

Lý thuyết Pólya

Trương Phước Nhân, 04/07/2018

Lý thuyết Pólya cung cấp cho ta một công cụ mạnh để đếm số các vật mà có sự đối xứng nào đó.

1. Bổ đề Burnside

Trong mục này của bài viết ta chứng minh bổ đề cơ sở làm nền tảng cho lý thuyết Pólya. Đó là bổ đề Burnside. Bổ đề này cho ta công thức tính số các quỹ đạo mà một nhóm G tạo ra khi nó tác động lên tập Ω . Ta luôn giả thiết rằng nhóm G và tập Ω mà G tác động lên đều là hữu hạn.

Tác động của một nhóm G lên một tập Ω là ánh xạ $\varphi: G \times \Omega \rightarrow \Omega: (g, \alpha) \mapsto g(\alpha)$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

- i) $(gh)(\alpha) = g(h(\alpha))$ cho mọi $g, h \in G$ và $\alpha \in \Omega$;
- ii) $e(\alpha) = \alpha$ cho mọi $\alpha \in \Omega$, ở đây e là đơn vị của nhóm G .

Khi đó ta cũng nói rằng G tác động lên Ω bằng φ và $g \in G$ chuyển $\alpha \in \Omega$ thành $g(\alpha) \in \Omega$.

Ta nhận xét rằng nếu $\varphi: G \times \Omega \rightarrow \Omega: (g, \alpha) \mapsto g(\alpha)$ là một tác động của G lên Ω thì với mỗi $g \in G$ ánh xạ $\theta_g: \alpha \mapsto g(\alpha)$ là một song ánh, tức là θ_g là một hoán vị trên Ω .

Thật vậy, ta có $\theta_g(\alpha_1) = \theta_g(\alpha_2) \Leftrightarrow g(\alpha_1) = g(\alpha_2) \Leftrightarrow g^{-1}(g(\alpha_1)) = g^{-1}(g(\alpha_2)) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Điều đó chứng tỏ rằng θ_g là đơn ánh.

Vì Ω là hữu hạn nên từ θ_g là đơn ánh ta suy ra θ_g cũng là toàn ánh.

Vậy θ_g là một song ánh.

Để cụ thể hóa vấn đề ta sẽ khảo sát tác động của nhóm các phép đối xứng của hình vuông lên tập các sơ đồ màu cho các đỉnh hình vuông.

Giả sử các đỉnh của hình vuông có tên là 1, 2, 3, 4. Ta gán cho mỗi đỉnh này hoặc màu trắng (ký hiệu là T) hoặc màu đen (ký hiệu là Đ). Mỗi cách gán màu cho các đỉnh của hình vuông được gọi là một sơ đồ màu của hình vuông. Ký hiệu tập tất cả các sơ đồ màu của hình vuông bằng Ω .

Giả sử G là tập tất cả các tự đẳng cấu của hình vuông, ở đây ta có thể hiểu một cách nôm na rằng một tự đẳng cấu của hình vuông là một song ánh của tập các đỉnh lên chính nó sao cho cạnh của hình vuông được chuyển thành một cạnh của chính hình vuông đó. Khi đó G là một nhóm đối với phép nhân ánh xạ. Mỗi tự đẳng cấu của hình vuông cũng được gọi là một phép đối xứng của hình vuông đó. Ta có thể chứng minh được dễ dàng rằng nhóm G tất cả các phép đối xứng của hình vuông là nhóm nhị diện D_4 . Nó có cấp bằng 8 và bao gồm 4 phép quay và 4 phép phản xạ.

Bốn phép quay tương ứng với 4 hoán vị sau của tập các đỉnh hình vuông:

$$\sigma = (1, 2, 3, 4), \text{ phép quay hình vuông } 90^\circ;$$

$$\sigma^2 = (1, 3)(2, 4), \text{ phép quay hình vuông } 180^\circ;$$

$$\sigma^3 = (1, 4, 3, 2), \text{ phép quay hình vuông } 270^\circ;$$

$$\sigma^4 = e = (1)(2)(3)(4), \text{ phép đồng nhất hay phép quay hình vuông } 0^\circ.$$

Bốn phép phản xạ tương ứng với 4 hoán vị sau của tập các đỉnh hình vuông:

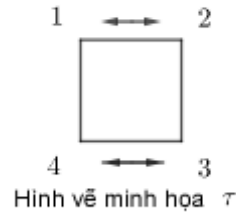
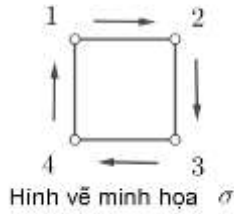
$$\tau = (1, 2)(3, 4);$$

$$\sigma\tau = (1, 3);$$

$$\sigma^2\tau = (1, 4)(2, 3);$$

$$\sigma^3\tau = (2, 4).$$

Ta nhận xét rằng nếu α là một sơ đồ màu của hình vuông thì theo ý nghĩa hình học $\sigma(\alpha)$ là một sơ đồ màu của hình vuông nhận được từ α bằng cách quay nó đi một góc 90° , còn $\tau(\alpha)$ là sơ đồ màu của hình vuông nhận được từ α bằng cách lấy đối xứng α theo trục đối xứng thẳng đứng của hình vuông.



Mỗi sơ đồ màu có thể được thể hiện trực quan như một hình vuông màu hoặc như là một ánh xạ của tập các đỉnh của hình vuông là $\{1, 2, 3, 4\}$ vào tập các màu là $\{Đ, T\}$.

Bây giờ ta định nghĩa ánh xạ φ của $G \times \Omega$ vào Ω như sau:

$$\varphi: G \times \Omega \rightarrow \Omega: (g, \alpha) \mapsto g(\alpha) \text{ trong đó } g(\alpha)(i) = \alpha(g^{-1}(i)) \text{ với mọi } i = 1, 2, 3, 4.$$

Ta chứng minh rằng φ là một tác động của G lên Ω .

Thật vậy, ta có $e(\alpha)(i) = \alpha(e^{-1}(i)) = \alpha(e(i)) = \alpha(i)$ cho mọi $i = 1, 2, 3, 4$.

Suy ra, $e(\alpha) = \alpha$ cho mọi $\alpha \in \Omega$.

Tiếp tục, nếu $g, h \in G$ thì

$$\begin{aligned} [(gh)(\alpha)](i) &= \alpha[(gh)^{-1}(i)] \\ &= \alpha[(h^{-1}g^{-1})(i)] \\ &= \alpha[h^{-1}(g^{-1}(i))] \\ &= h(\alpha)(g^{-1}(i)) \\ &= g(h(\alpha))(i), \end{aligned}$$

tức là $(gh)(\alpha) = g(h(\alpha))$ cho mọi $\alpha \in \Omega$.

Vậy φ thỏa mãn các điều kiện i) và ii) của định nghĩa tác động của nhóm lên tập hợp, tức φ là một tác động của G lên Ω .

Giả sử nhóm G tác động lên tập Ω .

Ta định nghĩa

$$\begin{aligned} \text{Orb}_G(\alpha) &= \{g(\alpha) \in \Omega \mid g \in G\}, \\ G_\alpha &= \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha\} \text{ cho mỗi } \alpha \in \Omega, \\ \text{Fix}_\Omega(g) &= \{\alpha \in \Omega \mid g(\alpha) = \alpha\} \text{ cho mỗi } g \in G. \end{aligned}$$

Tập $\text{Orb}_G(\alpha)$ được gọi là quỹ đạo của α dưới tác động của G . Để kiểm tra thấy rằng G_α là một nhóm con của G . Vì thế, G_α được gọi là nhóm con ổn định của α dưới tác động của G còn tập $\text{Fix}_\Omega(g)$ được gọi là tập các điểm bất động đối với $g \in G$.

Kết quả 1. Với mọi $\alpha \in \Omega$ ta luôn có $|G_\alpha| |\text{Orb}_G(\alpha)| = |G|$.

Chứng minh. Ta định nghĩa lớp kề trái của nhóm G theo nhóm con G_α là tập con của G có dạng $xG_\alpha = \{xy \mid y \in G_\alpha\}$, ở đây x là một phần tử của G . Để thấy rằng tương ứng y với xy là tương ứng một-một giữa các phần tử của G_α với các phần tử của xG_α . Vì vậy, $|G_\alpha| = |xG_\alpha|$ cho mọi $x \in G$.

Giả sử $x_1, x_2 \in G$ là hai phần tử bất kỳ. Nếu $x_1G_\alpha \cap x_2G_\alpha \neq \emptyset$ và $z \in x_1G_\alpha \cap x_2G_\alpha$ thì $z = x_1y_1 = x_2y_2$ với $y_1, y_2 \in G_\alpha$ nào đó. Vì vậy, $x_1 = x_2y_2y_1^{-1} \in x_2G_\alpha$. Điều đó chứng tỏ rằng các lớp kề trái của G theo G_α hoặc rời nhau hoặc trùng nhau. Vì vậy, nhóm G phân hoạch thành các khối là các lớp kề trái của G theo G_α , chẳng hạn $G = x_1G_\alpha \cup x_2G_\alpha \cup \dots \cup x_kG_\alpha$.

Theo qui tắc cộng, $|G| = |x_1G_\alpha| + |x_2G_\alpha| + \dots + |x_kG_\alpha|$.

Mặt khác, ánh xạ $\theta: \{x_1 G_\alpha, x_2 G_\alpha, \dots, x_k G_\alpha\} \rightarrow \text{Orb}_G(\alpha): x_i G_\alpha \mapsto x_i(\alpha)$ xác định tương ứng một-một giữa các phần tử của tập $\{x_1 G_\alpha, x_2 G_\alpha, \dots, x_k G_\alpha\}$ và $\text{Orb}_G(\alpha)$.

Thật vậy, nếu $\theta(x_i G_\alpha) = \theta(x_j G_\alpha)$ thì $x_i(\alpha) = x_j(\alpha)$.

Suy ra $x_j^{-1} x_i(\alpha) = \alpha$, tức là $x_j^{-1} x_i \in G_\alpha$ nên $x_j^{-1} x_i G_\alpha = G_\alpha$ hay $x_i G_\alpha = x_j G_\alpha$.

Vậy θ là đơn ánh.

Lại có, mỗi $g \in G$ phải thuộc một $x_i G_\alpha$ với $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ nào đó, vì G được phân hoạch thành các khối $x_i G_\alpha$. Do đó $g = x_i y$ với $y \in G_\alpha$. Vì thế $g(\alpha) = (x_i y)(\alpha) = x_i(y(\alpha)) = x_i(\alpha)$.

Vậy θ cũng là toàn ánh, tức θ là tương ứng một-một.

Theo qui tắc tương ứng một-một, $|\text{Orb}_G(\alpha)| = |\{x_1 G_\alpha, x_2 G_\alpha, \dots, x_k G_\alpha\}| = k$.

Vì vậy, $|G| = k|G_\alpha| = |G_\alpha| |\text{Orb}_G(\alpha)|$.

Giả sử $\text{Orb}_G(\alpha_1)$ và $\text{Orb}_G(\alpha_2)$ là hai quỹ đạo dưới tác động của G lên Ω .

Nếu $\text{Orb}_G(\alpha_1) \cap \text{Orb}_G(\alpha_2) \neq \emptyset$ và $\beta \in \text{Orb}_G(\alpha_1) \cap \text{Orb}_G(\alpha_2)$ thì $\beta = g(\alpha_1) = h(\alpha_2)$ với $g, h \in G$.

Suy ra, $h^{-1}g(\alpha_1) = \alpha_2$ nên $\text{Orb}_G(\alpha_2) \subseteq \text{Orb}_G(\alpha_1)$.

Tương tự, ta cũng có $\text{Orb}_G(\alpha_1) \subseteq \text{Orb}_G(\alpha_2)$ và do đó $\text{Orb}_G(\alpha_1) = \text{Orb}_G(\alpha_2)$.

Điều đó chứng tỏ rằng hai quỹ đạo dưới tác động của G lên Ω hoặc rời nhau hoặc trùng nhau.

Mặt khác, mỗi $\alpha \in \Omega$ thuộc $\text{Orb}_G(\alpha)$, vì $\alpha = e(\alpha)$.

Vậy tập Ω được phân hoạch thành các khối gồm các quỹ đạo dưới tác động của G .

Số lượng các khối của phân hoạch này được tính bởi kết quả sau đây.

Kết quả 2. (Bổ đề Burnside) Giả sử nhóm hữu hạn G tác động lên một tập hữu hạn Ω .

Khi đó số các quỹ đạo dưới tác động của G lên Ω bằng $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_\Omega(g)|$.

Chứng minh. Giả sử $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ là tất cả các quỹ đạo dưới tác động của G lên Ω . Khi đó, như ta đã chứng minh ở trên, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$ là một phân hoạch của Ω .

Ta có $\sum_{g \in G} |\text{Fix}_\Omega(g)|$ chính là số các phần tử của tập $X = \{(\alpha, g) \in \Omega \times G \mid \alpha \in \text{Fix}_\Omega(g)\}$.

Nhưng

$$\begin{aligned} X &= \{(\alpha, g) \in \Omega \times G \mid \alpha \in \text{Fix}_\Omega(g)\} \\ &= \{(\alpha, g) \in \Omega \times G \mid \alpha = g(\alpha)\} \\ &= \{(\alpha, g) \in \Omega \times G \mid g \in G_\alpha\}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_\Omega(g)| &= \sum_{\alpha \in \Omega} |G_\alpha| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in \Omega_i} |G_\alpha| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in \Omega_i} \frac{|G|}{|\text{Orb}_G(\alpha)|} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in \Omega_i} \frac{|G|}{|\Omega_i|} \\ &= \sum_{i=1}^n |\Omega_i| \frac{|G|}{|\Omega_i|} \\ &= n|G|. \end{aligned}$$

Suy ra, $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_\Omega(g)|$.

Giả sử σ là phép quay $(1, 2, 3, 4)$ của hình vuông, $G = \langle \sigma \rangle$ là nhóm sinh bởi σ , Ω là tập các sơ đồ màu của hình vuông với hai màu là Đ, T.

Khi đó, với tác động của G lên Ω , ta có

$$\text{Fix}_{\Omega}(e) = \Omega,$$

$$\text{Fix}_{\Omega}(\sigma) = \text{Fix}_{\Omega}(\sigma^3) = \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \square \\ 4 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \blacksquare \\ 4 \quad 3 \end{array} \end{array} \right\},$$

$$\text{Fix}_{\Omega}(\sigma^2) = \left\{ \begin{array}{cccc} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \square \\ 4 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \square \blacksquare \\ 4 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \blacksquare \blacksquare \\ 4 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \blacksquare \square \\ 4 \quad 3 \end{array} \end{array} \right\}.$$

Vì vậy, theo Bổ đề Burnside, số các sơ đồ màu của hình vuông khác nhau với sự chính xác tới các phép quay là

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)| = \frac{1}{4} (16 + 2 + 4 + 2) = 6.$$

Đây cũng chính là số các cách xếp 4 hạt màu trắng hoặc màu đen lên một vòng tròn, ở đây hai cách xếp được coi là như nhau nếu chúng giống nhau sau khi ta thực hiện một phép quay nào đó.

2. Đa thức chỉ số chu trình

Giả sử G là nhóm hoán vị trên tập X với $|X| = n$.

Với mỗi $g \in G$, giả sử $b_k(g)$ là số các chu trình độ dài k của g . Khi đó, đa thức chỉ số chu trình của G là đa thức của n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ sau đây:

$$P_{G,X}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1(g)} x_2^{b_2(g)} \dots x_n^{b_n(g)}.$$

Nếu tập X được hiểu ngầm thì ta ký hiệu $P_{G,X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đơn giản là $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ta sẽ sử dụng đa thức chỉ số chu trình vào việc giải quyết lớp các bài toán đếm dưới đây.

Giả sử C là một tập hữu hạn mà các phần tử của nó được xem như là các màu, còn Ω là tập tất cả các ánh xạ $\alpha: X \rightarrow C$. Ta xem mỗi phần tử của Ω như là một sơ đồ màu cho các điểm của X . Ta vẫn giả sử G là nhóm hoán vị trên tập X với $|X| = n$.

Ta định nghĩa ánh xạ $\varphi: G \times \Omega \rightarrow \Omega: (g, \alpha) \mapsto g(\alpha)$ với $g(\alpha) \in \Omega$ được xác định bằng công thức

$$g(\alpha)(x) = \alpha(g^{-1}(x)) \text{ cho mọi } x \in X.$$

Dễ kiểm tra rằng φ là một tác động của G lên Ω .

Các phần tử của Ω vẫn được gọi là các sơ đồ màu. Nhưng mỗi quỹ đạo dưới tác động φ ở trên của G lên Ω được gọi là một mẫu của G .

Kết quả 3. (Pólya) Số các mẫu dưới tác động của G lên Ω bằng $P_{G,X}(|C|, |C|, \dots, |C|)$,

ở đây $P_{G,X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là đa thức chỉ số chu trình của G .

Chứng minh. Theo Bổ đề Burnside, số các mẫu dưới tác động của G lên Ω bằng $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_\Omega(g)|$, ở đây

$\text{Fix}_\Omega(g) = \{\alpha \in \Omega \mid g(\alpha) = \alpha\}$. Ta chứng minh rằng $g(\alpha) = \alpha$ khi và chỉ khi α gán cho các điểm của mỗi chu trình của g bằng cùng một màu.

Thật vậy, nếu $g(\alpha) = \alpha$ thì $g(\alpha)(x) = \alpha(x)$. Nhưng theo định nghĩa của $g(\alpha)$ ta có $g(\alpha)(x) = \alpha(g^{-1}(x))$. Vì vậy, $\alpha(g^{-1}(x)) = \alpha(x)$ cho mọi $x \in X$. Nói riêng, đẳng thức này đúng cho $x = y, g(y), g^2(y), \dots$ ở đây $y \in X$.

Ta có

$$\alpha(y) = \alpha(g^{-1}g(y)) = \alpha(g(y)).$$

$$\text{Do đó, } \alpha(y) = \alpha(g(y)) = \alpha(g^2(y)) = \alpha(g^3(y)) = \dots$$

Điều này có nghĩa rằng nếu $g(\alpha) = \alpha$ thì α gán cho các điểm của mỗi chu trình của g bằng cùng một màu.

Ngược lại, giả sử α gán cho các điểm của mỗi chu trình của g bằng cùng một màu.

Khi đó $g^{-1}(x)$ và x có cùng màu cho mọi $x \in X$, tức là $\alpha(g^{-1}(x)) = \alpha(x) \Leftrightarrow g(\alpha)(x) = \alpha(x)$ với mọi $x \in X$. Suy ra, $g(\alpha) = \alpha$.

$$\text{Từ điều vừa chứng minh được ở trên suy ra } |\text{Fix}_\Omega(g)| = |C|^{b_1(g)} |C|^{b_2(g)} \dots |C|^{b_n(g)}.$$

Từ Bổ đề Burnside và định nghĩa của $P_{G,X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Màu của mỗi hạt dùng để xây thành một vòng hạt có thể là một trong 3 màu trắng, vàng, đen. Bài toán đặt ra là tính xem có thể tạo ra bao nhiêu loại vòng hạt khác nhau mà mỗi vòng như vậy có 6 hạt, ở đây hai vòng hạt được coi là cùng một loại nếu ta có thể chồng hai vòng hạt đó lên nhau để sao cho các hạt tương ứng có cùng màu?

Lời giải.

Mỗi vòng hạt gồm 6 hạt màu trắng hoặc màu vàng hoặc màu đen nhận được bằng cách xếp các loại hạt trên vào các đỉnh của một lục giác đều.

Như vậy, mỗi vòng hạt trên có thể đồng nhất với một ánh xạ $\alpha: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{T, V, Đ\}$ từ tập đỉnh $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ của lục giác đều vào tập các màu gồm trắng (T), vàng (V) và đen (Đ), tức là một sơ đồ màu cho các phần tử của X .

Giả sử G là nhóm tất cả các tự đẳng cấu của lục giác đều và G tác động lên tập Ω gồm tất cả các sơ đồ màu, tức là với mọi $\alpha \in \Omega$ và $g \in G$, $g(\alpha)$ là sơ đồ màu $g(\alpha): X \rightarrow \{T, V, Đ\}: x \mapsto \alpha(g^{-1}(x))$.

Để thấy rằng α và $g(\alpha)$ là các vòng hạt cùng loại. Ngược lại, ta cũng dễ thấy rằng nếu α và β là hai vòng hạt cùng loại thì ta tìm được $g \in G$ sao cho $g(\alpha) = \beta$. Như vậy, hai vòng hạt sẽ cùng loại khi và chỉ khi chúng thuộc cùng một quỹ đạo dưới tác động của G lên Ω , tức là mỗi loại vòng hạt tương ứng với một mẫu của G .

Do $|\Omega|$ bằng số các hàm từ X vào $\{T, V, Đ\}$, tức là $|\Omega| = 3^6$. Mặt khác, người ta đã chứng minh được rằng G chính là nhóm nhị diện D_6 .

Nó bao gồm 6 phép quay là

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \sigma^2 = (1, 3, 5)(2, 4, 6), \sigma^3 = (1, 4)(2, 5)(3, 6),$$

$$\sigma^4 = (1, 5, 3)(2, 6, 4), \sigma^5 = (1, 6, 5, 4, 3, 2), \sigma^6 = e = (1)(2)(3)(4)(5)(6),$$

và 6 phép phản xạ là

$$\tau = (1)(2, 6)(3, 5)(4), \sigma\tau = (1, 2)(3, 6)(4, 5), \sigma^2\tau = (1, 3)(2)(4, 6)(5),$$

$$\sigma^3\tau = (1, 4)(2, 3)(5, 6), \sigma^4\tau = (1, 5)(2, 4)(3)(6), \sigma^5\tau = (1, 6)(2, 5)(3, 4).$$

Do đó, đa thức chỉ số chu trình của G là

$$\begin{aligned} P_{G,X}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= \frac{1}{12} (x_6 + x_3^2 + x_2^3 + x_3^2 + x_6 + x_1^6 + x_1^2 x_2^2 + x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + x_2^3) \\ &= \frac{1}{12} (x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 4x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6). \end{aligned}$$

Theo Kết quả 3, số các loại vòng hạt gồm 6 hạt màu trắng, vàng hoặc đen có thể tạo ra được bằng $\frac{1}{12} (3^6 + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3) = 92$.

3. Định lý đếm Pólya

Trong mục này của bài viết ta phát triển phương pháp đếm nêu ở trên để giải quyết các bài toán tính phức tạp hơn. Để làm được điều đó ta gán mỗi sơ đồ màu một trọng lượng.

Giả sử G là nhóm hoán vị trên tập X , C là tập các màu và Ω là tập các sơ đồ màu $\alpha: X \rightarrow C$. Ta cũng giả sử A là một vành giao hoán có đơn vị 1 và $w: C \rightarrow A$ là một ánh xạ của C vào A .

Khi đó với mỗi $c \in C$, $w(c)$ được gọi là trọng lượng của màu c .

Ta định nghĩa trọng lượng của sơ đồ màu $\alpha: X \rightarrow C$ đối với w , ký hiệu là $w(\alpha)$, là phần tử

$$w(\alpha) = \prod_{x \in X} w(\alpha(x)) \text{ của vành } A.$$

Ta nhận xét rằng các sơ đồ màu trong cùng một quỹ đạo dưới tác động của G lên Ω sẽ có cùng trọng lượng.

Thật vậy, giả sử $g \in G$ và $\alpha \in \Omega$.

Khi đó,

$$w(g(\alpha)) = \prod_{x \in X} w(g(\alpha)(x)) = \prod_{x \in X} w(\alpha(g^{-1}(x))).$$

Do g^{-1} là một hoán vị trên X nên khi x duyệt qua tất cả các phần tử của X thì $g^{-1}(x)$ cũng duyệt qua tất cả các phần tử của X . Vì vậy, $\prod_{x \in X} w(\alpha(g^{-1}(x)))$ và $\prod_{x \in X} w(\alpha(x))$ là các tích của cùng các phần tử của A với các thứ tự khác nhau. Nhưng do A là vành giao hoán nên $w(g(\alpha)) = w(\alpha)$.

Giả sử Δ là một quỹ đạo của G trên Ω . Ta định nghĩa trọng lượng của Δ , ký hiệu là $w(\Delta)$, chính là trọng lượng của một sơ đồ màu nào đó trong Δ , tức là $w(\Delta) = w(\alpha)$ với $\alpha \in \Delta$ bất kỳ. Định nghĩa này hoàn toàn có nghĩa do ta có nhận xét ở trên rằng các sơ đồ màu trong cùng một quỹ đạo của G có cùng trọng lượng.

Ta định nghĩa số các mẫu, ký hiệu là I , đối với hàm trọng lượng w dưới tác động của G lên Ω là tổng của các trọng lượng của các quỹ đạo, tức là $I = \sum_{\Delta \text{ là quỹ đạo của } G \text{ trên } \Omega} w(\Delta)$.

Mục tiêu của ta là tìm ra công thức biểu diễn I qua đa thức chỉ số chu trình.

Trước hết ta tổng quát hóa Bổ đề Burnside.

Kết quả 4. (Bổ đề trọng lượng Burnside)

$$I = \sum_{\Delta \text{ là quỹ đạo của } G \text{ trên } \Omega} w(\Delta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\alpha \in \Omega: g(\alpha) = \alpha} w(\alpha).$$

Chứng minh. Với mọi quỹ đạo Δ của G trên Ω và mọi $\alpha \in \Delta$, theo Kết quả 1 ta có $|\Delta| |G_\alpha| = |G|$.

Do đó

$$\begin{aligned} w(\Delta) &= \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\alpha \in \Delta} w(\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \Delta} \frac{|G_\alpha|}{|G|} w(\alpha) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in \Delta} |G_\alpha| w(\alpha). \end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{\Delta \text{ là quỹ đạo của } G \text{ trên } \Omega} w(\Delta) = \sum_{\Delta \text{ là quỹ đạo của } G \text{ trên } \Omega} \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in \Delta} |G_\alpha| w(\alpha) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in \Omega} |G_\alpha| w(\alpha) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{g \in G: g(\alpha) = \alpha} w(\alpha) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\alpha \in \Omega: g(\alpha) = \alpha} w(\alpha).
 \end{aligned}$$

Lấy $w: C \rightarrow A: c \mapsto 1$. Khi đó $w(\alpha) = 1$ cho mọi $\alpha \in \Omega$. Vì vậy, vế phải của đẳng thức trong Kết quả trở thành

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_\Omega(g)|.$$

Mặt khác, với mọi quỹ đạo Δ của G trên Ω , ta có $w(\Delta) = w(\alpha) = 1$ trong đó $\alpha \in \Delta$. Suy ra, vế trái của đẳng thức trong Kết quả 4 trở thành số các quỹ đạo của G trên Ω .

Điều đó chứng tỏ rằng Bổ đề Burnside chính là trường hợp riêng của Bổ đề trọng lượng Burnside khi hàm trọng lượng w là $w: C \rightarrow A: c \mapsto 1$.

Kết quả 5. (Định lý đếm Pólya)

Số các mẫu đối với hàm trọng lượng w dưới tác động của G lên Ω bằng $P_{G,X}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, trong đó $n = |X|$ và $p_k = \sum_{c \in C} w(c)^k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh. Giả sử $g \in G$ là một phần tử bất kỳ của G và giả sử thêm g có t chu trình độc lập trên X kể cả chu trình độ dài 1. Ký hiệu X_i là tập tất cả các phần tử của X có mặt trong chu trình thứ i của g .

Khi đó $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ là phân hoạch của X .

Nếu $\alpha \in \text{Fix}_\Omega(g)$ thì do $\alpha(x) = g(\alpha)(x) = \alpha(g^{-1}(x))$ nên mọi phần tử của mỗi X_i có cùng màu.

Do đó $w(\alpha) = \prod_{x \in X} w(\alpha(x)) = \prod_{i=1}^t w(\alpha(x_i))^{|X_i|}$, ở đây x_i là một phần tử bất kỳ của X_i .

Trong chứng minh của Kết quả 3 ta đã chứng minh được rằng nếu $\alpha \in \Omega$ là điểm bất động của g khi và chỉ khi α gán cho các điểm của mỗi chu trình của g bằng cùng một màu.

Do vậy,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha \in \text{Fix}_\Omega(g)} w(\alpha) &= \sum_{(c_1, c_2, \dots, c_t) \in \underbrace{C \times C \times \dots \times C}_{t \text{ lần}}} \left(\prod_{i=1}^t w(c_i)^{|X_i|} \right) \\
 &= \left(\sum_{c \in C} w(c)^{|X_1|} \right) \left(\sum_{c \in C} w(c)^{|X_2|} \right) \dots \left(\sum_{c \in C} w(c)^{|X_t|} \right).
 \end{aligned}$$

Nhưng g có $b_1(g)$ chu trình độ dài 1, ..., $b_n(g)$ chu trình độ dài n .

Do đó,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha \in \text{Fix}_\Omega(g)} w(\alpha) &= \left(\sum_{c \in C} w(c)^{|X_1|} \right) \left(\sum_{c \in C} w(c)^{|X_2|} \right) \dots \left(\sum_{c \in C} w(c)^{|X_t|} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{c \in C} w(c)^k \right)^{b_k(g)} \\
 &= \prod_{i=1}^n p_k^{b_k(g)}.
 \end{aligned}$$

Theo Bổ đề trọng lượng Burnside:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\alpha \in \Omega: g(\alpha)=\alpha} w(\alpha) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{\alpha \in \Omega: g(\alpha)=\alpha} w(\alpha) \right) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\prod_{i=1}^n p_k^{b_k(g)} \right) \\
&= P_{G,X} (p_1, p_2, \dots, p_n).
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Màu của mỗi hạt dùng để xây thành vòng hạt có thể là một trong 3 màu trắng (T), vàng (V), đen (Đ). Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu loại vòng hạt khác nhau, mỗi vòng gồm 6 hạt, trong đó có a) ít nhất một hạt màu đen?

b) đúng 3 hạt màu đen, 2 hạt màu vàng và 1 hạt màu trắng?

Lời giải. Tương tự như trong Ví dụ 1, mỗi vòng hạt gồm 6 hạt màu trắng, vàng hoặc đen nhận được bằng cách xếp các loại hạt trên vào các đỉnh của lục giác đều là 1, 2, 3, 4, 5, 6. Giả sử

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{T, V, Đ\}$, $\Omega = \{\alpha: X \rightarrow C\}$ và G là nhóm tất cả các tự đẳng cấu của lục giác đều.

Khi đó, như ta đã biết trong Ví dụ 1, đa thức chỉ số chu trình của G là

$$P_{G,X} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{12} (x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 4x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6).$$

a) Giả sử A là vành $\mathbb{Q}[x]$ gồm tất cả các đa thức một biến trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$. Ta định nghĩa hàm trọng lượng w như sau:

$$w: C \rightarrow \mathbb{Q}[x]: T \mapsto 1, V \mapsto 1, Đ \mapsto x.$$

Khi đó $p_k = 1^k + 1^k + x^k = 2 + x^k$ với mọi $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Theo Định lý đếm Pólya, số các mẫu đối với hàm trọng lượng w dưới tác động của G lên Ω bằng

$$\begin{aligned}
P_{G,X} (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) &= \frac{1}{12} \left[(x+2)^6 + 3(x+2)^2 (x^2+2)^2 + 4(x^2+2)^3 + 2(x^3+2)^2 + 2(x^6+2) \right] \\
&= \frac{1}{12} \left[(x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64) + 3(x^2 + 4x + 4)(x^4 + 4x^2 + 4) \right. \\
&\quad \left. + 4(x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8) + 2(x^6 + 4x^3 + 4) + (2x^6 + 4) \right] \\
&= \frac{1}{12} \left[(x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64) \right. \\
&\quad \left. + (3x^6 + 12x^4 + 12x^2 + 12x^5 + 48x^3 + 48x + 12x^4 + 48x^2 + 48) \right. \\
&\quad \left. + (4x^6 + 24x^4 + 48x^2 + 32) + (2x^6 + 8x^3 + 8) + (2x^6 + 4) \right] \\
&= \frac{1}{12} [12x^6 + 24x^5 + 108x^4 + 216x^3 + 348x^2 + 240x + 156] \\
&= x^6 + 2x^5 + 9x^4 + 18x^3 + 29x^2 + 20x + 13.
\end{aligned}$$

Vì với mỗi sơ đồ màu α , trọng lượng $w(\alpha)$ của sơ đồ màu này bằng $\prod_{x \in X} w(\alpha(x))$, trọng lượng này cũng

là trọng lượng của mẫu chứa α nên số loại vòng hạt có i hạt đen bằng hệ số của x^i trong đa thức trên.

Vì vậy, số loại vòng hạt có ít nhất một hạt đen bằng $1 + 2 + 9 + 18 + 29 + 20 = 79$.

b) Để tính số loại vòng hạt có đúng 3 hạt màu đen, 2 hạt màu vàng và 1 hạt màu trắng, ta đặt A là vành $\mathbb{Q}[x, y, z]$ và $w: C \rightarrow A: T \mapsto x, V \mapsto y, Đ \mapsto z$.

Khi đó, số các mẫu đối với w dưới tác động của G lên Ω bằng

$$\begin{aligned}
P_{G,X} (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) &= \frac{1}{12} \left[(x+y+z)^6 + 3(x+y+z)^2 (x^2+y^2+z^2)^2 \right. \\
&\quad \left. + 4(x^2+y^2+z^2)^3 + 2(x^3+y^3+z^3)^2 + 2(x^6+y^6+z^6) \right].
\end{aligned}$$

Vì trọng lượng $w(\alpha)$ của sơ đồ màu α gồm đúng 3 hạt đen, 2 hạt vàng và 1 hạt trắng là $x^3 y^2 z$ nên số loại vòng hạt gồm 6 hạt trong đó có đúng 3 hạt màu đen, 2 hạt màu vàng và 1 hạt màu trắng chính là số các quĩ

đạo của G có trọng lượng bằng x^3y^2z , tức là bằng hệ số của x^3y^2z trong đa thức trên. Dễ thấy rằng trong đa thức này, x^3y^2z chỉ được sinh ra từ $(x+y+z)^6$ và $(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)^2$, cụ thể là các số hạng chứa x^3y^2z chính là $\frac{1}{12}\binom{6}{3,2,1}x^3y^2z$ và $\frac{1}{12}3(2xz)(2x^2y^2)$.

Do đó, hệ số của x^3y^2z trong $P_{G,X}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ bằng $\frac{1}{12}\left[\frac{6!}{3!2!1!} + 3 \cdot 2 \cdot 2\right] = \frac{1}{12}\left[\frac{6!}{12} + 12\right] = 6$.

Vậy có 6 loại vòng hạt gồm 6 hạt trong đó có đúng 3 hạt màu đen, 2 hạt màu vàng và 1 hạt màu trắng.

4. Đa thức chỉ số chu trình của các nhóm C_n, D_n và S_n

Ta đã thấy ở mục trước của bài viết rằng đa thức chỉ số chu trình có tầm quan trọng đặc biệt trong lý thuyết Pólya. Vì vậy, việc xác định đa thức chỉ số chu trình cho các lớp nhóm hoán vị thường gặp có một ý nghĩa đặc biệt. Trong mục này của bài viết, ta sẽ xác định đa thức chỉ số chu trình cho nhóm hoán vị cyclic C_n , nhóm hoán vị nhị diện D_n và nhóm đối xứng S_n .

4.1. Nhóm cyclic C_n

Giả sử C_n là nhóm các phép quay của một n -giác đều. Nếu các đỉnh của n -giác đều được đánh thứ tự theo chiều kim đồng hồ là $1, 2, 3, \dots, n$ thì hoán vị $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$ biểu diễn một phép quay của một n -giác đều này theo chiều kim đồng hồ đi một góc $\frac{360}{n}$ độ. Vì vậy, C_n chính là nhóm cyclic sinh bởi hoán vị σ . Nếu xem C_n như là một tập hợp thì $C_n = \{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \sigma^n = e\}$, ở đây e là phần tử đơn vị của C_n .

Ta xác định cấu trúc chu trình cho mỗi σ^i với $i = 1, 2, \dots, n$. Trước hết ta nhận xét rằng chu trình của σ^i chứa đỉnh k có dạng $(k, k+i, k+2i, \dots)$ và độ dài của chu trình này bằng số nguyên dương m nhỏ nhất sao cho $k + mi \equiv k \pmod{n} \Leftrightarrow mi \equiv 0 \pmod{n}$.

Suy ra, $m = \frac{n}{\gcd(i, n)}$, trong đó $\gcd(i, n)$ là ước chung lớn nhất của i và n .

Như vậy là độ dài của mỗi chu trình của σ^i không phụ thuộc vào đỉnh mà nó chứa và đều bằng $\frac{n}{\gcd(i, n)}$.

Tóm lại, σ^i có $\gcd(i, n)$ chu trình độ dài $\frac{n}{\gcd(i, n)}$.

Nói riêng, với mọi ước số d của n , σ^d có d chu trình độ dài $\frac{n}{d}$.

Bây giờ, giả sử d là một ước số của n . Ta tính xem có bao nhiêu phần tử σ^i của C_n có d chu trình độ dài $\frac{n}{d}$. Thấy ngay rằng số các phần tử như thế bằng số các số $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\gcd(i, n) = d$. Nhưng số các số $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\gcd(i, n) = d$ lại bằng số các số $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\gcd\left(\frac{i}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$, tức là bằng $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Vì vậy, đa thức chỉ số chu trình của nhóm hoán vị cyclic C_n là

$$P_{G,X}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{\frac{n}{d}}^d = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{\frac{n}{d}}, \text{ ở đây } \varphi(d) \text{ là } \varphi\text{-hàm Euler.}$$

4.2. Nhóm nhị diện D_n

Giả sử G là nhóm tất cả các tự đẳng cấu của một n -giác đều. Người ta đã chứng minh được rằng G chính là nhóm nhị diện D_n bao gồm n phép quay và n phép phản xạ. Ta đã mô tả cấu trúc chu trình của các phép quay khi ta xét nhóm cyclic C_n . Bây giờ ta mô tả cấu trúc chu trình cho các phép phản xạ.

Có hai trường hợp có thể xảy ra:

i) n là số lẻ

Khi đó, mỗi phép phản xạ là một phép đối xứng với trục đi qua một đỉnh và trung điểm của cạnh đối diện với đỉnh đó. Vì vậy, mỗi phép phản xạ có 1 chu trình độ dài 1 và $\frac{n-1}{2}$ chu trình độ dài 2. Do đó, số hạng

tương ứng với nó trong đa thức chỉ số chu trình là $\frac{1}{|G|} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}$.

Suy ra,

$$P_{G,X}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{\frac{n}{d}} + n x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

ii) n là số chẵn

Trong trường hợp này, các phép phản xạ được phân thành hai loại: loại thứ nhất là các phép đối xứng với trục đi qua các cặp đỉnh đối diện nhau của n -giác đều, có $\frac{n}{2}$ phép phản xạ; loại thứ hai là các phép đối xứng với trục đi qua trung điểm của các cạnh đối diện nhau của n -giác đều đó, cũng có $\frac{n}{2}$ phép phản xạ như vậy.

Mỗi phép phản xạ loại thứ nhất có 2 chu trình độ dài 1 và $\frac{n-2}{2}$ chu trình độ dài 2; còn mỗi phép phản xạ loại thứ hai có $\frac{n}{2}$ chu trình độ dài 2.

Vì vậy, đa thức chỉ số chu trình của D_n trong trường hợp này là

$$P_{G,X}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{\frac{n}{d}} + \frac{n}{2} x_1^2 x_2^{\frac{n-2}{2}} + \frac{n}{2} x_2^{\frac{n}{2}} \right).$$

4.3. Nhóm đối xứng S_n

Giả sử S_n là tập tất cả các hoán vị của tập $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Khi đó S_n lập thành một đối với phép nhân các ánh xạ. Nhóm này được gọi là nhóm đối xứng của tập $[n]$.

Hoán vị φ của $[n]$ được gọi là có kiểu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ nếu nó có λ_1 chu trình độ dài 1, λ_2 chu trình độ dài 2, ..., λ_n chu trình độ dài n . Giả sử các số $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các số nguyên không âm cho trước thỏa mãn $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n$. Ta tính xem có bao nhiêu phần tử của S_n có kiểu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$. Để làm được điều đó, ta xét sơ đồ sau đây cho một hoán vị kiểu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$:

$$\underbrace{(*) \dots (*)}_{\lambda_1 \text{ lần}} \underbrace{(**) \dots (**)}_{\lambda_2 \text{ lần}} \underbrace{(***) \dots (***)}_{\lambda_3 \text{ lần}} \dots, \text{ ở đây mỗi } * \text{ trong mỗi cặp dấu ngoặc}$$

tròn tượng cho một vị trí để xếp các phần tử của $[n]$ vào.

Vì có $n!$ hoán vị khác nhau của tập $[n]$, nên ta có $n!$ cách sắp xếp các phần tử của $[n]$ vào các vị trí $*$.

Tuy nhiên, các cách sắp xếp khác nhau có thể cho ta cùng một phần tử kiểu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ của S_n . Cụ thể là, λ_i chu trình độ dài i có $\lambda_i!$ cách sắp xếp khác nhau mà vẫn cho ta cùng một phần tử của S_n . Lại có, mỗi chu trình độ dài i có thể bắt đầu bằng một trong i phần tử của chu trình đó.

Như vậy là mỗi phần tử của S_n kiểu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ xuất hiện $1^{\lambda_1} \lambda_1! 2^{\lambda_2} \lambda_2! \dots n^{\lambda_n} \lambda_n!$ lần khi ta xếp các phần tử của $[n]$ vào sơ đồ đã cho.

Suy ra, số các phần tử của S_n kiểu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ bằng $\frac{n!}{1^{\lambda_1} \lambda_1! 2^{\lambda_2} \lambda_2! \dots n^{\lambda_n} \lambda_n!}$.

Do đó, đa thức chỉ số chu trình của S_n là

$$P_{G,X}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n): \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n} \frac{n!}{1^{\lambda_1} \lambda_1! 2^{\lambda_2} \lambda_2! \dots n^{\lambda_n} \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}.$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Trương Phước Nhân, Bài toán đếm các cấu hình đối xứng, 15/02/2018.
- [2]. Trương Phước Nhân, Một số nguyên tắc cơ bản của phép đếm, 02/06/2018.
- [3]. Ngô Đắc Tân, Lý thuyết tổ hợp và đồ thị, NXB Đại học Quốc gia.