

Cực trị tổ hợp

Trương Phước Nhân, 21/07/2018

1. Hệ tập

Một hệ tập trên tập nền X là một tập $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ trong đó I là một tập chỉ số nào đó và mỗi A_i là một tập con của X .

Thông thường tập nền mà ta khảo sát là hữu hạn, trong trường hợp đó ta thường chọn tập $[n] := \{1, \dots, n\}$ để khảo sát. Trong trường hợp này họ tập $\mathcal{F}$ là hữu hạn và ta thường viết lại nó dưới dạng $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$.

Sau đây ta sẽ trình bày một số khái niệm cơ bản về hệ tập rất hữu ích cho quá trình khảo sát.

1) Hệ tập gồm 2^n tập con của $[n]$ được ký hiệu là $\mathcal{B}_n$ và nó thường được gọi là hình lập phương Boolean n -chiều hoặc là dàn Boolean.

2) Ta dùng ký hiệu $\binom{[n]}{k}$ để chỉ họ các tập con của $[n]$ gồm chính xác k phần tử; nó được gọi là phân cấp thứ k của hình lập phương Boolean. Ta cũng dùng $\binom{[n]}{\leq k}$ để chỉ họ các tập con của $[n]$ có tối đa k phần tử; $\binom{[n]}{\geq k}$ chỉ họ các tập con của $[n]$ có tối thiểu k phần tử; $\binom{[n]}{[k, l]}$ chỉ họ các tập con của $[n]$ có số phần tử nằm giữa k và l , trong đó $0 \leq k \leq l \leq n$.

3) Với phần tử x cố định thuộc tập nền X , $\mathcal{F}^{(x)}$ ký hiệu sao tâm x : họ các tập con của X chứa phần tử x . Tổng quát, với $A \subseteq X$, $\mathcal{F}^{(A)}$ ký hiệu sao tâm A : họ các tập con của X chứa có tập A như một tập con.

Nhận xét. Thứ nhất, tồn tại một song ánh giữa $\mathcal{B}_n$ và tập các chuỗi độ dài n được lập từ $\{0, 1\}$, song ánh này biến một tập $A \in \mathcal{B}_n$ thành vector χ_A trong đó thành phần thứ i bằng 1 nếu $i \in A$ và 0 trong trường hợp ngược lại; χ_A được gọi là vector đặc trưng của A . Thứ hai, $\mathcal{B}_n$ được phân hoạch thành $\bigcup_{k=0}^n \binom{[n]}{k}$. Ta cũng thường biểu diễn trực quan $\mathcal{B}_n$ trên mặt phẳng giấy dưới dạng một sơ đồ lưới với đỉnh dưới cùng biểu diễn cho tập rỗng $\emptyset$, đỉnh trên cùng biểu diễn tập $[n]$.

Kể đến trước khi đi vào khảo sát các vấn đề cụ thể về cực trị hệ tập ta sẽ liệt kê sơ qua một danh sách các vấn đề mấu chốt:

- Số thành viên tối đa có thể có của một hệ tập nếu như không có hai tập nào của hệ đó rời nhau? nếu như giao của hai tập bất kỳ của họ có tối thiểu t phần tử, với $t \geq 1$ là một số cố định nào đó? nếu các tập mà ta khảo sát bị hạn chế về kích thước, cụ thể là chúng chỉ thuộc một họ $\binom{[n]}{k}$, với một k nào đó?

- Một hệ tập trên $[n]$ thỏa mãn tính chất giao của hai tập con A, B phân biệt luôn bằng một hằng số λ , cụ thể là $|A \cap B| = \lambda$ với mọi $A \neq B$, có thể có tối đa bao nhiêu thành viên?

- Có thể chọn ra tối đa bao nhiêu thành viên từ hình lập phương Boolean sao cho không có thành viên nào chứa lồng thành viên khác trong nó?

1.1. Họ giao

Một hệ tập $\mathcal{F}$ gọi là họ giao nếu $A \cap B = \emptyset$ với mọi $A, B \in \mathcal{F}$.

Câu hỏi 1. Tính xem $\max |\mathcal{F}|$ là bao nhiêu, trong đó $\max$ được lấy trên tất cả các họ giao có thể có trên tập nền $[n]$?

Kết quả 1. Cho $\mathcal{F}$ là một họ giao trên tập nền $[n]$, $n = 0$. Khi đó, $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

Chứng minh. Khẳng định là hiển nhiên với $n = 0$. Với $n > 0$, phân hoạch $\mathcal{B}_n$ thành 2^{n-1} cặp có dạng $(A, [n] \setminus A)$. Lưu ý rằng một phân hoạch nêu trên luôn tồn tại: xét ánh xạ $f : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ cho bởi $f(A) = [n] \setminus A$

là một song ánh với thỏa mãn f^2 là ánh xạ đồng nhất và không có điểm bất động nên các hoán vị của $\mathcal{B}_n$ tương ứng với f có 2^{n-1} chu trình và mỗi chu trình có độ dài bằng 2, các chu trình này xác định cho ta phân hoạch thỏa mãn yêu cầu). Một họ giao chỉ có thể chứa tối đa một phần tử trong mỗi cặp này nên chúng có tối đa là 2^{n-1} .

Nhận thấy rằng có một cách khá đơn giản để tạo ra một họ giao có chính xác 2^{n-1} thành viên đó chính là chọn $\mathcal{F}^{(x)}$, với một x phần tử nào đó, không quá khó để ta tính được hệ tập này có 2^{n-1} thành viên.

Song ta cũng có thể chỉ ra hệ tập giao có số thành viên cực đại mà không phải là $\mathcal{F}^{(x)}$ như sau:

Trong trường hợp n lẻ, ta chọn $\mathcal{F}_{\text{large}} := \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} : k \geq \frac{n}{2} \right\}$ và bằng cách áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu đối ngẫu

với lưu ý rằng $|A| > \frac{n}{2}$, với mọi $A \in \mathcal{F}_{\text{large}}$, ta dễ dàng suy ra $\mathcal{F}_{\text{large}}$ là hệ tập giao. Đồng thời sử dụng tính đối

xứng của hệ số nhị thức, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ta tính được $|\mathcal{F}_{\text{large}}| = \sum_{k > \frac{n}{2}} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Trong trường hợp n chẵn, nếu sử dụng cùng ý tưởng như trên tức là chọn tất cả các tập con có số phần tử tối thiểu là $\frac{n}{2} + 1$ thì ta có thể đảm bảo tính giao của các thành viên nhưng bị hụt số lượng nên ta sẽ bổ sung

thêm vào hệ tập này một số tập con có đúng $\frac{n}{2}$ nhưng vẫn thỏa mãn giao của hai tập bất kỳ thuộc hệ vẫn

khác rỗng; chẳng hạn ta có thể bổ sung vào $\left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} : k \geq \frac{n}{2} + 1 \right\}$ các tập con của $[n]$ có đúng $\frac{n}{2}$ phần tử và

chứa phần tử 1. Do đó, với n chẵn, ta đặt $\left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} : k \geq \frac{n}{2} + 1 \right\} \cup \left\{ A \in \begin{bmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{bmatrix} : 1 \in A \right\}$. Bằng cách tính toán tương tự ta

cũng thu được $|\mathcal{F}_{\text{large}}| = 2^{n-1}$.

Một số nghiên cứu đã được thực hiện dành tìm hiểu xem có thể có tối đa bao nhiêu họ giao có thể thỏa mãn tính chất vừa nêu và sau đây là một kết quả thu nhận được bởi Erdős và Hindman.

Kết quả 2. Cho $n = 2m$. Khi đó, có tối thiểu là $2^{\binom{2m-1}{m-1}}$ họ giao trên tập nền $[n]$ có chính xác 2^{n-1} thành viên và tồn tại một hằng số $c > 0$ sao cho số các họ giao trên tập nền $[n]$ có chính xác 2^{n-1} thành viên tối đa chỉ là $2^{(1+c(\log m)/m)\binom{2m-1}{m-1}}$.

Trong trường hợp n lẻ ta cũng có một khẳng định tương tự như vừa nêu.

1.2. Kỹ thuật shifting

Bây giờ ta xem xét vấn đề trong trường hợp nếu tăng thêm hạn chế lên điều kiện giao của hai tập của hệ.

Ta nói rằng một hệ tập $\mathcal{F}$ là một họ t -giao nếu $|A \cap B| \geq t$, với mỗi $A, B \in \mathcal{F}$.

Câu hỏi 2. Cho trước n và t với $n \geq t \geq 1$. Tính xem $\max |\mathcal{F}|$ là bao nhiêu, trong đó $\max$ được lấy trên tất cả các họ t -giao có thể có trên tập nền $[n]$?

Kết quả 3. Với mỗi $n \geq t \geq 1$, nếu $\mathcal{F}$ là một họ t -giao trên tập nền $[n]$ thì $|\mathcal{F}| \leq \sum_{k \geq \frac{n+t}{2}} \binom{n}{k}$.

Đầu tiên ta nhắc lại một số điểm về kỹ thuật shifting trước khi tiến hành chứng minh cụ thể đánh giá vừa nêu.

Cấu trúc vốn có của hệ tập cung cấp cho ta rất ít thông tin; điều này chính là một trong những nguyên nhân khiến cho các bài toán liên quan đến hệ tập trở nên rất khó khăn. Phương pháp shifting cho phép ta bổ sung thêm cho hệ tập một số tính chất cần thiết để làm đơn giản đi quá trình khảo sát bài toán. Ý tưởng nằm ở chỗ bắt đầu từ một hệ tập thỏa mãn yêu cầu ta chuyển nó thành hệ tập mới có tính chất tốt hơn hệ tập cũ nhưng không làm thay đổi số thành viên của hệ hoặc tính chất quan trọng của hệ. Quá trình được thực hiện nhiều lần cho đến khi nào thu được hệ tập có được tính chất mong và ta sử dụng tính chất này để đánh giá số thành viên.

Cho trước $1 \leq i < j \leq n$, với mỗi $A \subseteq [n]$ sao cho $i \notin A$ và $j \in A$, ta định nghĩa ij -shift của tập A là tập $S_{ij}(A) := (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$.

Chú ý rằng $|S_{ij}(A)| = |A|$ và đồng thời S_{ij} là một song ánh từ họ các tập có chứa j nhưng không chứa i vào họ các tập có chứa i nhưng không chứa j .

Cho trước $1 \leq i < j \leq n$ và một hệ tập $\mathcal{F}$, đặt $\mathcal{F}_{ij}$ là hệ gồm các tập $A \in \mathcal{F}$ có chứa j nhưng không chứa i và tập $S_{ij}(A)$ không thuộc hệ $\mathcal{F}$, ta định nghĩa ij -shift của hệ $\mathcal{F}$ là hệ tập $S_{ij}(\mathcal{F})$ mới được xác định bởi hệ thức $S_{ij}(\mathcal{F}) = (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{ij}) \cup \{S_{ij}(A) : A \in \mathcal{F}_{ij}\}$.

Chú ý rằng $|S_{ij}(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$.

Một hệ tập $\mathcal{F}$ được gọi là ổn định nếu $S_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ với mọi $i < j$.

Chú ý rằng tính ổn định ở đây nghĩa là với mọi $i < j$ mà có $A \in \mathcal{F}$ sao cho $j \in A$ và $i \notin A$ thì ta sẽ phải có $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$.

Khẳng định 1. Với mọi hệ tập $\mathcal{F}$ cho trước, bằng cách thực hiện lặp lại liên tục thao tác “nếu $S_{ij}(\mathcal{F}) \neq \mathcal{F}$ với $i < j$ nào đó thì ta thay hệ tập $\mathcal{F}$ bởi ij -shift của $\mathcal{F}$ ” thì sau một số hữu hạn bước ta sẽ thu được một hệ tập ổn định.

Chứng minh. Cho tương ứng với một hệ tập $\mathcal{F}$ cho trước một số $s(\mathcal{F}) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \sum_{k \in A} k$. Khi đó, nếu

$S_{ij}(\mathcal{F}) \neq \mathcal{F}$ với $i < j$ nào đó thì ta có $s(S_{ij}(\mathcal{F})) < s(\mathcal{F})$. Do hàm s không thể nhận các giá trị âm nên các giá trị của nó sẽ dừng lại sau một số hữu hạn bước lặp.

Sau đây là một tính chất thú vị khác của toán tử S_{ij} .

Khẳng định 2. Cho $\mathcal{F}$ là một họ t -giao trên tập nền $[n]$. Khi đó, với mọi $1 \leq i < j \leq n$, hệ tập $\mathcal{F}' = S_{ij}(\mathcal{F})$ cũng là một t -giao.

Chứng minh. Cố định $A', B' \in \mathcal{F}'$.

Nếu $A', B' \in \mathcal{F}$ thì hiển nhiên ta có $|A' \cap B'| \geq t$.

Nếu $A', B' \notin \mathcal{F}$ thì $A := (A' \setminus \{i\}) \cup \{j\}, B := (B' \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{F}$, nên $|A \cap B| \geq t$.

Đồng thời, $A' \cap B' = (A \cap B \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ và $i \notin A \cup B$ nên $|A' \cap B'| = |A \cap B| \geq t$.

Phần việc còn lại của ta là xem xét trường hợp $A' \in \mathcal{F}, B' \notin \mathcal{F}$, ta có $B = (B' \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{F}$ nên $|A' \cap B| \geq t$. Ta chia thành ba trường hợp con để tiếp tục khảo sát.

- Nếu $j \notin A' \cap B$ thì từ cách xây dựng B' từ B , loại bỏ phần tử j và bổ sung vào phần tử i , $|A' \cap B'| \geq |A \cap B| \geq t$.
- Nếu $j \in A' \cap B$ và $i \in A'$ thì từ cách xây dựng B' từ B , $|A' \cap B'| = |A \cap B| \geq t$.
- Nếu $j \in A' \cap B$ và $i \notin A'$ thì $A'' := (A' \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$. Khi đó, $|A' \cap B'| = |A'' \cap B| \geq t$, do i và j không tham gia vào hệ thức trên, nên $|A' \cap B'| = |A'' \cap B| \geq t$.

Trở lại với mục tiêu ban đầu của ta đó là chứng minh tính đúng đắn của kết quả 1.

Nhận xét. Ta chỉ cần chứng minh khẳng định cho trường hợp $n+t$ chẵn; trường hợp $n+t$ lẻ phương pháp lập luận được thực hiện tương tự.

Ta chứng minh bằng quy nạp toán học theo $n \geq 1$ cho mệnh đề $P(n)$: “Với mọi t thỏa mãn $n \geq t \geq 1$ sao cho $n+t$ là số chẵn, nếu $\mathcal{F}$ là một họ t -giao trên tập nền $[n]$ thì $|\mathcal{F}| \leq \sum_{k \geq \frac{n+t}{2}} \binom{n}{k}$ ”.

Với $n=1$, chỉ có một giá trị phù hợp của t đó là $t=1$, khẳng định là hiển nhiên.

Với $n=2$, chỉ có một giá trị phù hợp của t đó là $t=2$, khẳng định là hiển nhiên.

Với $n=3$, các giá trị phù hợp của t đó là $t=3$ và $t=1$, khẳng định là hiển nhiên.

Giả sử $n \geq 4, n \geq t \geq 1, n+t$ chẵn và khẳng định của bài toán là đúng với mọi cặp (n', t') thỏa mãn điều kiện $n' \geq t' \geq 1, n' + t'$ chẵn và $n' < n$.

Áp dụng khẳng 1, ta có thể giả sử hệ $\mathcal{F}$ là ổn định. Để có thể áp dụng giả thiết quy nạp cho họ $\mathcal{F}$, ta chia $\mathcal{F}$ thành hai phần con :

$$\mathcal{F}_1 := \{A \setminus \{1\} : A \in \mathcal{F}, 1 \in A\},$$

$$\mathcal{F}_0 := \{A : A \in \mathcal{F}, 1 \notin A\}.$$

Hiển nhiên, $\mathcal{F}_1$ là một họ $(t-1)$ -giao trên một tập nền có $n-1$ phần tử nào đó, áp dụng giả thiết quy nạp,

$$|\mathcal{F}_1| \leq \sum_{k \geq \frac{n+t-2}{2}} \binom{n-1}{k} = \sum_{k \geq \frac{n+t}{2}} \binom{n-1}{k-1}.$$

Chú ý, hiển nhiên $\mathcal{F}_0$ là một họ t -giao trên một tập nền có $n-1$ phần tử nào đó, nhưng ta không thể áp dụng giả thiết quy nạp trong trường hợp này do $n+t-1$ lẻ.

Chìa khóa cho vấn đề của ta chính là $\mathcal{F}_0$ là một họ $(t+1)$ -giao!

Thật vậy, cố định $A, B \in \mathcal{F}_0$ và chọn ra một phần tử $j \in A \cap B$.

Do $j \in A$ và $1 \notin A$ ta suy ra $A' := (A \setminus \{j\}) \cup \{1\} \in \mathcal{F}$ nên $|A' \cap B| \geq t$

Đồng thời, do $1 \notin B, j \in B$ và $j \in A'$, nên từ hệ thức $A \cap B = (A' \cap B) \cup \{j\}$ ta suy ra được rằng $|A \cap B| = |A' \cap B| + 1 \geq t+1$.

Áp dụng giả thiết quy nạp cho họ $\mathcal{F}_0$, $|\mathcal{F}_0| \leq \sum_{k \geq \frac{n+t}{2}} \binom{n-1}{k}$.

Do $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1|$, bằng cách áp dụng hằng đẳng thức Pascal, nên $|\mathcal{F}| \leq \sum_{k \geq \frac{n+t}{2}} \binom{n}{k}$.

Một phương pháp tự nhiên để xây dựng họ tập thỏa mãn đánh giá nêu trong khẳng định trên đó chính là mở rộng phương pháp đã thực hiện cho trường hợp họ giao, $t=1$, cho trường hợp họ t -giao.

Đầu tiên, nếu ta cố định một tập A gồm t phần tử nào đó thì $\mathcal{F}^{(A)}$ là một họ t -giao và họ này gồm có 2^{n-t} thành viên, nên ý tưởng mở rộng theo cách làm đầu bị phá sản.

Ta cố mở rộng ý tưởng của cách làm thứ hai lên cho trường hợp họ t -giao. Ta cũng chia làm hai trường hợp để khảo sát.

Nếu $n+t$ chẵn thì ta đặt $\mathcal{F}_{\text{large}} := \left\{ \begin{matrix} [n] \\ \geq \frac{n+t}{2} \end{matrix} \right\}$ và từ đánh giá $n \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \geq n+t - |A \cap B|$

ta suy ra $|A \cap B| \geq t$ với mọi $A, B \in \mathcal{F}_{\text{large}}$.

Nếu $n+t$ lẻ thì ý tưởng của ta là sẽ chọn các tập nằm trong các cấp đủ lớn lập thành một hệ tập. Lý do của việc làm này là để có thể áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu dạng đối ngẫu để chỉ ra tính t -giao của hệ

tập đó. Từ ý tưởng đó ta chọn $\left\{ \begin{matrix} [n] \\ \geq \frac{n+t+1}{2} \end{matrix} \right\}$, hai tập bất kỳ thuộc họ này giao nhau tại tối thiểu $t+1$ phần tử.

Nhưng lưu ý rằng hệ tập của ta còn thiếu khá nhiều thành viên so với một họ t -giao lý tưởng. Để đạt đến

được số lượng thành viên hoàn hảo ta sẽ bổ sung thêm vào họ này một số tập con gồm $\frac{n+t-1}{2}$ để sao cho bản thân các tập này là một họ t -giao và có số thành viên nhiều nhất có thể được. Ý tưởng đầu tiên đến với ta là chọn tất cả các tập con gồm $\frac{n+t-1}{2}$ phần tử cùng chứa một tập con có chính xác t phần tử; một họ như vậy có $\binom{n-t}{\frac{n-t-1}{2}}$ thành viên. Ý tưởng thứ hai là chọn tất cả các tập con gồm $\frac{n+t-1}{2}$ phần tử của tập $\{2, \dots, n\}$, bằng cách áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu dạng đối ngẫu ta chỉ ra được họ này cũng là một họ t -giao; một họ như vậy có $\binom{n-1}{\frac{n+t-1}{2}}$.

Công việc tiếp theo của ta là đánh giá thử xem ý tưởng nào sẽ tối ưu hơn.

Với $n=1$, số thành viên của hai cách là như nhau, nhưng với $t > 1$ và $n+t$ lẻ thì $\binom{n-1}{\frac{n+t-1}{2}} > \binom{n-t}{\frac{n-t-1}{2}}$

Thật vậy, sử dụng do tính đối xứng $\binom{n-1}{\frac{n+t-1}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n-t-1}{2}}$, khẳng định trên tương đương với

$\binom{n-1}{\frac{n-t-1}{2}} > \binom{n-t}{\frac{n-t-1}{2}}$, điều này hiển nhiên đúng.

Do đó, ý tưởng thứ hai tối ưu hơn.

Như vậy trong trường hợp $n+t$ lẻ ta chọn $\mathcal{F}_{\text{large}} := \left\{ \begin{matrix} [n] \\ \geq \frac{n+t+1}{2} \end{matrix} \right\} \cup \left\{ A \in \left\{ \begin{matrix} [n] \\ \geq \frac{n+t-1}{2} \end{matrix} \right\} : 1 \notin A \right\}$.

Bằng cách tính toán trực tiếp, ta thu được

$$|\mathcal{F}_{\text{large}}| = \begin{cases} \sum_{k \geq \frac{n+t}{2}} \binom{n}{k}, & \text{nếu } n+t \text{ chẵn,} \\ \binom{n-t}{(n+t-1)/2} + \sum_{k \geq \frac{n+t+1}{2}} \binom{n}{k}, & \text{nếu } n+t \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Đây cũng chính là giá trị trong đánh giá mà ta đã tìm được.

1.3. Định lý Erdős – Ko – Rado

Trong các phần trước các thành viên của hệ tập được xét có số phần tử tùy ý. Bây giờ ta hạn chế vấn đề bằng cách chỉ tập trung khảo sát mỗi cấp của hình lập phương Boolean, có nghĩa là hạn chế khảo sát trên các hệ tập mà tất cả các thành viên đều có cùng số phần tử. Một hệ này thỏa mãn tính chất như vậy thường được gọi là hệ tập đều.

Câu hỏi 3. Cho $\mathcal{F}$ là một họ giao trên tập nền $\begin{bmatrix} [n] \\ r \end{bmatrix}$, $0 \leq r \leq n$. Tính xem $\mathcal{F}$ có thể có tối đa bao nhiêu thành viên?

Nếu $n < 2r$ thì hai tập con bất kỳ sẽ có giao khác rỗng nên một họ giao $\mathcal{F}$ có tối đa là $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ thành viên.

Với $n = 2r$, do chỉ có tối đa là một thành viên trong mỗi cặp $(A, [n] \setminus A)$, $A \in \left\{ \begin{bmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{bmatrix} \right\}$, thuộc hệ tập $\mathcal{F}$,

nên $|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2} \binom{n}{n/2} = \binom{n-1}{\frac{n}{2}-1}$ nên một họ giao $\mathcal{F}$ có tối đa là $\binom{n-1}{\frac{n}{2}-1}$ thành viên, chẳng hạn ta có thể chọn hệ

tập gồm tất cả các tập con gồm $\frac{n}{2}$ của $[n]$ chứa phần tử 1 để làm ví dụ.

Tổng quát hơn, nếu $n \geq 2r$ thì một họ giao $\mathcal{F}$ của $\left\{ \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \right\}$ có tối đa là $\binom{n-1}{r-1}$ thành viên và ta có thể chọn hệ các tập con của $\left\{ \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \right\}$ cùng chứa một phần tử cố định để làm ví dụ. Khẳng định này được đề xuất lần đầu tiên bởi ba nhà toán học Erdős, Ko và Rado và nó là một trong những kết quả rất nổi tiếng của lý thuyết cực trị tập hợp.

Kết quả 4. (Erdős-Ko-Rado)

Với mọi $n \geq 2r \geq 2$, nếu $\mathcal{F}$ là một họ giao r -đều trên tập $[n]$ thì $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1}$.

Đây là một kết quả quan trọng của lý thuyết hệ tập và hiện nay có ít nhất là sáu cách chứng minh khác nhau cho kết quả này. Trong nội dung hạn chế của bài viết này, ta sẽ chỉ trình bày hai cách. Chứng minh thứ nhất sử dụng kỹ thuật shifting và chứng minh thứ hai dựa trên ý tưởng đếm bằng hai cách.

Chứng minh thứ nhất. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học theo $n \geq 2$ cho mệnh đề

$P(n)$: “Với mọi $n \geq 2r \geq 2$, nếu $\mathcal{F}$ là một họ giao r -đều trên tập nền $[n]$ thì $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1}$ ”.

Với $n = 2$, khẳng định là hiển nhiên nên ta giả sử rằng $n > 2$.

Trường hợp $n = 2r$, khẳng định của bài toán đã được kiểm chứng rồi nên ta có thể giả sử rằng $n > 2r$. Áp dụng khẳng định 2, ta có thể giả sử rằng $\mathcal{F}$ là một họ giao t -đều. Chìa khóa cho chứng minh nằm ở khẳng định $A \cap B \neq \emptyset, A \cap B \cap [2r] \neq \emptyset$, với mọi $A, B \in \mathcal{F}$, khẳng định này được suy ra từ tính ổn định của hệ $\mathcal{F}$.

Tiến hành phân hoạch $\mathcal{F}$ theo kích thước của phần giao của các thành viên của họ $\mathcal{F}$ với $[2r]$; điều đó có nghĩa là ta phân hoạch $\mathcal{F}$ thành các hệ tập $\mathcal{F}_k = \{A \in \mathcal{F} : |A \cap [2r]| = k\}$, với $k = 0, \dots, r$.

Chú ý rằng do $A \cap B \cap [2r] \neq \emptyset$, với mọi $A, B \in \mathcal{F}$ nên $A \cap [2r] \neq \emptyset$, ta suy ra $\mathcal{F}_0 = \emptyset$ và $|\mathcal{F}| = \sum_{k=1}^r |\mathcal{F}_k|$.

Với mỗi $k = 1, \dots, r$, ta xét tập $\mathcal{F}'_k = \{A \cap [2r] : A \in \mathcal{F}_k\}$. Mỗi thành viên của $\mathcal{F}'_k$ có thể được mở rộng thành tối đa là $\binom{n-2r}{r-k}$ thành viên của $\mathcal{F}_k$, nên $|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=1}^r |\mathcal{F}'_k| \binom{n-2r}{r-k}$.

Nếu chỉ sử dụng đánh giá $|\mathcal{F}'_k| \leq \binom{2r}{k}$ và hằng đẳng thức Vandermonde ta thu được đánh giá thô

$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{r}$. Nhưng chú ý rằng $\mathcal{F}'_k$ là một họ giao k -đều trên tập nền $[2r]$ và $n > 2r \geq k$ nên từ giả thiết quy

nap ta có $|\mathcal{F}'_k| \leq \binom{2r-1}{k-1}$ và do đó $|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=1}^r \binom{2r-1}{k-1} \binom{n-2r}{r-k} = \binom{n-1}{r-1}$.

Chứng minh thứ hai. (Katona) Trong phép chứng minh này ta đặt thứ tự tuần hoàn trên tập nền. Với mỗi thứ tự tuần hoàn của $[n]$, ta đếm số các thành viên của $\mathcal{F}$ xuất hiện như một khối liền nhau trong thứ tự tuần hoàn đó. Cụ thể, xét tập $\mathcal{P}$ gồm tất cả các cặp (A, σ) , trong đó A là một thành viên của họ $\mathcal{F}$, σ là một hoán vị $\sigma(1)\dots\sigma(n)$ của $[n]$ chỉ có duy nhất một chu trình và A xuất hiện như một khối liền nhau trong

σ , có nghĩa là tồn tại một số k , $1 \leq k \leq n$, sao cho $A = \{\sigma(k), \sigma(k+1), \dots, \sigma(k+r-1)\}$, trong đó phép cộng được thực hiện theo modulo n .

Với mỗi một trong $|\mathcal{F}|$ cách chọn $A \in \mathcal{F}$, có chính xác $|A|!(n-|A|)! = r!(n-r)!$ hoán vị chu trình σ sao cho A xuất hiện như một khối liền nhau trong σ và do đó $|\mathcal{P}| = |\mathcal{F}|r!(n-r)!$.

Bây giờ ta tính giá trị này theo một hướng khác. Cố định một hoán vị chu trình σ . Nếu ta nhận xét rằng có tối đa n thành viên $A \in \mathcal{F}$ sao cho A xuất hiện như một khối liền nhau trong σ , mỗi khối liền nhau này đều kích thước bằng r , thì ta có $|\mathcal{P}| \leq n(n-1)!$, đây là một đánh giá thô. Do đó để cải thiện đánh giá trên ta sẽ cải thiện lại cận trên cho số các thành viên $A \in \mathcal{F}$ sao cho A xuất hiện như một khối liền nhau trong σ .

Giả sử $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(r)\} \in \mathcal{F}$. Nhận thấy rằng có chính xác $2r-1$ khối liền nhau có độ dài r trong σ có giao với khối này. Do $n \geq 2r$ nên tất cả các khối này đều phân biệt, tất cả những gì mà ta cần kiểm chứng đó là khối bắt đầu tại $\sigma(r)$ sẽ không thể kết thúc tại $\sigma(1)$; điều này là hiển nhiên, bởi vì nó kết thúc tại $\sigma(2r-1)$. Bây giờ ta thực hiện phân $2r-1$ các khối này thành một khối đơn (khối bắt đầu tại $\sigma(1)$ và kết thúc tại $\sigma(r)$) và $r-1$ cặp (khối kết thúc tại $\sigma(1)$ với khối bắt đầu tại $\sigma(2)$, khối kết thúc tại $\sigma(2)$ với khối bắt đầu tại $\sigma(3)$, ..., khối kết thúc tại $\sigma(r-1)$ với khối bắt đầu tại $\sigma(r)$). Nhận thấy rằng chỉ có thể có tối đa là một thành viên trong mỗi cặp thuộc họ $\mathcal{F}$, bởi vì $\mathcal{F}$ là một họ giao, nên số các thành viên $A \in \mathcal{F}$ sao cho A xuất hiện như một khối liền nhau trong σ tối đa là $1 + (r-1) = r$.

$$\text{Do đó, } |\mathcal{P}| \leq r(n-1)! \text{ nên } |\mathcal{F}| \leq \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1}.$$

1.4. Hệ đại diện phân biệt và định lý Hall

Trước khi khảo sát tiếp các vấn đề về cực trị tập hợp ta sẽ nhắc lại một số điểm về lý thuyết hệ đại diện phân biệt tạo cơ sở cho các khảo sát quan trọng ở phần sau.

Cho $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ là một hệ tập trên tập nền $[n]$. Một hệ đại diện phân biệt (SDR) của hệ $\mathcal{F}$ là một vector $(a_1, \dots, a_m)$ gồm các phần tử khác nhau được chọn từ $[n]$ thỏa mãn điều kiện $a_i \in A_i, i = 1, \dots, m$.

Hiển nhiên rằng nếu tồn tại $I \subset [n]$ sao cho $\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| < |I|$ thì không thể tồn tại một hệ đại diện phân biệt của hệ $\mathcal{F}$, nếu hệ $\mathcal{F}$ có một SDR thì $\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|$, với mọi $I \subset [n]$. Thật ngạc nhiên là đây cũng chính là điều kiện để tồn tại một SDR. Kết quả sau được đề xuất lần đầu tiên bởi Hall, nhưng như chúng ta cũng có thể thấy rằng nó cũng được nghiên cứu một cách độc lập bởi một số nhà toán học khác.

Kết quả 5. Cho $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ là một hệ tập trên tập nền $[n]$.

Điều kiện cần và đủ để tồn tại một SDR cho hệ $\mathcal{F}$ là $\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|$, với mọi $I \subset [n]$.

Điều kiện nêu trong khẳng định thường được gọi là điều kiện Hall.

Trước khi bắt tay vào kiểm chứng tính đúng đắn của khẳng định vừa nêu, ta biểu diễn lại bài toán theo ngôn ngữ của lý thuyết đồ thị. Một đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y, E)$ với các lớp X và Y gồm

$X = \{x_1, \dots, x_m\}$ và $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ ($X \cup Y$ là tập tất cả các đỉnh của đồ thị) và tập E gồm các phần tử có dạng (x_i, y_j) với $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ (E là tập các cạnh của đồ thị). Một ghép cặp trong G là một tập các cạnh $M = \{(x_{i_1}, y_{j_1}), \dots, (x_{i_k}, y_{j_k})\}$ với tính chất các x_{i_j} phân biệt và các y_{j_j} cũng phân biệt. Một ghép cặp được gọi là bão hòa X nếu nó gồm m phần tử, điều này có nghĩa là mỗi x_i đều xuất hiện đúng một lần trong các x_{i_j} . Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là nếu cho trước một đồ thị lưỡng phân thì khi nào ta có thể xây dựng được một ghép cặp bão hòa X ?

Như trong phân tích đối với bài toán SDR, điều kiện cần để tồn tại một ghép cặp như vậy đó là

$$\left| \{y_j : (x_i, y_j) \in E \text{ với một } i \in I \text{ nào đó}\} \right| \geq |I|, \text{ với mọi } I \subseteq [m].$$

Điều kiện vừa nêu thường được gọi là điều kiện đám cưới Hall. Tương tự như đối với SDR, điều kiện này cũng chính là điều kiện đủ.

Kết quả 6.

Cho $G = (X, Y, E)$ là một đồ thị lưỡng phân hữu hạn với các đỉnh của tập X được đánh số bởi $[m]$.

Điều kiện cần và đủ để có thể xây dựng được một ghép cặp bão hòa X là điều kiện đám cưới Hall được thỏa mãn với mọi $I \subseteq [m]$.

Trước khi chứng minh khẳng định vừa nêu ta sẽ chỉ ra rằng kết quả 5 thật ra là một hệ quả của kết quả 6.

Thật vậy, giả sử $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ là một hệ tập trên tập nền $[n]$. Ta xây dựng một đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y, E)$ từ hệ tập $\mathcal{F}$ như sau: $X = \{A_1, \dots, A_m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$ và $(A_i, j) \in E$ nếu $j \in A_i$. Khi đó, điều kiện Hall đối với hệ tập $\mathcal{F}$ với một $I \subseteq [m]$ nào đó cũng chuyển thành điều kiện đám cưới Hall đối với G cho cùng tập I , nên nếu tồn tại một SDR thì cũng sẽ tồn tại một ghép cặp bão hòa và ngược lại nếu $(A_{i_1}, j_1), \dots, (A_{i_m}, j_m)$ là một ghép cặp bão hòa của G thì $(j_1, \dots, j_m)$ là một SDR của hệ $\mathcal{F}$.

Tính cho đến nay có nhiều cách khác nhau để chứng minh định lý đám cưới Hall. Nhưng trong nội dung bài viết này ta sẽ chỉ trình bày chứng minh ngắn nhất trong số chúng.

Chứng minh. Điều kiện cần để tồn tại một ghép cặp bão hòa là hiển nhiên. Bây giờ, giả sử điều kiện đám cưới Hall được thỏa mãn với mọi $I \subseteq [m]$. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo m đồ thị G có một ghép cặp bão hòa X .

Với $m=1$, khẳng định là hiển nhiên.

Với $m>1$, đầu tiên ta giả sử rằng điều kiện mạnh hơn của điều kiện Hall được thỏa mãn, cụ thể là

$$\left| \{y_j : (x_i, y_j) \in E \text{ với một } i \in I \text{ nào đó}\} \right| \geq |I| + 1, \text{ với mọi } I \subseteq [m], I \neq \emptyset, [m].$$

Bằng cách cố định phần tử j sao cho $(x_m, y_j) \in E$. Xét đồ thị $G' = (X', Y', E')$ thu được từ G bằng cách $X' = X \setminus \{x_m\}$, $Y' = Y \setminus \{y_j\}$ và E' thu được từ E bằng cách loại bỏ tất cả các cạnh có đầu mút là x_m hoặc y_j . Từ điều kiện trình bày ở trên ta dễ dàng nhận thấy rằng điều kiện đám cưới Hall được thỏa mãn cho đồ thị G' với mọi $I \subseteq [m-1]$. Áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra G' có một ghép cặp bão hòa X' , bằng cách bổ sung thêm (x_m, y_j) ta sẽ thu được một ghép cặp của G bão hòa X .

Ngược lại, nếu tồn tại một tập $J \subseteq [m]$, $J \neq \emptyset, [m]$ sao cho $\left| \{y_j : (x_i, y_j) \in E \text{ với một } i \in J \text{ nào đó}\} \right| = |J|$.

Xét hai đồ thị sau: đồ thị G_J thu được từ G bằng cách thu hẹp X trên J ,

Y trên $\{y_j : (x_i, y_j) \in E \text{ với một } i \in J \text{ nào đó}\}$ và ta chỉ giữ lại các cạnh nối giữa chúng; đồ thị G'_J thu được từ G bằng cách thu hẹp X trên $[m] \setminus J$, Y trên $Y \setminus \{y_j : (x_i, y_j) \in E \text{ với một } i \in J \text{ nào đó}\}$ và ta cũng chỉ giữ lại các cạnh nối giữa chúng. Dễ dàng nhận thấy rằng điều kiện đám cưới Hall được thỏa mãn cho đồ thị G_J với mọi $I \subseteq J$, áp dụng giả thiết quy nạp G_J có một ghép cặp M bão hòa J , nói đúng hơn là thu hẹp của X lên J .

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng đồ thị G'_J cũng thỏa mãn điều kiện đám cưới Hall với mọi $I \subseteq [m] \setminus J$.

Thật vậy, giả sử tồn tại một tập $I' \subseteq [m] \setminus J$ sao cho $\left| \{y_j : (x_i, y_j) \in E'_J \text{ với một } i \in I' \text{ nào đó}\} \right| = |I'|$.

Khi đó, $\left| \{y_j : (x_i, y_j) \in E'_J \text{ với một } i \in I' \cup J \text{ nào đó}\} \right| < |I'| + |J| = |I' \cup J|$, mâu thuẫn.

Áp dụng giả thiết quy nạp, đồ thị G'_J có một ghép cặp M' bão hòa $[m] \setminus J$. Do đó $M \cup M'$ là một ghép cặp của G bão hòa X .

Sau đây ta trình bày một hệ quả quan trọng của định lý Hall được sử dụng trong các lập luận ở phần sau của bài viết.

Kết quả 7. Cho $n \geq 1, k \geq 0$ sao cho $k+1 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Giả sử $G_{k,k+1}^n = (X, Y, E)$ là đồ thị lưỡng phân xác định bởi

$X = \binom{[n]}{k}, Y = \binom{[n]}{k+1}$ và $(A, B) \in E$ nếu $A \subseteq B$. Khi đó, đồ thị $G_{k,k+1}^n$ có một ghép cặp bão hòa X .

Chứng minh. Ta chỉ cần chỉ ra rằng với mọi hệ tập k -đều $\mathcal{F}$, hệ tập $\mathcal{F}'$ xác định bởi

$$\mathcal{F}' = \left\{ B \in \binom{[n]}{k+1} : B \supseteq A \text{ với một } A \in \mathcal{F} \text{ nào đó} \right\}$$

thỏa mãn đánh giá $|\mathcal{F}'| \geq |\mathcal{F}|$, áp dụng kết quả 6 ta có điều phải chứng minh.

Để kiểm tra tính đúng đắn của khẳng định này ta dùng sử dụng ý tưởng đếm bằng hai cách. Đầu tiên, số các cạnh của đồ thị $G_{k,k+1}^n$ bằng $|\mathcal{F}|(n-k)$, bởi vì với mỗi $A \in \mathcal{F}$ có chính xác $n-k$ tập thuộc cấp thứ $k+1$ có chứa A , nhưng đồng thời ta cũng nhận thấy rằng nó chỉ có thể tối đa là bằng $|\mathcal{F}'|(k+1)$, bởi vì với mỗi $B \in \mathcal{F}'$ có chính xác là $k+1$ tập thuộc cấp thứ k được chứa trong B nhưng không phải tập nào cũng thuộc hệ $\mathcal{F}$. Do đó, $|\mathcal{F}'| \geq \frac{n-k}{k+1} |\mathcal{F}| \geq |\mathcal{F}|$, đánh giá cuối cùng suy ra từ điều kiện $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq k+1 \geq 1$.

1.5. Đôi xích và định lý Sperner

Câu hỏi 4. Tính xem ta có thể chọn ra tối đa bao nhiêu tập con từ tập $[n]$ sao cho không có tập con nào chứa lòng tập con được chọn khác trong nó?

Một xích trong hình lập phương Boolean $\mathcal{B}_n$ là một dãy $(A_1, \dots, A_k)$ các tập con phân biệt của $[n]$ sao cho

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k,$$

Một xích được gọi là cực đại nếu như không có một tập A nào khác với các tập A_i sao cho tập $\{A_1, \dots, A_k, A\}$ tạo thành một xích.

Một phản xích là một họ $\{A_1, \dots, A_k\}$ các tập con của $[n]$ thỏa mãn $A_i \not\subset A_j$ và $A_j \not\subset A_i, 1 \leq i < j \leq k$.

Một phản xích được gọi là cực đại nếu như không có một tập A nào khác với các tập A_i sao cho $\{A_1, \dots, A_k, A\}$ lập thành một phản xích.

Do một xích bất kỳ chỉ có tối đa một tập ở mỗi cấp, từ 0 đến n , và ta có thể dễ dàng kiểm chứng được rằng với một xích cho trước đều có thể mở rộng thành một xích với $n+1$ phần tử, mỗi phần tử thuộc một cấp, và không có xích nào lớn hơn nữa nên đối với các xích thuộc hình lập phương Boolean $\mathcal{B}_n$ cách gọi cực đại và lớn nhất là như nhau, ở đây lớn nhất được tính theo số lượng các thành viên.

Đối với phản xích thì tình huống trở nên khác đi; chẳng hạn $\binom{[n]}{k}, k = 0, 1, \dots, n$, lập thành một phản xích cực đại nhưng chúng không có cùng số thành viên.

Mặt khác, từ ví dụ về các phản xích cực đại vừa nêu ở trên ta cũng nhận thấy rằng các phản xích này sẽ có số lượng thành viên đạt cực đại ở lớp giữa của hình lập phương Boolean $\mathcal{B}_n$, cụ thể $\binom{[n]}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Nếu n là

chẵn thì chỉ có duy nhất $\binom{[n]}{\lfloor n/2 \rfloor}$; nếu n lẻ thì là $\binom{[n]}{\lfloor n/2 \rfloor}$ và $\binom{[n]}{\lceil n/2 \rceil}$.

Kết quả 8. Nếu $\mathcal{A}$ là một phản xích của hình lập phương Boolean $\mathcal{B}_n$ thì $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Trong bài viết này ta sẽ hạn chế chỉ trình bày hai phép chứng minh cho khẳng định vừa nêu: chứng minh thứ nhất sử dụng kỹ thuật ghép cặp và lý thuyết poset, chứng minh thứ hai là một ý tưởng độc đáo về vận dụng phép đếm trong tổ hợp.

Chứng minh thứ nhất. Nhận xét rằng khẳng định của bài toán sẽ được thỏa mãn nếu ta có thể phân hoạch $\mathcal{B}_n$ thành $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ họ tập với mỗi họ tập có dạng một xích, bởi vì một phân xích bất kỳ có chung tối đa với một xích là một phần tử. Nếu n là số chẵn và với mỗi $0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, bằng cách áp dụng kết quả 7 ta thu được một ghép cặp từ $\binom{[n]}{k}$ vào $\binom{[n]}{k+1}$ làm bão hòa $\binom{[n]}{k}$. Đồng thời, sử dụng tính đối xứng ta cũng nhận thấy rằng tồn tại một ghép cặp từ $\binom{[n]}{k}$ vào $\binom{[n]}{k-1}$ làm bão hòa $\binom{[n]}{k}$, với mỗi $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n$. Các ghép cặp này phân hoạch $\mathcal{B}_n$ thành $\binom{n}{n/2}$ xích. Nếu n lẻ, ta cũng thực hiện tương tự như trên và sau cùng thực hiện ghép cặp giữa cấp thứ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ và cấp thứ $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ để thu được một phân hoạch của $\mathcal{B}_n$ thành $\binom{n}{n/2}$ xích.

Chứng minh thứ hai. (Lubell)

Hình lập phương Boolean $n!$ xích cực đại, các xích cực đại này được đánh số một cách tự nhiên bởi $n!$ hoán vị của $[n]$, cụ thể là hoán vị $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ tương ứng với xích

$$\emptyset \subseteq \{\sigma(1)\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2)\} \subseteq \dots \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}.$$

Cố định một phân xích $\mathcal{F}$, đặt $\mathcal{P}$ là tập các cặp $(A, \mathcal{M})$ sao cho $\mathcal{M}$ là một xích cực đại và $A \in \mathcal{M}$.

Mỗi $A \in \mathcal{F}$ xuất hiện trong chính xác $|A|!(n-|A|)!$ xích cực đại, nên $|\mathcal{P}| = \sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!(n-|A|)!.$

Mặt khác, với mỗi xích cực đại $\mathcal{M}$ có tối đa một $A \in \mathcal{F}$ sao cho $A \in \mathcal{M}$, nên $|\mathcal{P}| \leq n!$.

Do đó,
$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

Đồng thời, $\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, nên ta có
$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Từ hai đánh giá trên ta suy ra điều phải chứng minh.

2. Đồ thị

Một đồ thị G là một cặp (V, E) trong đó V là một tập gồm các phần tử được gọi là đỉnh và E là một tập gồm các cặp đỉnh không tính đến thứ tự được gọi là cạnh. Một đồ thị có thể được biểu diễn trực quan bằng một tập các điểm trên mặt phẳng tượng trưng cho các đỉnh và dùng một cung nối hai điểm để biểu diễn cạnh tương ứng trong đồ thị.

Tập các cạnh của một đồ thị có thể được coi như một hệ tập 2-đều trên tập nền V ; cách nhìn nhận này sẽ được sử dụng nhiều khi ta mở rộng các vấn đề lên cho các siêu đồ thị.

Thông thường ta sẽ sử dụng n để chỉ số đỉnh, và ký hiệu $V = \{1, \dots, n\}$ hoặc $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, và ta cũng dùng m để chỉ số cạnh. Thay vì viết các cạnh dưới dạng ký hiệu tập ta sẽ đơn giản hóa việc ký hiệu, cụ thể ta sẽ viết $ij \in E$ thay cho cách viết $\{i, j\} \in E$, với cách quy ước vừa nêu thì ij và ji được coi là dùng để chỉ cùng một cạnh. Nếu $e = ij \in E$ thì ta nói i và j liên hợp nhau hoặc i và j được nối bởi một cạnh (hoặc cụ thể hơn là được nối bởi e) hoặc i và j là các láng giềng (hoặc i là một láng giềng của j) hoặc i và j là các đầu mút e .

Tập các láng giềng của i , ký hiệu bởi $N(i)$, là tập các đỉnh j sao cho j và i được nối bởi một cạnh, và bậc của đỉnh i , ký hiệu bởi $d(i)$, là bằng $|N(i)|$.

Nếu $i \in V$ thì ta ký hiệu $G-i$, đồ thị thu được từ G bằng cách loại bỏ đi cạnh i , là một đồ thị trên tập đỉnh $V \setminus \{i\}$ và tập cạnh gồm tất cả các cạnh của G không nhận i làm một đầu mút. Nói cách khác, $G-i$ thu được từ G bằng cách loại đi đỉnh i và tất cả các cạnh có liên quan với i . Nếu $e = ij \in E$ thì ta ký hiệu $G-e = G-ij$, đồ thị thu được từ G bằng cách loại đi cạnh $e = ij$, là một đồ thị trên tập đỉnh V với tập cạnh $E \setminus \{e\} = E \setminus \{ij\}$.

Đồ thị con của đồ thị G là một đồ thị thu được từ G bằng cách loại đi một số cạnh hoặc một số đỉnh. Nói cách khác, $H = (V', E')$ là đồ thị con của đồ thị $G = (V, E)$ nếu H là một đồ thị và $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$; ta ký hiệu $H \leq G$ và nói rằng G chứa H .

Hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$ được gọi là đẳng cấu nếu ta có thể đánh thứ tự lại để chúng giống hệt nhau, điều này có nghĩa là tồn tại một song ánh $f: V \rightarrow V'$ thỏa mãn $xy \in E(G)$ khi và chỉ khi $f(x)f(y) \in E(G')$. Thông thường khi ta nói “đồ thị” thì điều mà ta đang muốn nói đến đó thật chất đó chính là “lớp các đồ thị đẳng cấu với nhau”.

Chẳng hạn, nếu ta nói “một tam giác là một đồ thị trên ba đỉnh với tất cả các cặp đỉnh đều được nối bởi một cạnh” thì chúng ta đang đề cập đến lớp đẳng cấu các đồ thị trên ba đỉnh x, y, z với tập cạnh $\{xy, xz, yz\}$, trong đó $\{x, y, z\}$ là một tập bất kỳ nào đó; và khi ta nói “ G chứa một tam giác” thì điều đó có nghĩa G chứa một đồ thị con H trong lớp đẳng cấu các đồ thị mà ta đang nói. Thông tin này ta vừa cung cấp không phải là dư thừa, bởi vì nó phải luôn được minh bạch trong tất cả các khảo sát mà ta thực hiện.

Dưới đây là một số lớp đẳng cấu các đồ thị được sử dụng thường xuyên trong các khảo sát của ta

- Đồ thị đầy đủ trên n đỉnh là đồ thị K_n trên tập đỉnh $\{1, \dots, n\}$ với tập cạnh $\binom{[n]}{2}$.
- Đồ thị rỗng trên n đỉnh là đồ thị E_n trên tập đỉnh $\{1, \dots, n\}$ với tập cạnh rỗng.
- Đồ thị lưỡng phân đầy đủ với các tham số a, b là đồ thị $K_{a,b}$ trên tập đỉnh $\{x_1, \dots, x_a\} \cup \{y_1, \dots, y_b\}$ với tập cạnh gồm tất cả các cặp $x_i y_j, 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b$. Các tập $\{x_1, \dots, x_a\}$ và $\{y_1, \dots, y_b\}$ được xem như các lớp phân hoạch của $K_{a,b}$.
- Đường đi trên n đỉnh là đồ thị P_n trên tập đỉnh $\{1, \dots, n\}$ với tập cạnh $\{12, 23, \dots, (n-1)n\}$.
- Chu trình trên n đỉnh là đồ thị C_n trên tập đỉnh $\{1, \dots, n\}$ với tập cạnh $\{12, 23, \dots, (n-1)n, n1\}$.
- Đồ thị sao trên n đỉnh là đồ thị S_n trên tập đỉnh $\{1, \dots, n\}$ với tập cạnh $\{12, 13, \dots, 1n\}$.

Chú ý rằng trong một số trường hợp các lớp đẳng cấu vừa nêu có thể bị trùng nhau, chẳng hạn đồ thị sao S_n được xem như đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{1,n-1}$ hoặc K_3 được đồng nhất với C_3 .

2.1. Định lý Mantel và định lý Turán

Câu hỏi 5. Cho trước một đồ thị F . Tính xem nếu một đồ thị với n đỉnh không chứa đồ thị F thì có tối đa bao nhiêu cạnh?

Trước khi tiến hành khảo sát bài toán trên ta sẽ nêu ra một số quy ước như sau:

$$ex(n, F) = \max \{m: \text{tồn tại một đồ thị } n \text{ đỉnh, } m \text{ cạnh không chứa } F\},$$

$$Ex(n, F) = \{G: G \text{ là một đồ thị với } n \text{ đỉnh và } n \text{ cạnh không chứa } F\}.$$

Nếu F có 1 hoặc 2 đỉnh hoặc 3 đỉnh nhưng ba đỉnh này không lập thành một tam giác thì câu trả lời rất đơn giản. Nhưng nếu $F = K_3$ câu trả lời cho bài toán là không tầm thường.

Kết quả 9. Với mọi $n \geq 3$, $Ex(n, K_3) = \{K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}\}$ và $ex(n, K_3) = \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ \frac{n^2-1}{4} & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$

Chứng minh. Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị với n và không chứa tam giác. Với mỗi $e = xy \in E$ ta có $N(x) \setminus \{y\}$ và $N(y) \setminus \{x\}$ là rời nhau, trong trường hợp ngược lại G có một tam giác, nên

$$(d(x)-1) + (d(y)-1) \leq n-2,$$

hay $d(x) + d(y) \leq n.$

Lấy tổng đánh giá trên cho tất cả các cạnh, ta thu được $\sum_{x \in V} d^2(x) \leq mn$, trong đó $m = |E|$, do mỗi $x \in V$ số hạng $d(x)$ xuất hiện $d(x)$ lần.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta thu được $\left(\sum_{x \in V} d(x)\right)^2 \leq n \sum_{x \in V} d^2(x)$, do $\sum_{x \in V} d(x) = 2m$, nên ta suy ra rằng $\sum_{x \in V} d^2(x) \geq \frac{4m^2}{n}$.

Kết hợp các đánh giá nêu trên ta thu được $m \leq \frac{n^2}{4}$, nếu n chẵn; $m \leq \frac{n^2-1}{4}$, nếu n lẻ.

Có một cách để ta thu được một đồ thị không chứa tam giác đó là phân tập đỉnh thành hai lớp và ta chỉ đặt cạnh nối giữa hai lớp này; để làm cho số các cạnh trong phép xây dựng trên là lớn nhất ta sẽ phân chia sao cho số đỉnh ở mỗi lớp là gần nhau nhất có thể. Kết quả của phép xây dựng này là đồ thị $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$, đây chính là ví dụ minh họa cho đánh giá mà ta vừa chỉ ra ở phần trên. Lưu ý rằng đây cũng là đáp án duy nhất cho bài toán và chứng minh tính duy nhất ở đây là khá đơn giản.

Bây giờ ta xét một trường hợp riêng của câu hỏi 5 nhưng là một mở rộng thú vị của kết quả 9.

Câu hỏi 5'. Cho trước số nguyên $r \geq 3$. Tính $\text{ex}(n, K_r)$ và $\text{Ex}(n, K_r)$?

Một cách rất tự nhiên, ta đặt $V = [n]$, ta tiến hành phân hoạch V thành $r-1$ khối khác rỗng $A_1, \dots, A_{r-1}$ và đặt cạnh giữa i và j chỉ khi i và j nằm trong các khối phân biệt. Hiển nhiên rằng đồ thị thu được không chứa K_r và có $\binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{r-1} \binom{|A_i|}{2}$ cạnh.

Bây giờ ta làm cực đại hóa biểu thức trên, muốn vậy ta cần đến kết quả đơn giản sau, ta chỉ giới thiệu chứng không trình bày chứng minh cho khẳng định này

Khẳng định 3. Cho trước $a \geq 0$ và $\varepsilon > 0$, ta có $\binom{a+\varepsilon}{2} + \binom{a+\varepsilon}{2} < \binom{a}{2} + \binom{a+2\varepsilon}{2}$.

Từ khẳng định vừa nêu ta nhận ra rằng nếu phân hoạch của ta có hai khối có kích thước sai khác nhau 2 đơn vị hoặc nhiều hơn thì bằng cách chuyển một đỉnh từ khối lớn hơn sang khối nhỏ hơn ta làm tăng số các cạnh trong đồ thị thu được. Do đó để thu được đồ thị có số cạnh lớn nhất theo cách làm nêu ở trên thì ta phải phân hoạch sao cho các $|A_i|$ có giá trị gần nhau nhất có thể. Nếu ta sắp thứ tự kích thước của các khối từ nhỏ đến lớn sao cho $|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_{r-1}| \leq |A_1| + 1$ thì vector $(|A_i| : i = 1, \dots, r-1)$ sẽ được xác định một cách duy nhất.

Từ các thảo luận vừa trình bày kiến ta suy nghĩ đến định nghĩa sau.

Cho trước $n, r \geq 1$, đồ thị Turán $T_r(n)$ là đồ thị trên tập đỉnh $[n]$ được xây dựng như sau:

Phân hoạch $[n]$ thành các khối khác rỗng $A_1 \cup \dots \cup A_{r-1}$ trong đó $|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_{r-1}| \leq |A_1| + 1$. Sau đó, nối đỉnh i với đỉnh j bởi một cạnh nếu i và j nằm trong hai khối phân biệt.

Số các cạnh của đồ thị Turán được ký hiệu là $t_r(n)$.

Khẳng định sau được, đề xuất bởi Turán, là dạng tổng quát hóa của định lý Mantel.

Kết quả 10. Với mọi $n \geq 1$ và $r \geq 2$, $\text{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n)$ và $\text{Ex}(n, K_r) = \{T_{r-1}(n)\}$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh khẳng định nêu trên bằng phương pháp quy nạp theo $n \geq 1$ rằng:

Với mọi $r \geq 2$, tập $\text{Ex}(n, K_r)$ chỉ có thể chứa các đồ thị $(r-1)$ -phần trên tập $[n]$, một đồ thị $(r-1)$ -phần trên $[n]$ là một đồ thị thu được bằng cách phân hoạch $[n]$ thành các khối $A_1 \cup \dots \cup A_{r-1}$ và đặt cạnh nối phần tử i với phần tử j nếu i và j thuộc các khối khác nhau.

Trường hợp $n=1, 2, 3$, khẳng định của bài toán là hiển nhiên, nên ta có thể giả sử rằng $n \geq 4$.

Trường hợp $r=2$, khẳng định là hiển nhiên, nên ta có thể giả sử $r \geq 3$.

Bây giờ giả sử G là một đồ thị gồm n đỉnh không chứa K_r và số cạnh tối đa có thể có được. Đặt v là một đỉnh của G có bậc lớn nhất nằm trong G , lưu ý rằng đỉnh v như vậy luôn tồn tại vì $r \geq 3$, ký hiệu $S = N(v)$ và $T = V \setminus S$.

Nhận xét rằng S không chứa K_{r-1} , trong trường hợp ngược lại ta thu được một K_{r-1} .

Ta xây dựng một đồ thị H trên cùng tập đỉnh với G như sau: trên tập S ta giữ nguyên các cạnh còn trên tập T ta xóa đi tất cả các cạnh và sau cùng ta đặt một cạnh duy nhất ở giữa S và T . Do S không chứa tập K_{r-1} và không có cạnh nối trên T nên H không chứa K_r . Đồng thời, chú ý rằng mỗi đỉnh trong H đều có bậc lớn hơn hoặc bằng bậc của chính đỉnh đó trong G (với các đỉnh trong T điều này được suy ra từ các chọn đỉnh v là đỉnh có bậc lớn nhất; với các đỉnh trong S điều này được suy ra từ cách xây dựng)

Điều này chỉ ra rằng H có số cạnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh của G , bằng cách sử dụng tính cực đại của G , nên H có cùng số cạnh với G .

Bây giờ ta trở lại xem xét trên S , ta có $1 \leq |S| \leq n-1$ và S không chứa K_{r-1} . Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra tồn tại một đồ thị G' trên tập đỉnh S , có số cạnh ít hơn hoặc bằng số cạnh trong S , thu được bằng cách phân hoạch S thành $r-2$ khối và nối các đỉnh thuộc các khối khác nhau. Trên thực tế G' có số cạnh đúng bằng số cạnh của H có trong S , nếu ngược lại ta có thể thay các cạnh của H trong S bởi các cạnh của G' và nhận được một đồ thị mới trên tập đỉnh $[n]$ không chứa K_r nhưng có số cạnh nhiều hơn H . Lưu ý rằng đồ thị thu được bằng phương pháp thay thế được chỉ ra ở trên chỉ là một đồ thị không chứa K_r với số cạnh tối đa có thể có trên tập $[n]$ nhưng nó cũng đã đủ để ta hoàn tất phép quy nạp.

Bằng cách áp dụng lối lập luận như đã giới thiệu ở trên ta thấy rằng trong các đồ thị này thì $T_{r-1}(n)$ sẽ có số cạnh lớn nhất có thể có được nên $\text{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n)$; phép chứng minh tính duy nhất được thực hiện tương tự như đối với định lý Mantel nên ta không trình bày.

Kết quả sau là dạng yếu của kết quả 10, nó cho phép ta đánh giá chặt trên của $\text{ex}(n, K_r)$.

Kết quả 11. Cho trước $n \geq 1$ và $r \geq 2$, $\text{ex}(n, K_r) \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$.

Chứng minh. Trường hợp $r=2$, khẳng định là hiển nhiên nên ta có thể giả sử $r \geq 3$.

Bằng cách cố định mỗi r ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp theo n .

Với $n < r$, khẳng định được suy ra từ đánh giá $\binom{n}{2} \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$, $r \geq 2, 1 \leq n \leq r-1$.

Với $n = r$, khẳng định được suy ra từ đánh giá $\binom{r}{2} - 1 \leq \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$, $r \geq 2$.

Bây giờ ta cố định $n > r$ và giả sử G là đồ thị trên tập đỉnh $[n]$ có số cạnh lớn nhất trong số các đồ thị n -đỉnh không có chứa K_r . Từ tính cực đại của G ta nhận thấy rằng G phải chứa K_{r-1} , trong trường hợp ngược lại bằng cách bổ sung thêm cạnh ta nhận được điều mâu thuẫn.

Đặt A là một tập gồm $r-1$ đỉnh trong G đôi một liên hợp nhau, và $B = [n] \setminus A$.

Số các cạnh trong A là $\binom{r-1}{2}$. Do không thể có đỉnh nào trong B có thể liên hợp với mọi đỉnh trong A ,

trong trường hợp ngược lại G sẽ chứa K_r , nên số các cạnh nối giữa A và B tối đa là

$|B|(|A|-1) = (n-(r-1))(r-2)$. Nhận thấy rằng đồ thị B không chứa K_r , bằng cách áp dụng giả thiết quy

nạp, nên số cạnh trong B tối đa là $\frac{(n-(r-1))^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } |E(G)| &\leq \binom{r-1}{2} + (n-(r-1))(r-2) + \frac{(n-(r-1))^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \\ &\leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r-1}\right). \end{aligned}$$

Mặc dù kết quả này không mang lại nhiều lợi ích trong các tính toán nhưng nó chỉ ra một kết quả đáng chú ý khi n đủ lớn. Chú ý rằng số tối đa các cạnh trong một đồ thị trên n đỉnh là $\binom{n}{2} \sim n^2/2$ khi $n \rightarrow \infty$, điều này có nghĩa với n đủ lớn, nếu một đồ thị có tỉ số giữa số các cạnh của đồ thị trên số các cạnh tối đa có thể có của đồ thị nhiều hơn $1-1/(r-1)$ thì đồ thị này phải chứa K_r .

2.2. Sắc số của một đồ thị

Trong mục trước của bài viết ta đã đưa ra một câu trả lời tương đối chính xác cho câu hỏi 5 trong trường hợp F là một đồ thị đầy đủ. Trong trường hợp tổng quát hơn, ta không thể tính một cách chính xác được giá trị chính xác của $ex(n, F)$ hoặc nếu tính được thì biểu thức tính là rất phức tạp. Do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến việc xét câu hỏi có yêu cầu nhẹ hơn như sau.

Câu hỏi 6. Cần bao nhiêu cạnh trong một đồ thị với n đỉnh để đảm bảo cho sự xuất hiện của F ?

Từ các kết quả đã đạt được trong trường hợp đồ thị đầy đủ dẫn ta đến việc khảo sát tỷ số giữa số các cạnh của đồ thị trên số các cạnh tối đa có thể có của đồ thị khi n đủ lớn, tỷ số này cung cấp cho ta một tiêu chuẩn đơn giản trong thực hành để kiểm tra liệu một đồ thị có kích thước lớn có thể chứa F hay không một cách khá nhanh chóng.

Lưu ý rằng, tính đến thời điểm hiện tại không có một bằng chứng nào cho thấy tỷ số này sẽ tồn tại, ngoại trừ trong trường hợp $F = K_r$ mà ta vừa mới chỉ ra ở mục trước là tồn tại và bằng $1-1/(r-1)$ với mọi $r \geq 2$.

Nhưng trên thực tế thật đáng ngạc nhiên là giới hạn này luôn tồn tại đối với mọi F và hơn thế nữa ta có thể xác định nó thông qua một tham số tổ hợp cơ bản của đồ thị F . Tham số mà ta đang muốn nói tới ở đây chính là sắc số.

Cho trước số nguyên $q \geq 1$. Một cách tô q -màu thực sự cho đồ thị $G = (V, E)$ là một hàm

$f: V \rightarrow [q] = \{1, \dots, q\}$ thỏa mãn tính chất nếu $xy \in E$ thì $f(x) \neq f(y)$. Sắc số của đồ thị G , ký hiệu bởi $\chi(G)$, là số q nhỏ nhất sao cho tồn tại một q -màu thực sự cho G . Một cách tương đương, $\chi(G)$ là số q nhỏ nhất sao cho ta có thể phân hoạch tập đỉnh V thành $V = A_1 \cup \dots \cup A_q$ sao cho các cạnh của G nối các đỉnh thuộc các khối khác nhau.

Chú ý rằng nếu ta ký hiệu số đỉnh của G thì hiển nhiên rằng luôn tồn tại n -màu thực sự nên $\chi(G)$ luôn tồn tại và hữu hạn.

Một số ví dụ đơn giản, sắc số của K_r bằng r ; sắc số của chu trình C_n bằng 2 nếu n chẵn và bằng 3 nếu n lẻ; sắc số của đồ thị wheel W_n , đồ thị tạo thành từ một chu trình C_n bằng cách nối tất cả các đỉnh của chu trình với một đỉnh mới, bằng 3 nếu n lẻ và bằng 4 nếu n chẵn.

2.3. Số cạnh cần thiết để đảm bảo sự xuất hiện của một đồ thị cho trước

Cho trước một đồ thị F , Erdős, Stone và Simonovits đã giải quyết câu hỏi cần bao nhiêu cạnh trong một đồ thị với n đỉnh để đảm bảo cho sự xuất hiện của F .

Kết quả 12. (Erdős-Stone-Simonovits)

Nếu F có ít nhất một cạnh thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(F) - 1}$, trong đó $\chi(F)$ là sắc số của đồ thị F .

Một cách chính xác hơn, giới hạn nêu trên luôn tồn tại và bằng với giá trị nêu trong khẳng định.

Nói cách khác, nếu một đồ thị với n đỉnh và có tỷ số giữa số các cạnh của đồ thị trên số các cạnh tối đa có thể có của đồ thị lớn hơn $1 - \frac{1}{\chi(F) - 1}$ thì với n đủ lớn đồ thị này sẽ chứa F như một đồ thị con; với mọi n đủ lớn, ta luôn tìm được một đồ thị có n đỉnh có tỷ số giữa số các cạnh của đồ thị trên số các cạnh tối đa có thể có của đồ thị nhỏ hơn $1 - \frac{1}{\chi(F) - 1}$ và không chứa F .

Để chứng minh định lý Erdős-Stone-Simonovits ta cần một kết quả phụ mang tính kỹ thuật sau:

Kết quả 13. Cho trước $r \geq 2, s \geq 1$ và $\varepsilon > 0$. Khi đó, luôn tồn tại $n_0 = n_0(r, s, \varepsilon)$ sao cho nếu G là một đồ thị trên n với $n \geq n_0$ và $|E(G)| \geq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}$ thì G chứa một đồ thị con $K_r(s)$, trong đó $K_r(s)$ để chỉ đồ thị trên rs đỉnh $A_1 \cup \dots \cup A_r$, $|A_i| = s$ với mọi i , và có một cạnh nối u với v nếu và chỉ nếu u và v thuộc các khối A_i khác nhau hay nói cách khác $K_r(s)$ chính là $T_r(rs)$.

Kết quả phụ này vai trò là ý tưởng chính trong chứng minh của định lý Erdős-Stone và có thể hiểu nó một cách nôm na như sau: nếu G có số cạnh lớn hơn số cạnh của $T_{r-1}(n)$, đồ thị tốt nhất không chứa K_r , thì nó không chỉ chứa K_r mà hơn thế nữa nó còn chứa một số bản sao của K_r .

Trong bài viết này ta sẽ không trình bày lại chứng minh cho khẳng định trên, xem thêm trong bài viết “**Định lý Erdős-Stone**”, mà sẽ chỉ vận dụng kết quả phụ này để kiểm lại tính đúng đắn của kết quả 12.

Chứng minh kết quả 12.

Đầu tiên bằng cách đặt $r = \chi(F)$, ta có nhận xét rằng $T_{r-1}(n)$ không chứa F như một đồ thị con; trong trường hợp ngược lại, bằng cách tô màu các đỉnh của đồ thị F trong khối A_i bằng màu thứ i ($A_1, \dots, A_r$ là các khối phân hoạch của tập đỉnh của $T_{r-1}(n)$ và chỉ có cạnh nối giữa các khối khác nhau) nên ta thu được một $(r-1)$ -màu thực sự của F , điều này mâu thuẫn với sự kiện $\chi(F) = r$.

Từ phân tích trên ta suy ra rằng $\text{ex}(n, F) \geq t_{r-1}(n)$.

Bằng cách tính toán trực tiếp ta thu được $t_{r-1}(n) \geq \left\lfloor \frac{n}{r-1} \right\rfloor^2 \binom{r-1}{2}$ và kết hợp với công thức tính giới

hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\lfloor \frac{n}{r-1} \right\rfloor^2}{\frac{n^2}{(r-1)^2}} = 1$, ta nhận được kết quả $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{\binom{n}{2}} \geq 1 - \frac{1}{r-1}$.

Mặt khác, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, giả sử $f: V(F) \rightarrow [r]$ là một r -màu thực sự của F và ký hiệu s là kích thước của lớp màu lớn nhất trong phép tô màu này, hay nói cách khác là số lượng các đỉnh có màu được sử dụng nhiều nhất. Hiển nhiên F là một đồ thị con của $K_r(s)$. Bằng cách áp dụng kết quả 13 ta suy ra

với mọi n đủ lớn, nếu đồ thị G có n đỉnh có nhiều hơn $\left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}$ cạnh thì G chứa $K_r(s)$ như một

đồ thị con và do đó cũng sẽ chứa F như một đồ thị con, nên $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{\binom{n}{2}} \leq 1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon$.

Do khẳng định trên đúng với mọi $\varepsilon > 0$ nên bằng cách chuyển qua giới hạn ta thu được

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{\binom{n}{2}} \leq 1 - \frac{1}{r-1}.$$

Kết quả các kết quả trên ta nhận được điều phải chứng minh.

Kết quả 12 đã giải quyết cơ bản được câu hỏi 6 cho tất cả các đồ thị F với $\chi(F) = r \geq 3$ như sau:

Nếu mật độ cạnh của G (số các cạnh của đồ thị chia cho số tất cả các cạnh nối các đỉnh của đồ thị) nhỏ hơn $1 - (1/(r-1))$ thì G có thể không chứa F như một đồ thị con. Nhưng nếu mật độ cạnh lớn hơn $1 - (1/(r-1))$ thì chắc chắn rằng G sẽ phải chứa đồ thị F .

Trường hợp $\chi(F) = 2$, câu hỏi 6 đến nay vẫn còn là một bài toán mở. Một trong số các trường hợp riêng của nó chính là giả thuyết Erdős-Sós có nội dung như sau.

Giả thuyết Erdős-Sós. Cho trước $k \geq 1$ và một cây T với k cạnh. Nếu đồ thị G có n đỉnh và m cạnh với $m > (k-1)n/2$ thì G chứa T như một đồ thị con.

Tài liệu tham khảo:

- [01]. David Galvin, Basic Discrete Mathematics, Spring 2015.
- [02]. Trương Phước Nhân, Định lý Erdos-Ko-Rado, 03/02/2018.
- [03]. Trương Phước Nhân, Định lý Sperner, 02/08/2017.
- [04]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết cực trị tập hợp, 10/02/2018.
- [05]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết cực trị tập hợp – phần 2, 11/02/2018.
- [06]. Trương Phước Nhân, Tiếp cận định lý Erdos-Ko-Rado bằng kỹ thuật shifting, 09/02/2018.
- [07]. Trương Phước Nhân, Tiếp cận theo phương pháp đếm của Lubell cho định lý Bollobas, 18/02/2018.
- [08]. Trương Phước Nhân, Tối ưu tập hợp- phần I, 17/07/2017.
- [09]. Trương Phước Nhân, Định lý Erdos-Stone, 06/08/2017.
- [10]. Trương Phước Nhân, Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh, 15/07/2017.
- [11]. Trương Phước Nhân, Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh-phần 2, 15/07/2017.
- [12]. Trương Phước Nhân, Tối ưu đồ thị - phần 1, 09/07/2017.