

Bài toán vận tải nguyên

Trương Phước Nhân, 07/06/2018

1. Bài toán vận tải nguyên

Bài toán vận tải nguyên là bài toán được biểu diễn dưới dạng giải tích như sau:

Cho biết các số nguyên a_i, b_j, c_j^i và d_j^i với $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$.

Tìm các số nguyên ξ_j^i sao cho

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \xi_j^i = b_j, 1 \leq j \leq n, \\ \sum_{j=1}^n \xi_j^i = a_i, 1 \leq i \leq m, \\ 0 \leq \xi_j^i \leq c_j^i (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{và } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j^i \xi_j^i \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.} \quad (2)$$

Loại bài toán này rất hay gặp trong việc phân phối hàng hóa, giao hàng, phân phối cho người tiêu thụ, v.v... và cả trong các vấn đề có giá trị lý thuyết.

Bài toán vận tải nguyên này lần lượt được gọi là bài toán Hitchcock hoặc là bài toán Koopmans.

Nhận xét 1:

Nếu hệ (1) và (2) có một lời giải ξ_j^i thì rõ ràng $a_i \geq 0, b_j \geq 0, c_j^i \geq 0$. (3)

Ngoài ra, khi cộng tất cả các ξ_j^i lại ta có $\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i$. (4)

Cuối cùng, ghép cho bài toán một mạng vận tải phụ với các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n, x_0, y_0$, trong đó lối vào x_0 được nối liền với mỗi điểm x_i bởi một cung có khả năng thông qua a_i , x_i được nối với y_j bởi một cung có khả năng thông qua c_j^i và y_j được nối với lối ra y_0 bởi một cung có khả năng thông qua b_j .

Nếu bài toán giải được thì theo định lý Gale ta có

$$\sum_{i=1}^m \max \left\{ a_i, \sum_{j \in J} c_j^i \right\} \geq \sum_{j \in J} b_j \text{ với mọi } J \subset \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5)$$

Các điều kiện (3), (4) và (5) là cần và cũng là đủ để cho bài toán vận tải nguyên có lời giải.

Nhận xét 2:

Dấu của các số d_j^i không quan trọng nhưng ta luôn luôn có thể giả thiết rằng nó ≥ 0 .

Thật vậy, trong trường hợp ngược lại thì bằng cách đặt:

$$\begin{aligned} h &= -\min_{i,j} d_j^i > 0, \\ e_j^i &= d_j^i + h > 0, \\ \Rightarrow \sum_i \sum_j e_j^i \xi_j^i &= \sum_i \sum_j d_j^i \xi_j^i + h \sum_i a_i. \end{aligned}$$

Chú ý rằng nếu ta xét bài toán tìm cực đại của hàm $\sum_i \sum_j e_j^i \xi_j^i$ với điều kiện ràng buộc như cũng thì

lời giải mà ta thu được cũng chính là lời giải của bài toán ban đầu.

Sau đây, ta sẽ trình bày một số vấn đề có liên quan đến bài toán vận tải nguyên thường hay gặp trong các bài toán phân phối hàng hóa, giao hàng, phân phối cho người tiêu thụ, v.v...

2. Các thí dụ về bài toán vận tải nguyên

Thí dụ 1. (Hitchcock) Cần phải xác định hành trình của các tàu chở dầu, biết rằng có m bến xếp hàng $x_1, x_2, \dots, x_m$ và n bến dỡ hàng $y_1, y_2, \dots, y_n$, giả thiết rằng cước phí một chuyến đi từ x_i đến y_j là d_j^i , bến xếp hàng x_i có a_i tàu, bến dỡ hàng y_j cần nhận b_j tàu.

Nếu ta ký hiệu ξ_j^i là số tàu định cho chạy từ bến xếp hàng x_i đến bến dỡ hàng y_j và muốn làm cực tiểu tổng cước phí $\sum_{i,j} d_j^i \xi_j^i$ thì ta sẽ trở lại dạng giải tích đã chỉ ra ở trên.

Thí dụ 2. (Votaw và Orden) Có n công nhân $x_1, x_2, \dots, x_n$ cần phải phân công làm n máy $y_1, y_2, \dots, y_n$. Năng suất của công nhân x_i trên máy y_j được biểu thị bằng số d_j^i mà có thể xác định dễ dàng bằng cách kiểm chứng. Ta lấy $\xi_j^i = 1$ nếu định giao cho công nhân x_i làm máy y_j và $\xi_j^i = 0$ trong trường hợp ngược lại. Bài toán được đặt ra ở đây là làm cực đại tổng năng suất $\sum_{i,j} d_j^i \xi_j^i$ với các ràng buộc $\sum_{j=1}^n \xi_j^i = 1, \sum_{i=1}^n \xi_j^i = 1$.

Thí dụ 3. (Orden) Xét đồ thị có hướng gồm n đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_n$ với khả năng thông qua $c_j^i = c(x_i, x_j)$ ở mỗi cung của nó và một số nguyên $p \leq n$; ta giả thiết rằng tại mỗi đỉnh x_i với $i \leq p$ có dư một lượng hàng a_i trong khi tại mỗi đỉnh x_i với $i > p$ lại cần một lượng b_i hàng loại đó.

Ngoài ra, giả thiết thêm rằng $\sum_{i \leq p} a_i = \sum_{j > p} b_j = h$.

Nếu (x_i, x_j) là một cung của đồ thị thì ta có thể vận chuyển từ x_i đến x_j một lượng hàng $\xi_j^i \geq 0$ và cước phí vận tải một đơn vị là d_j^i . Ta muốn thỏa mãn mọi yêu cầu và làm sao cho hàm tổng cước phí vận chuyển $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_j^i \xi_j^i$.

Để đưa bài toán về dạng chính tắc như đã nêu ở đầu bài thì ta đưa thêm vào các biến η_j^i sao cho

$$\begin{aligned} \eta_j^i &= \xi_j^i \text{ khi } i \neq j, (x_i, x_j) \in U; \\ \eta_j^i &= 0 \text{ khi } i \neq j, (x_i, x_j) \notin U; \\ \eta_j^i &= h - \sum_{k \neq j} \xi_j^k \text{ khi } i = j. \end{aligned}$$

Các số η_j^i này thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \eta_j^i &= h \quad (j=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n \eta_j^i &= h + a_i \quad (i \leq p), \\ \sum_{i=1}^n \eta_j^i &= h - b_i \quad (i > p), \\ 0 \leq \eta_j^i &\leq c_j^i \quad (i \neq j), \\ 0 \leq \eta_j^i &\leq h \quad (i = j). \end{aligned} \right.$$

và ta cần làm cực tiểu hàm $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_j^i \eta_j^i$, trong đó $e_j^i = \begin{cases} 0, & i = j; \\ d_j^i, & i \neq j, (x_i, x_j) \in U; \\ +\infty, & i \neq j, (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$

Thí dụ 4. (Cahn)

Ở một nhà kho ta xét một lượng hàng nào đó tại các thời điểm khác nhau $1, 2, 3, \dots, n$ và giả thiết rằng đã biết:

- k là tổng dung lượng của kho;
- t_0 là lượng hàng ban đầu có trong kho;
- p_i là giá bán một đơn vị hàng hóa tại thời điểm i ;
- q_i là giá mua một đơn vị hàng tại thời điểm i ;

r_i là giá bảo quản một đơn vị hàng tại thời điểm i .

Trong khoảng thời gian từ 1 đến n ta sẽ mua bán hàng sao cho cuối cùng thì lượng hàng lại bằng lượng hàng ban đầu t_0 . Như vậy ta cần tìm các số:

α_i là lượng hàng bán tại thời điểm i ;

β_i là lượng hàng mua tại thời điểm i ;

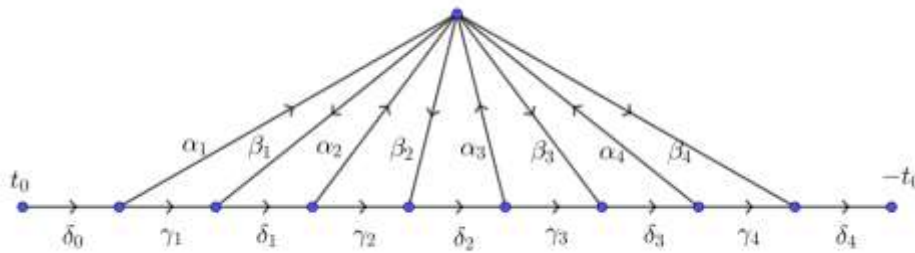
γ_i là lượng hàng chứa trong kho sau khi bán lượng hàng cũ;

δ_i là lượng hàng trong kho sau khi mua lượng hàng mới.

Bài toán mà ta cần giải quyết là làm cực đại tổng lợi nhuận $\sum_{i=1}^n (p_i \alpha_i - q_i \beta_i - r_i \gamma_i)$ với các điều kiện

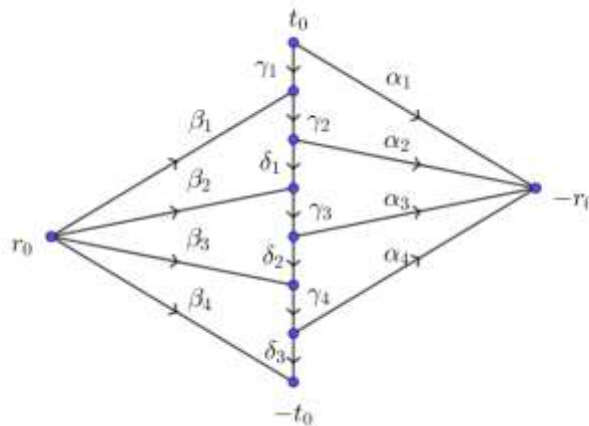
$$\begin{cases} \delta_i - \alpha_{i+1} - \gamma_{i+1} = 0, (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ -\alpha_1 - \gamma_1 = -t_0; \\ \gamma_i + \beta_i - \delta_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ \gamma_n + \beta_n = t_n; \\ 0 \leq \alpha_i \leq \infty, 0 \leq \beta_i \leq \infty; \\ 0 \leq \gamma_i \leq \infty; 0 \leq \delta_i \leq k. \end{cases}$$

Bài toán này đưa ngay về bài toán phân phối hàng trên mạng vận tải (bài toán trong thí dụ 4); với $n = 4$ mạng vận tải và các luồng trên các cung của nó được mô tả như trong Hình vẽ 1.



Hình vẽ 1

Nếu hàng được định xuất hóa thì tổng lượng hàng có thể mua tại thời điểm n là một số cho trước r_0 và ta có biểu diễn tương ứng như trong hình vẽ 2.



Hình vẽ 2

3. Phương pháp Hungary

Từ các điều kiện (1) và (2) ta nhận thấy rằng bài toán vận tải là một trường hợp đặc biệt của quy hoạch tuyến tính và như vậy thì nó có thể giải được bằng phương pháp đơn hình còn bản thân lý thuyết đồ thị chỉ góp phần làm đơn giản các thủ tục thông thường của thuật toán. Ở đây ta sẽ trình bày ngắn gọn một phương pháp khác hẳn, dùng trực tiếp lý thuyết mạng vận tải, phương pháp này tỏ ra có hiệu quả hơn nhiều so với phương pháp đơn hình truyền thống.

Phương pháp này đầu tiên được Kuhn phát triển nhưng sau đó được Ford, Fulkerson, Flood,... mở rộng.

Ở đây không cần phải dùng các phương pháp giải tích và ta vẫn theo quan điểm trực quan của lý thuyết đồ thị. Xét mạng vận tải G với hai tập đỉnh rời nhau: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ và $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Ta nối lối vào x_0 tới mỗi đỉnh x_i bởi một cung có khả năng thông qua $c(x_0, x_i) = a_i$; nối mỗi đỉnh y_j với lối ra y_0 bởi một cung có khả năng thông qua $c(y_j, y_0) = b_j$; cuối cùng nối mỗi x_i với mỗi y_j bởi một cung có khả năng thông qua $c(x_i, y_j) = c_j^i$.

Ta tìm luồng $\varphi(u)$ làm bão hòa các cung kết thúc, nghĩa là làm sao cho

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi(u) \leq c(u) & (u \in U); \\ \varphi(x_0, x_i) = a_i, & 1 \leq i \leq m; \\ \varphi(y_j, y_0) = b_j, & 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Với một luồng φ như thế công của nó được định nghĩa là: $d[\varphi] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j^i \varphi(x_i, x_j)$.

Khi đó bài toán vận tải nguyên trở thành bài toán tìm luồng φ làm bão hòa các cung kết thúc và thực hiện một công lớn nhất.

Ngoài bài toán gốc cũng xét bài toán đối ngẫu định nghĩa như sau:

Quỹ là hàm $\gamma(u) \geq 0$ xác định trên các cung của mạng vận tải G sao cho

$$\gamma(x_0, x_i) + \gamma(x_i, y_j) + \gamma(y_j, y_0) \geq d_j^i \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Ở đây ta có thể hiểu $\gamma(u)$ là tổng số tiền trả cho tất cả các xe vận chuyển trên cung u ; mỗi xe khi chạy trên đoạn đường $[x_0, x_i, y_j, y_0]$ thu một quỹ tổng cộng lớn hơn công d_j^i mà nó phải thực hiện.

Để đơn giản ta đặt

$$\gamma(x_0, x_i) = \alpha_i,$$

$$\gamma(y_j, y_0) = \beta_j,$$

$$\gamma(x_i, y_j) = \gamma_j^i.$$

Khả năng của quỹ γ được định nghĩa là

$$c[\gamma] = \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j^i \gamma_j^i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j.$$

Bài toán đặt ra là ta phải tìm γ có khả năng nhỏ nhất.

Bổ đề. $d[\varphi] \leq c[\gamma]$ với mọi quỹ γ và với mọi luồng φ .

Chứng minh.

$$d_j^i \varphi_j^i \leq \alpha_i \varphi_j^i + \gamma_j^i \varphi_j^i + \beta_j \varphi_j^i.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} d[\varphi] &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j^i \varphi_j^i \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n \varphi_j^i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_j^i \varphi_j^i + \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^m \varphi_j^i \\ &\leq \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j^i \gamma_j^i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j = c[\gamma]. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề vừa trình bày thì nếu có một luồng φ và một quỹ γ sao cho $d[\varphi] = c[\gamma]$ thì φ sẽ là luồng cần tìm.

Để việc trình bày đơn giản, ta giả thiết rằng tất cả c_j^i bằng vô cùng; khi đó tất cả γ_j^i phải bằng 0.

Bài toán đối ngẫu bây giờ trở thành là tìm các số $\alpha_i \geq 0$ và $\beta_j \geq 0$ sao cho

$$\alpha_i + \beta_j \geq d_j^i \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Cùng với bài toán gốc và bài toán đối ngẫu ta xét bài toán phụ sau đây:

Với mỗi quỹ γ ta đưa vào một lưới vận tải phụ $\overline{G}_\gamma$, nhận được từ G bằng cách bỏ đi những cung (x_i, y_j) mà $\alpha_i + \beta_j > d_j^i$. Bài toán đặt ra là tìm luồng lớn nhất trên mạng vận tải $\overline{G}_\gamma$.

Kết quả 1. Nếu với quỹ γ mà đồ thị $\overline{G_\gamma}$ cho một luồng $\overline{\varphi}$ làm bão hòa các cung kết thúc thì γ là quỹ có khả năng nhỏ nhất còn $\overline{\varphi}$ là luồng trên G sinh ra công lớn nhất.

Chứng minh. Hiển nhiên $\overline{\varphi}$ là luồng trên mạng G và nó làm bão hòa các cung kết thúc của G .

Công của nó bằng

$$d[\overline{\varphi}] = \sum_{\alpha_i + \beta_j = d_j^i} d_j^i \overline{\varphi}_j^i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) \overline{\varphi}_j^i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j = c[\gamma].$$

Vậy theo Bổ đề ta suy ra $\overline{\varphi}$ là luồng trên G sinh ra công lớn nhất còn γ là quỹ có khả năng nhỏ nhất.

Kết quả 2. Với quỹ γ mà mạng $\overline{G_\gamma}$ không cho một luồng làm bão hòa các cung kết thúc của nó thì có thể tìm được quỹ γ' mới có $c[\gamma'] < c[\gamma]$.

Chứng minh. Giả sử $\overline{\varphi}$ là luồng lớn nhất không làm bão hòa các cung kết thúc của mạng $\overline{G_\gamma}$; theo định lý Ford – Fulkerson giá trị của luồng đó bằng khả năng thông qua của thiết diện U_A^- mà nó làm bão hòa.

Giả sử $A = \{x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s, y_0\}$. Do U_A^- là thiết diện có khả năng thông qua bé nhất nên nó không chứa cung có khả năng thông qua bằng ∞ ; nghĩa là nếu $i > r, j \leq s$ thì suy ra rằng (x_i, y_j) không phải là cung của đồ thị $\overline{G_\gamma}$, tức là $\alpha_i + \beta_j > d_j^i$.

Hơn nữa có thể coi rằng $\alpha_i > 0$ với mọi $i = 1, \dots, m$ hoặc là $\beta_j > 0$ với mọi $j = 1, \dots, n$, trong trường hợp ngược lại đối với một cặp (i, j) nào đó ta sẽ có $d_j^i = \alpha_i + \beta_j = 0$.

Chẳng hạn ta giả sử $\alpha_i > 0$ với mọi $i = 1, \dots, m$.

Khi đó bằng cách đặt

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{nếu } i \leq r, \\ \alpha_i - 1 & \text{nếu } i > r; \end{cases}$$

$$\text{và } \beta'_j = \begin{cases} \beta_j & \text{nếu } j \leq s, \\ \beta_j + 1 & \text{nếu } j > s; \end{cases}$$

Ta sẽ chỉ ra rằng các đại lượng α'_i và β'_j lập thành một quỹ γ' mới. Thật vậy, nếu $i > r$ và $j \leq s$ thì $\alpha_i + \beta_j > d_j^i$, nghĩa là $\alpha'_i + \beta'_j \geq d_j^i$. Ngoài ra, nếu $i > r$ thì $\alpha_i > 0$ nên $\alpha'_i \geq 0$.

Khả năng của quỹ mới bằng

$$c[\gamma'] = \sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha'_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta'_j = c[\gamma] - \sum_{i=r+1}^m \alpha_i + \sum_{j=s+1}^n b_j.$$

Từ đó:

$$c[\gamma] - c[\gamma'] = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=s+1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \overline{\varphi}_{y_0} > 0, \text{ tức là khả năng của quỹ mới nhỏ hơn quỹ ban đầu.}$$

Thuật toán tìm luồng sinh ra công lớn nhất có thể tóm tắt như sau:

$$\text{Xuất phát từ quỹ } \gamma \text{ xác định bởi các điều kiện } \begin{cases} \alpha_i = \min_j d_j^i, \\ \beta_j = \max_i (d_j^i - \alpha_i) \text{ ta tìm luồng lớn nhất trên mạng } \overline{G_\gamma}. \\ \gamma_j^i = 0 \end{cases}$$

Nếu luồng đó không làm bão hòa các cung kết thúc thì ta xác định quỹ mới γ' và lặp lại tất cả các công việc đã làm; nếu luồng đó làm bão hòa các cung kết thúc thì nó là nghiệm của bài toán.

Nếu không giả thiết tất cả các c_j^i bằng vô cùng thì cần phải xét tới các số γ_j^i và ta luôn có thể coi rằng

$$\gamma_j^i = \max \{d_j^i - \alpha_i - \beta_j; 0\}.$$

Như vậy ta cần xét ba tập hợp sau:

$$P = \{(i, j) \mid \gamma_j^i = 0, d_j^i = \alpha_i + \beta_j\},$$

$$Q = \{(i, j) \mid \gamma_j^i = 0, d_j^i < \alpha_i + \beta_j\},$$

$$R = \{(i, j) \mid \gamma_j^i > 0, d_j^i > \alpha_i + \beta_j\}.$$

Cũng như ở phần trước ta xác định mạng vận tải $\overline{G}_\gamma$ có các cung cũng là các cung của G nhưng có các khả năng thông qua như sau:

$$\overline{a}_i = a_i - \sum_{j: (i, j) \in R} c_j^i, \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\overline{b}_j = b_j - \sum_{i: (i, j) \in R} c_j^i, \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

$$\overline{c}_j^i = \begin{cases} c_j^i & \text{nếu } (i, j) \in P \\ 0 & \text{nếu } (i, j) \in Q \cup R \end{cases}.$$

Kết quả 3. Nếu với quỹ γ mà mạng vận tải $\overline{G}_\gamma$ có luồng $\overline{\varphi}$ làm bão hòa tất cả các cung kết thúc thì γ là quỹ có khả năng nhỏ nhất. Ngoài ra, đối với mạng vận tải G luồng φ sinh ra công lớn nhất được xác định bằng các điều kiện sau: $\varphi_j^i = \begin{cases} \varphi_j^i & \text{nếu } (i, j) \in P \cup Q \\ 0 & \text{nếu } (i, j) \in R \end{cases}$.

Chứng minh.

$$\begin{aligned} d[\varphi] &= \sum_{(i, j) \in P \cup Q} d_j^i \overline{\varphi}_j^i + \sum_{(i, j) \in R} d_j^i c_j^i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) \overline{\varphi}_j^i + \sum_{(i, j) \in R} d_j^i c_j^i \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{a}_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \overline{b}_j + \sum_{(i, j) \in R} d_j^i c_j^i \\ &= c[\gamma] - \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j: (i, j) \in R} c_j^i - \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i: (i, j) \in R} c_j^i - \sum_{(i, j) \in R} \gamma_j^i c_j^i + \sum_{(i, j) \in R} (\alpha_i + \beta_j + \gamma_j^i) c_j^i \\ &= c[\gamma]. \end{aligned}$$

Do đó ta thu được $d[\varphi] = c[\gamma]$, theo Bổ đề, φ là luồng cần tìm.

Kết quả 4. Nếu với quỹ γ mà $\overline{G}_\gamma$ không có luồng $\overline{\varphi}$ làm bão hòa các cung kết thúc thì có thể tìm được quỹ mới γ' có khả năng $c[\gamma'] < c[\gamma]$.

Chứng minh. Giả sử $\overline{\varphi}$ là luồng lớn nhất trên $\overline{G}_\gamma$; theo giả thiết nó không bão hòa các cung kết thúc. Ta xét

tập hợp $A = \{x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s, y_0\}$ sao cho $c(U_A^-) = \overline{\varphi}_z < \sum_{i=1}^m \overline{a}_i$.

Tương tự như trong Kết quả 2, có thể coi rằng tất cả $\alpha_i > 0$.

Bây giờ ta đặt

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{nếu } i \leq r, \\ \alpha_i - 1 & \text{nếu } i > r; \end{cases}$$

$$\beta'_j = \begin{cases} \beta_j & \text{nếu } j \leq s, \\ \beta_j + 1 & \text{nếu } j > s; \end{cases}$$

$$\gamma_j^i = \begin{cases} \gamma_j^i - 1 & \text{nếu } i \leq r, j > s, (i, j) \in R, \\ \gamma_j^i + 1 & \text{nếu } i > r, j \leq s, (i, j) \in R \cup P, \\ \gamma_j^i & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Trước hết ta chỉ ra rằng các số mới tạo ra ở trên xác định một quỹ nào đó; ta có $\alpha'_i \geq 0$, $\beta'_j \geq 0$, $\gamma_j^i \geq 0$.

Để kiểm tra lại rằng các giá trị $\alpha'_i + \beta'_j + \gamma_j^i - d_j^i$ vẫn còn ≥ 0 ta nghiên cứu sự biến thiên Δ của đại lượng này nhờ bảng sau:

	$\begin{matrix} P \\ i \leq r \\ j \leq s \end{matrix}$	$\begin{matrix} P \\ i \leq r \\ j > s \end{matrix}$	$\begin{matrix} P \\ i > r \\ j \leq s \end{matrix}$	$\begin{matrix} P \\ i > r \\ j > s \end{matrix}$	$\begin{matrix} Q \\ i \leq r \\ j \leq s \end{matrix}$	$\begin{matrix} Q \\ i \leq r \\ j > s \end{matrix}$	$\begin{matrix} Q \\ i > r \\ j \leq s \end{matrix}$	$\begin{matrix} Q \\ i > r \\ j > s \end{matrix}$	$\begin{matrix} R \\ i \leq r \\ j \leq s \end{matrix}$	$\begin{matrix} R \\ i \leq r \\ j > s \end{matrix}$	$\begin{matrix} R \\ i > r \\ j \leq s \end{matrix}$	$\begin{matrix} R \\ i > r \\ j > s \end{matrix}$
$\Delta \alpha_i$	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Delta \alpha_j$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\Delta \alpha_i$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
Δ	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0

Trường hợp duy nhất mà $\Delta = -1$ không gây ra nhiều trở ngại cho chúng ta bởi vì với $(i, j) \in Q$ ta có $\alpha_i + \beta_j + \gamma_j^i - d_j^i > 0$ nên $\alpha'_i + \beta'_j + \gamma_j^i - d_j^i \geq 0$.

Bây giờ ta chứng minh rằng khả năng của quỹ giảm thực sự.

Thật vậy,

$$c[\gamma'] = \sum_i a_i \alpha'_i + \sum_j b_j \beta'_j + \sum_{i,j} c_j^i \gamma_j^i = c[\gamma] - \sum_{i>r} a_i + \sum_{j>s} b_j - \sum_{\substack{i \leq r \\ j > s \\ (i,j) \in R}} c_j^i + \sum_{\substack{i > r \\ j \leq s \\ (i,j) \in P}} c_j^i + \sum_{\substack{i > r \\ j \leq s \\ (i,j) \in R}} c_j^i$$

$$\Rightarrow c[\gamma'] - c[\gamma] = -\sum_{i>r} \bar{a}_i + \sum_{j>s} \bar{b}_j + \sum_{\substack{i > r \\ j \leq s}} \bar{c}_j^i = -\sum_i \bar{a}_i + c(U_A^-) < 0.$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Claude Berge, Lý thuyết đồ thị và ứng dụng, bản dịch tiếng Việt của Nguyễn Hữu Nguyên – Nguyễn Văn Vy, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.
[2]. Nguyễn Minh Hằng, Giáo trình Lý thuyết đồ thị, 1996.