp của các điểm giới hạn bởi các chu trình chẵn nên l chẵn.

Do đó, $\text{sign} \sigma w(u_1, v_{\sigma(1)}) w(u_2, v_{\sigma(2)}) \dots w(u_n, v_{\sigma(n)}) = \text{sign} \sigma' w(u_1, v_{\sigma'(1)}) w(u_2, v_{\sigma'(2)}) \dots w(u_n, v_{\sigma'(n)})$, đpcm.

2. Công thức tính số cách lát

Cho trước hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$, ta định nghĩa đồ thị $G_1 \times G_2$ như sau:

- Tập đỉnh của $G_1 \times G_2$ là tập $V_1 \times V_2$
- Hai đỉnh (u_1, u_2) và (v_1, v_2) của đồ thị $G_1 \times G_2$ được nối với nhau bởi một cạnh nếu và chỉ nếu $(u_1, v_1) \in E_1$ hoặc $(u_2, v_2) \in E_2$.

Nhận thấy rằng đồ thị đối ngẫu G của bảng ô vuông kích thước $m \times n$ có thể biểu diễn được dưới dạng $G = P_m \times P_n$, trong đó P_m và P_n là các đường đi.

Để dàng nhận thấy rằng đồ thị Kasteleyn của G có thể được biểu diễn lại dưới dạng:

$$K = A_m \otimes I_n + i(I_m \otimes A_n),$$

trong đó ký hiệu $\otimes$ dùng để chỉ tích tensor của hai ma trận; A_m và A_n lần lượt là các ma trận kề của P_m và P_n ; và I_m và I_n là các ma trận đơn vị cấp m và n .

Theo công thức Kasteleyn thì để tính số ghép cặp của G ta cần phải tính được $\det K$, hay nói cách khác là cần phải tính được các giá trị riêng của ma trận K .

Kết quả 2. Giả sử các giá trị riêng của A_m và A_n lần lượt là μ_k ($k=1, 2, \dots, m$) và λ_j ($j=1, 2, \dots, n$). Giả sử thêm rằng w_k, v_j là các vector riêng tương ứng với μ_k và λ_j .

Khi đó, $\mu_k + i\lambda_j$ ($k=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) là các giá trị riêng tương ứng của ma trận K , và vector riêng tương ứng với giá trị riêng này là $w_k \otimes v_j$.

Chứng minh.

$$\begin{aligned} K(w_k \otimes v_j) &= (A_m \otimes I_n + i(I_m \otimes A_n))(w_k \otimes v_j) \\ &= A_m w_k \otimes v_j + i w_k \otimes A_n v_j \\ &= (\mu_k w_k) \otimes v_j + i w_k \otimes (\lambda_j v_j) \\ &= \mu_k (w_k \otimes v_j) + i \lambda_j (w_k \otimes v_j) \\ &= (\mu_k + i \lambda_j) (w_k \otimes v_j). \end{aligned}$$

Do đó định hướng của ta bây giờ đó chính là xác định các giá trị riêng của ma trận kề A_n của đồ thị đường đi P_n .

Kết quả 3. Giả sử A_n là ma trận kề của đồ thị đường đi P_n .

Khi đó, các giá trị riêng của A_n là $2 \cos \frac{\pi j}{n+1}$ ($j=1, 2, \dots, n$).

Chứng minh.

Ma trận kề A_n có dạng như sau:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Theo định nghĩa, λ là một giá trị riêng của ma trận A_n nếu và chỉ nếu tồn tại một vector

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \neq 0$ sao cho $A_n v = \lambda v$.

Biểu diễn lại hệ thức $A_n v = \lambda v$ theo các tọa độ, ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} v_2 = \lambda v_1 \\ v_1 + v_3 = \lambda v_2 \\ v_2 + v_4 = \lambda v_3 \\ \dots \\ v_{n-1} = \lambda v_n \end{cases}$$

Nếu ta quy ước rằng $v_0 = v_{n+1} = 0$ thì hệ phương trình trên trở thành phương trình sai phân tuyến tính

$$v_{i+1} + v_{i-1} = \lambda v_i, 1 \leq i \leq n.$$

Từ công thức nghiệm của một phương trình sai phân tuyến tính ta nhận ra rằng $v_i = \alpha \alpha^i + \beta \beta^i$ ($\alpha \neq \beta$) hoặc $v_i = (ai + b)\alpha^i$ ($\alpha = \beta$), trong đó α, β là các nghiệm của phương trình $x^2 - \lambda x + 1 = 0$.

Từ định lý Viét, ta thu được: $\begin{cases} \alpha + \beta = \lambda \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$.

Từ điều kiện $v_0 = v_{n+1} = 0$, ta suy ra $\alpha^{n+1} = \beta^{n+1}$.

Từ hệ thức $\alpha\beta = 1$, ta suy ra $\begin{cases} \alpha^{2n+2} = 1 \\ \beta = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$, nên α là một căn bậc $(2n+2)$ của đơn vị.

Từ nhận xét trên ta có: $\lambda = \alpha + \beta = 2 \operatorname{Re} \alpha = 2 \cos \frac{\pi j}{n+1}$, $j = 0, 1, \dots, 2n+1$.

Do $2 \cos \frac{\pi j}{n+1} = 2 \cos \frac{\pi(2n+2-j)}{n+1}$, nên ta chỉ cần xem xét các trường hợp $j = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$.

Nếu $j = 0$ thì $\lambda = 2$, khi đó phương trình $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ có nghiệm kép $x = 1$, nên v_i có dạng $ai + b$.

Từ điều kiện $v_0 = v_{n+1} = 0$, ta nhận ra rằng v_i bằng 0, điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Tương tự, chỉ số j cũng không thể bằng $n+1$.

Do đó, các giá trị có thể có của giá trị riêng λ là $2 \cos \frac{\pi j}{n+1}$, $j = 1, 2, \dots, n$, nên các giá trị này cũng chính là tất cả các giá trị riêng của ma trận A_n , bởi vì một ma trận cấp $n \times n$ có chính xác n giá trị riêng.

Điều này kết thúc chứng minh của ta.

Sau cùng, từ công thức Kasteleyn và hai phân tích vừa trình bày ở trên ta thực hiện phép tính số cách lát như sau:

Số cách lát các quân domino = Số các ghép cặp hoàn hảo của G

$$= \sqrt{|\det K|}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n |\mu_k + i\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n \left(4 \cos^2 \frac{k\pi}{m+1} + 4 \cos^2 \frac{j\pi}{n+1} \right) \right)^{\frac{1}{4}}$$

Tài liệu tham khảo:

[1]. Bài giảng Algebraic Combinatorics của Lionel Levine, 15/02/2011.

[2]. Ngô Quang Hưng, Vĩnh Thúc, Tạp chí Epsilon 03.

[3]. Jiri Matousek, Thirty-three Miniatures Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra, American Mathematical Society.