

Phép chia không gian theo mặt phẳng của Steiner

Trương Phước Nhân, 12/08/2018

Bài toán. Hỏi với n mặt phẳng thì ta có thể chia một không gian ra làm tối đa là bao nhiêu phần ?

Bài toán rất hay này xuất hiện trong một công trình của Steiner “Một số quy luật chi phối phép chia mặt phẳng và không gian” (*Crelle's Journal*, quyển I và *Complete Works* của Steiner, quyển I).

Đầu tiên, ta giải bài toán đơn giản hơn:

Bài toán'. Hỏi với n đường thẳng thì ta có thể chia một mặt phẳng ra làm tối đa là bao nhiêu phần ?

Dễ dàng nhận thấy số phần sẽ là lớn nhất khi không có hai đường thẳng nào song song với nhau và không có quá hai đường thẳng cùng đi qua một điểm nên ta cũng sẽ tạm giả thiết rằng cả hai điều kiện này được thỏa mãn và đồng thời ta ký hiệu số phần tương ứng được tạo thành bởi n đường thẳng này là s_n .

Giả sử n đường thẳng chia mặt phẳng thành s_n phần. Bây giờ ta vẽ một đường thẳng phụ, đường thẳng có n giao điểm với n đường thẳng ban đầu và do vậy nó đi qua $n+1$ phần trong s_n phần đã có trước đó. Do đó, bằng cách chia mỗi một phần thành hai phần, đường thẳng phụ này làm tăng số phần bị chia của mặt phẳng thêm $n+1$ phần mới, tức là $s_{n+1} = s_n + (n+1)$.

Áp dụng hệ thức trên cho các trường hợp $n = 0, 1, 2, \dots$ ta thu được n đẳng thức sau:

$$s_1 = 1 + 1,$$

$$s_2 = s_1 + 2,$$

$$s_3 = s_2 + 3,$$

...

$$s_n = s_{n-1} + n.$$

Cộng các phương trình trên lại ta thu được: $s_n = 1 + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.

Vậy với n đường thẳng ta có thể chia một mặt phẳng ra thành tối đa là $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ phần.

Bây giờ ta quay trở lại với bài toán không gian. Rõ ràng là số các phần sẽ là tối đa khi không có quá ba mặt phẳng cùng đi qua một điểm và các giao tuyến của hai mặt phẳng bất kỳ không song song với nhau và đồng thời ta cũng ký hiệu số phần được tạo thành bởi n mặt phẳng là S_n .

Giả sử n mặt phẳng chia không gian thành S_n phần. Bây giờ ta bổ sung thêm một mặt phẳng vào các mặt phẳng này. Khi đó, n mặt phẳng ban đầu cắt mặt phẳng này tại n đường thẳng mà trong đó không có quá hai đường thẳng nào cùng đi qua một điểm và không có hai hoặc nhiều đường thẳng song song với nhau.

Từ kết quả khi khảo sát trên mặt phẳng ta nhận thấy rằng n đường thẳng này chia mặt phẳng mới thành s_n phần khác nhau.

Do đó, mặt phẳng mới này làm tăng số phần bị chia của không gian thêm s_n phần mới, tức là $S_{n+1} = S_n + s_n$, bởi vì mỗi một phần trong số s_n phần bề mặt của mặt phẳng phụ mới này sẽ cắt không gian riêng phần mà nó đi qua thành hai không gian nhỏ hơn.

Bằng cách áp dụng hệ thức này cho các trường hợp $n = 1, 2, 3, \dots$ ta thu được n đẳng thức sau:

$$S_1 = 1 + 1,$$

$$S_2 = S_1 + s_1,$$

$$S_3 = S_2 + s_2,$$

...

$$S_n = S_{n-1} + s_{n-1}.$$

Cộng các phương trình này lại ta thu được: $S_n = 2 + s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}$

$$\Rightarrow S_n = n + 1 + \frac{1}{2}(1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1)n).$$

Nếu chúng ta phân tích mỗi tích $v(v+1)$ thành $v^2 + v$, ta thu được:

$$S_n = n + 1 + \frac{1}{2} \left\{ \left[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 \right] + \left[1 + 2 + \dots + (n-1) \right] \right\}.$$

Dễ dàng tính được tổng trong dấu ngoặc vuông thứ nhất và thứ hai lần lượt là:

$$\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \text{ và } \frac{1}{2}(n-1)n.$$

Khi đó:

$$S_n = n+1 + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \\ \Rightarrow S_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

Kết luận, số phần tối đa mà n mặt phẳng có thể chia một không gian là $\frac{n^3 + 5n + 6}{6}$.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Heinrich Dörrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics Their History and Solution, New York Dover Publications.
- [2]. Trương Phước Nhân, Phương pháp qui nạp + song ánh, 17/07/2017.