

Ứng dụng công thức Cauchy – Binet trong các bài toán về đồ thị

Trương Phước Nhân, 28/12/2018

Nội dung bài viết này trình bày chứng minh công thức Cauchy – Binet và ứng dụng nó trong các bài toán về đồ thị. Đây là một công thức quan trọng đóng vai trò then chốt trong việc ứng dụng công cụ ma trận và định thức khi khảo sát các vấn đề về đồ thị.

1. Công thức Cauchy - Binet

Công thức Cauchy-Binet

Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận cấp $m \times n$ và $B = (b_{ij})$ là ma trận cấp $n \times m$.

Khi đó, nếu $m > n$ thì $\det(AB) = 0$, còn nếu $m \leq n$ thì $\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |S|=m}} (\det A[S]) (\det B[S])$

Lưu ý, nếu $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$ thì $A[S] = (a_{i,j_k})$ với $1 \leq i \leq m$ và $1 \leq k \leq m$.

Chứng minh công thức Cauchy-Binet

Không mất tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả sử $m \leq n$, bởi vì nếu $m > n$ thì từ các hiểu biết nhận được từ lý thuyết đại số tuyến tính ta biết rằng $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) \leq \min\{n, m\} < m$ nên $\det(AB) = 0$.

Từ định nghĩa tích hai ma trận và tính đa tuyến tính của định thức ta nhận được kết quả

$$\det AB = \det \begin{bmatrix} \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} b_{j_1 1} & \dots & \sum_{j_m=1}^n a_{1j_m} b_{j_m m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j_1=1}^n a_{mj_1} b_{j_1 1} & \dots & \sum_{j_m=1}^n a_{mj_m} b_{j_m m} \end{bmatrix} = \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \det(A(j_1, j_2, \dots, j_m)) b_{j_1 1} b_{j_2 2} \dots b_{j_m m} \quad (1)$$

Do $\det(A(j_1, j_2, \dots, j_m)) = 0$ nếu các chỉ số j_i bị trùng lại nên không giảm tính tổng quát của bài toán ta chỉ cần khảo sát các hệ chỉ số đôi một phân biệt nhau.

Giả sử cho trước họ $S' = (j'_1, j'_2, \dots, j'_m)$, $1 \leq j'_1 < j'_2 < \dots < j'_m \leq n$, $S = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ là một hoán vị nào đó của họ S' , tức là $j_i = j'_{\sigma(i)}$ với σ là một hoán vị của tập $[m]$, nên

$$\det(A(j_1, j_2, \dots, j_m)) = \text{sgn}(\sigma) \det(A(j'_1, j'_2, \dots, j'_m))$$

Bằng cách lấy tổng các số hạng $\det(A(j_1, j_2, \dots, j_m)) b_{j_1 1} b_{j_2 2} \dots b_{j_m m}$ trên tất cả các hệ S là hoán vị của S' và gọi τ là hoán vị nghịch đảo của hoán vị σ , ta có

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) b_{j'_{\tau(1)} 1} b_{j'_{\tau(2)} 2} \dots b_{j'_{\tau(m)} m} \right) \det(A(j'_1, j'_2, \dots, j'_m)) \\ &= \left(\sum_{\tau} \text{sgn}(\tau) b_{j'_{\tau(1)} 1} b_{j'_{\tau(2)} 2} \dots b_{j'_{\tau(m)} m} \right) \det A[S'] \\ &= \det A[S'] \det B[S']. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó, } \det(AB) = \sum_{\substack{S' \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |S'|=m}} (\det A[S']) (\det B[S']).$$

2. Một số vấn đề cơ bản cần lưu ý khi áp dụng đại số tuyến tính khảo sát các bài toán đồ thị

Để có thể áp dụng công thức Cauchy-Binet trong các bài toán về đồ thị thì việc đầu tiên mà ta cần thực hiện đó là mô tả lại các thông tin cơ bản của một đồ thị dưới dạng ma trận.

Cho trước đồ thị vô hướng G với các đỉnh $v_1, \dots, v_n$.

Ma trận kề của đồ thị G là một ma trận $A(G) = (A_{ij})$ cấp $n \times n$ trong đó A_{ij} bằng số các cạnh liên thuộc với cả hai đỉnh v_i và v_j .

Trong trường hợp G là một đồ thị có hướng thì thay cho ma trận kề ta sẽ khảo sát các ma trận liên thuộc và ma trận Laplacian được xác định như sau:

Ma trận liên thuộc của đồ thị G là một ma trận $M(G) = (M_{ij})$ cấp $n \times m$ trong đó phần tử M_{ij} cho bởi

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ là đỉnh đầu của cạnh } e_j, \\ -1, & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ là đỉnh cuối của cạnh } e_j, \\ 0, & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Ma trận Laplacian của đồ thị G là một ma trận $L(G) = (L_{ij})$ cấp $n \times n$ trong đó phần tử L_{ij} xác định bởi

$$L_{ij} = \begin{cases} -m_{ij}, & \text{nếu } i \neq j \text{ với } m_{ij} \text{ là số cạnh nối đỉnh } v_i \text{ với đỉnh } v_j, \\ \deg(v_i), & \text{nếu } i = j \text{ với } \deg(v_i) \text{ là số cạnh liên thuộc với đỉnh } v_i. \end{cases}$$

Kết quả 1

Cho trước đồ thị vô hướng G , $M(G)$ và $L(G)$ lần lượt là ma trận liên thuộc và ma trận Laplacian của đồ thị G . Khi đó, $L = MM^T$

Chứng minh kết quả 1

Khẳng định trong kết quả 1 được suy ra trực tiếp từ định nghĩa phép nhân hai ma trận.

Xét hai đỉnh v_i, v_j bất kì của đồ thị G , nên ta có $(MM^T)_{ij} = \sum_{e_k \in E(G)} M_{ik} M_{jk}$.

Nếu $i = j$ thì số hạng $M_{ik} M_{ik} = (M_{ik})^2$ nên $(MM^T)_{ii} =$ số các cạnh liên thuộc với đỉnh $v_i = \deg(v_i)$.

Nếu $i \neq j$ thì số hạng $M_{ik} M_{jk} \neq 0$ khi và chỉ khi cạnh e_k liên thuộc với cả hai đỉnh v_i và v_j .

Hơn nữa, do luôn có một trong hai số hạng M_{ik} và M_{jk} bằng 1 và số hạng còn lại bằng -1 nên $(MM^T)_{ij} = -m_{ij}$ với m_{ij} là số cạnh nối đỉnh v_i với đỉnh v_j .

Bây giờ giả sử đồ thị G là liên thông và kí hiệu $M_0(G)$ là ma trận thu được từ ma trận liên thuộc $M(G)$ bằng cách xóa đi hàng cuối cùng và ma trận $M_0(G)$ cũng được gọi là ma trận liên thuộc thu gọn của đồ thị G . Khi đó, ma trận $M_0(G)$ có $n-1$ hàng và m cột.

Nhận xét rằng số các hàng của ma trận $M_0(G)$ bằng với số cạnh trong một cây khung bất kì của đồ thị G .

Kết quả 2

Giả sử S là một tập hợp gồm $p-1$ cạnh nào đó của đồ thị G .

Khi đó, nếu tập hợp S lập thành một cây khung của đồ thị G thì $\det M_0[S] = \pm 1$, còn trong trường hợp ngược lại nếu S không lập thành một cây khung của đồ thị G thì $\det M_0[S] = 0$

Chứng minh kết quả 2

Nếu tập hợp S không lập thành cây khung của đồ thị G thì luôn tồn tại một tập con R của S lập thành một chu trình C của đồ thị G . Xét ma trận con $M_0[R]$ của ma trận $M_0[S]$ thu được bằng cách chỉ lấy các cột được đánh thứ tự bởi các cạnh thuộc tập R . Không giảm tính tổng quát của bài toán ta có thể giả sử chu trình C xác định bởi tập R được tạo thành từ các cạnh là $e_1, e_2, \dots, e_r$. Bằng cách nhân các cột của ma trận

$M_0[R]$ được đánh số bởi e_j cho 1 nếu ta di chuyển quanh chu trình C qua cạnh e_j theo hướng của cạnh này và nhân cho -1 trong trường hợp còn lại, phép biến đổi vừa trình bày làm cho định thức của ma trận $M_0[R]$ sai khác khi một lượng bằng ± 1 lần giá trị cũ. Dễ dàng kiểm tra được rằng tổng các phần tử trong mỗi hàng của ma trận $M_0[R]$ đều bằng không nên tổng tất cả các cột của ma trận $M_0[R]$ bằng 0.

Điều này dẫn đến ma trận $M_0[S]$ chứa một tập hợp các cột phụ thuộc tuyến tính nên $\det M_0[S] = 0$.

Bây giờ giả sử tập hợp các cạnh S lập thành một cây khung T của đồ thị G , kí hiệu e là một cạnh nào đó của cây khung T liên thuộc với đỉnh v_p . Khi đó, cột tương ứng với cạnh e trong ma trận $M_0[S]$ chứa chính xác một phần tử khác không và phần tử này có dạng ± 1 . Bằng cách xóa đi khỏi ma trận $M_0[S]$ hàng và cột chứa phần tử khác không mà ta vừa chỉ ra ở trên, ta thu được ma trận M'_0 có cấp $(n-2) \times (n-2)$.

Áp dụng công thức khai triển Laplace cho ma trận $M_0[S]$, ta thu được $\det M_0[S] = \pm \det M'_0$.

Giả sử đồ thị T' là cây thu được từ cây T bằng cách xem cạnh e như một đỉnh đơn u , điều này có nghĩa là ta sẽ hợp đỉnh v_p và đầu mút còn lại của cạnh e lại với nhau tạo thành một đỉnh đơn u .

Khi đó, ma trận M'_0 sẽ thu được từ ma trận liên thuộc $M(T')$ bằng cách xóa đi hàng được đánh số bởi đỉnh u . Bằng cách lập lại các lập luận vừa trình bày ở trên ta dễ dàng nhận thấy rằng $\det M'_0 = \pm 1$.

Do đó, $\det M_0[S] = \pm 1$

Kết hợp các kết quả 1) và 2) mà ta vừa trình bày ở trên ta nhận được công thức tính số cây khung của một đồ thị cho trước.

Đặt $\kappa(G) = |\{\text{số cây khung của đồ thị } G\}|$

Kết quả 3

Cho trước đồ thị liên thông hữu hạn G không có khuyên, $L(G)$ là ma trận Laplacian của đồ thị G và L_0 là ma trận thu được từ ma trận Laplacian $L(G)$ bằng cách xóa đi hàng và cột cuối cùng.

Khi đó, $\kappa(G) = \det L_0$

Chứng minh kết quả 3

Áp dụng kết quả 1) ta có hệ thức $L = MM^T$ nên suy ra $L_0 = M_0 M_0^T$.

Bằng cách áp dụng công thức Cauchy-Binet ta thu được kết quả

$$\det L_0 = \det M_0 M_0^T = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \\ |S| = n-1}} (\det M_0[S]) (\det M_0^T[S])$$

Nhận xét rằng $\det M_0[S] = \det M_0^T[S]$, nên $\det L_0 = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \\ |S| = n-1}} (\det M_0[S])^2$.

Áp dụng kết quả 2) ta nhận thấy rằng $\det M_0[S]$ bằng ± 1 nếu tập hợp S lập thành một cây khung của đồ thị G và bằng 0 trong trường hợp ngược lại. Như vậy, số hạng $(\det M_0[S])^2$ bằng 1 nếu tập hợp S lập thành một cây khung của đồ thị G và bằng 0 trong trường hợp ngược lại.

Do đó, $\det L_0 = \kappa(G)$.

Kết quả 4

Giả sử $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận Laplacian L_G .

$$\text{Khi đó, } \kappa(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \lambda_i.$$

Chứng minh kết quả 4

Khẳng định của bài toán là hiển nhiên nếu đồ thị G không liên thông, do $\lambda_2 = 0$ và $\kappa(G) = 0$.

Trong trường hợp G là một đồ thị liên thông thì để nhận được kết quả nêu trong khẳng định ta xem xét cấu trúc của đa thức đặc trưng $P_{L_G}(\lambda)$ của ma trận Laplacian L_G .

Đầu tiên, $P_{L_G}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_n)$, nên hệ số của số hạng λ bằng $(-1)^{n-1} \prod_{i=2}^n \lambda_i$.

$$\text{Tiếp theo, } P_{L_G}(\lambda) = \det(\lambda I - L_G) = \begin{vmatrix} \lambda - \deg(v_1) & \cdots & -L_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -L_G & \cdots & \lambda - \deg(v_n) \end{vmatrix}.$$

Nếu ta tính định thức theo công thức Leibniz để tính định thức trên, tức là ta sẽ biểu diễn lại định thức trên như tổng lấy trên tất cả các hoán vị của tích các phần tử của ma trận tương ứng với các hoán vị đó, ta nhận thấy rằng hệ số của số hạng λ theo cách tính này bằng $(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \det L_G[i] = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \kappa(G)$,

trong đó $L_G[i]$ là ma trận thu được từ ma trận Laplacian L_G bằng cách xóa đi hàng thứ i và cột thứ i của ma trận.

$$\text{Do đó, } \kappa(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \lambda_i.$$

3. Một số áp dụng trên các dạng đồ thị cơ bản

a) Đồ thị đầy đủ

Một đồ thị G được gọi là đầy đủ nếu mọi đỉnh của đồ thị đều liên hợp với tất cả các đỉnh còn lại.

Một đồ thị đầy đủ với n đỉnh được kí hiệu bởi K_n .

Khi đó, K_n là một đồ thị $(n-1)$ -đều.

Cho trước đồ thị đầy đủ K_n , do đồ thị này là $(n-1)$ -đều, nên ma trận Laplacian L của đồ thị có dạng

$$L = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Khi đó, ma trận L_0 thu được từ ma trận Laplacian L bằng cách xóa đi hàng và cột đầu tiên là một ma trận cấp $(n-1) \times (n-1)$ có dạng

$$L_0 = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}.$$

Tìm các giá trị riêng của ma trận L_0 :

Nhận xét rằng

$$L_0 - nI = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)},$$

nên ma trận $L_0 - nI$ có hạng bằng 1.

Do đó, n là một giá trị riêng của ma trận $L_0 - nI$ với số bội $\geq \dim[\text{Ker}(L_0 - nI)] = (n-1) - 1 = n-2$.

Đồng thời, $\text{tr}(L_0) = (n-1)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$, nên ta dễ dàng tính ra được giá trị riêng thứ $(n-1)$, λ_{n-1} , chính là

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1} &= \text{tr}(L_0) - \sum \text{các giá trị riêng còn lại của ma trận } L_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \\ &= (n-1)^2 - n(n-2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Do đó, số cây khung của đồ thị đầy đủ K_n bằng

$$\kappa(K_n) = \det(L_0) = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i = n^{n-2} \cdot 1 = n^{n-2}$$

b) Đồ thị lưỡng phân đầy đủ

Một đồ thị G được gọi là lưỡng phân nếu tập hợp các đỉnh của đồ thị có thể phân hoạch thành hai tập con X và Y rời nhau sao cho các cạnh của đồ thị G có một đầu mút nằm trong tập X và đầu mút còn lại nằm trong tập Y , kí hiệu $G = (X, Y, E)$.

Một đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y, E)$ được gọi là đầy đủ nếu mọi đỉnh của tập X đều được nối với tất cả các đỉnh của tập Y , tức là tập các cạnh của đồ thị G có dạng $E = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$, kí hiệu $K_{|X||Y|}$.

Cho trước đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{m,n}$, ma trận Laplacian L của đồ thị có dạng

$$L = \begin{pmatrix} n & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & m \end{pmatrix}_{(m+n) \times (m+n)}$$

Bằng cách xóa đi hàng và cột cuối cùng của ma trận L ta thu được ma trận L_0 , như sau:

$$L_0 = \begin{pmatrix} n & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & m \end{pmatrix}_{(m+n-1) \times (m+n-1)}$$

Tính định thức $\det L_0$:

$$\det L_0 = \begin{vmatrix} n & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & m \end{vmatrix}_{(m+n-1) \times (m+n-1)}$$

Đầu tiên, cộng tất cả các hàng vào hàng đầu tiên ta nhận được

$$\det L_0 = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & m \end{vmatrix}_{(m+n-1) \times (m+n-1)},$$

trong đó các phần tử ở phía bên trái của hàng thứ nhất đều bằng 1 bởi vì

$$n + (n-1)(-1) = n - n + 1 \quad (\text{do có } n-1 \text{ hàng chứa các số } -1) \\ = 1$$

còn các phần tử ở phía bên phải của hàng thứ nhất đều bằng 0 bởi vì

$$(-1)m + m = -m + m \quad (\text{do có } m \text{ hàng chứa các số } -1) \\ = 0.$$

Tiếp theo, cộng hàng thứ nhất vào tất cả các hàng còn lại của ma trận, ta thu được kết quả

$$\det L_0 = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & m \end{vmatrix}_{(m+n-1) \times (m+n-1)}$$

Áp dụng công thức tính định thức của một ma trận tam giác ta suy ra

$$\det L_0 = 1 \times \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{m-1} \times \underbrace{m \times m \times \dots \times m}_{n-1} = n^{m-1} m^{n-1}$$

$$\Rightarrow \kappa(K_{m,n}) = \det(L_0) = n^{m-1} m^{n-1}$$

c) Đồ thị k - phần đầy đủ

Một đồ thị G được gọi là k - phần nếu tập hợp các đỉnh của G có thể phân hoạch thành k tập con rời nhau $V_1, V_2, \dots, V_k$ sao cho không có hai đỉnh nào nằm trong cùng một tập V_i liên hợp với nhau, kí hiệu $G = (V_1, V_2, \dots, V_k, E)$.

Một đồ thị k - phần $G = (V_1, V_2, \dots, V_k, E)$ được gọi là đầy đủ nếu mọi đỉnh của tập V_i đều được nối với tất cả các đỉnh của tập V_j còn lại, kí hiệu $K_{|V_1|, |V_2|, \dots, |V_k|}$.

Cho trước đồ thị k - phần đầy đủ $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Áp dụng cách tiếp cận tương tự như đối với trường hợp đồ thị đầy đủ và đồ thị lưỡng phần đầy đủ, để tính số cây khung của đồ thị $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ta sẽ tính toán định thức của ma trận Laplacian L bằng cách tính toán các giá trị riêng.

Tìm các giá trị riêng của ma trận L :

$$\det(L(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) - \lambda I) = \begin{vmatrix} (n - n_1 - \lambda)I_{n_1} & -J_{n_1 \times n_2} & \dots & -J_{n_1 \times n_k} \\ -J_{n_2 \times n_1} & (n - n_2 - \lambda)I_{n_2} & \dots & -J_{n_2 \times n_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -J_{n_k \times n_1} & -J_{n_k \times n_2} & \dots & (n - n_k - \lambda)I_{n_k} \end{vmatrix}_{n \times n},$$

trong đó I là ma trận đơn vị, J là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 1 và $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Bằng cách cộng tất cả các hàng vào hàng đầu tiên ta nhận thấy rằng tất cả các phần tử của hàng đầu tiên đều bằng $-\lambda$, như sau:

$$\det(L(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) - \lambda I) = -\lambda \begin{vmatrix} H_{n_1} & * & \dots & * \\ -J_{n_2 \times n_1} & (n - n_2 - \lambda)I_{n_2} & \dots & -J_{n_2 \times n_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -J_{n_k \times n_1} & -J_{n_k \times n_2} & \dots & (n - n_k - \lambda)I_{n_k} \end{vmatrix}_{n \times n},$$

trong đó $H_{n_1} = \begin{pmatrix} 1 & J_{1 \times (n_1-1)} \\ O_{(n_1-1) \times 1} & (n - n_1 - \lambda)I_{(n_1-1)} \end{pmatrix}_{n_1 \times n_1}$ và “*” là các ma trận có tất cả các phần tử trong hàng đầu tiên đều bằng 1.

Bằng cách cộng hàng đầu tiên cho tất cả các hàng từ hàng thứ $n_1 + 1$ đến hàng thứ n , ta nhận được

$$\det\left(L\left(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}\right) - \lambda I\right) = -\lambda \begin{vmatrix} H_{n_1} & * & \dots & * \\ O_{n_2 \times n_1} & (n - n_2 - \lambda)I_{n_2} + J_{n_2} & \dots & O_{n_2 \times n_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{n_k \times n_1} & O_{n_k \times n_2} & \dots & (n - n_k - \lambda)I_{n_k} + J_{n_k} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

Áp dụng kết quả tính toán định thức khối ta nhận được kết quả

$$\det\left(L\left(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}\right) - \lambda I\right) = -\lambda \det H_{n_1} \prod_{i=2}^k \det\left[(n - n_i - \lambda)I_{n_i} + J_{n_i}\right]$$

Tính $\det H_{n_1}$

$$\det H_{n_1} = \begin{vmatrix} 1 & J_{1 \times (n_1 - 1)} \\ O_{(n_1 - 1) \times 1} & (n - n_1 - \lambda)I_{(n_1 - 1)} \end{vmatrix} = (n - n_1 - \lambda)^{n_1 - 1}$$

Tính $\det\left[(n - n_i - \lambda)I_{n_i} + J_{n_i}\right]$ với $i = \overline{2, k}$

$$\begin{aligned} \det\left[(n - n_i - \lambda)I_{n_i} + J_{n_i}\right] &= \begin{vmatrix} n - \lambda & (n - \lambda)J_{1 \times (n_i - 1)} \\ J_{(n_i - 1) \times 1} & (n - n_i - \lambda)I_{n_i - 1} + J_{n_i - 1} \end{vmatrix} \\ &= (n - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & J_{1 \times (n_i - 1)} \\ J_{(n_i - 1) \times 1} & (n - n_i - \lambda)I_{n_i - 1} + J_{n_i - 1} \end{vmatrix} \\ &= (n - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & J_{1 \times (n_i - 1)} \\ O_{(n_i - 1) \times 1} & (n - n_i - \lambda)I_{n_i - 1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Bằng cách trừ tất cả các hàng từ hàng thứ 2 cho đến hàng thứ n_i cho hàng thứ nhất, ta nhận được

$$\det\left[(n - n_i - \lambda)I_{n_i} + J_{n_i}\right] = (n - \lambda)(n - n_i - \lambda)^{n_i - 1}$$

Kết hợp các kết quả vừa tính toán được ở trên ta nhận được kết quả sau cùng:

$$\det\left(L\left(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}\right) - \lambda I\right) = -\lambda (n - \lambda)^{k-1} \prod_{i=1}^k (n - n_i - \lambda)^{n_i - 1}$$

Cuối cùng, từ kết quả này ta nhận thấy rằng phổ của ma trận Laplacian gồm $(k + 2)$ giá trị riêng như sau: giá trị riêng $\lambda_1 = 0$ với số bội bằng 1, $\lambda_{i+1} = n - n_i$ với số bội bằng $(n_i - 1)$ ($i = 1, \dots, k$) và giá trị riêng $\lambda_{k+2} = n$ với số bội bằng $(k - 1)$.

Áp dụng kết quả 4) ta suy ra

$$\kappa\left(L\left(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}\right)\right) = \frac{1}{n} n^{k-1} (n - n_1)^{n_1 - 1} \dots (n - n_k)^{n_k - 1} = n^{k-2} \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i - 1}$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Evans Doe Ocansey, The Matrix Tree Theorem, A Talk given in the Mathematics Postgraduate Seminar at Stellenbosch University on 30th April 2012.
- [2]. Junliang Cai, Xiaoli Liu, The Number of Spanning Trees in Generalized Complete Multipartite Graphs of Fan-Type, ??/??/2011
- [3]. Trương Phước Nhân, Công thức tính số cây khung, 19/12/2018.