# Thuật toán đơn hình

Trương Phước Nhân, 07/12/2018

Nội dung bài viết trình bày các ý chính của thuật toán đơn hình, một phương pháp toán học hiệu quả thường được sử dụng để giải quyết các bài toán quy hoạch tuyến tính.

Đầu tiên ta nhắc lại một số định nghĩa cơ bản về bài toán quy hoạch tuyến tính:

**Dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính**

Tìm các số $x_1, x_2, ..., x_m$ sao cho

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min(\max)$$

trong đó:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = u_j, j = 1,...,k \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le u_j, j = k+1,...,l \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge u_j, j = l+1,...,m \end{cases}$$

**Bài toán 1.**

Tìm $x_1, x_2$ sao cho

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \min$$

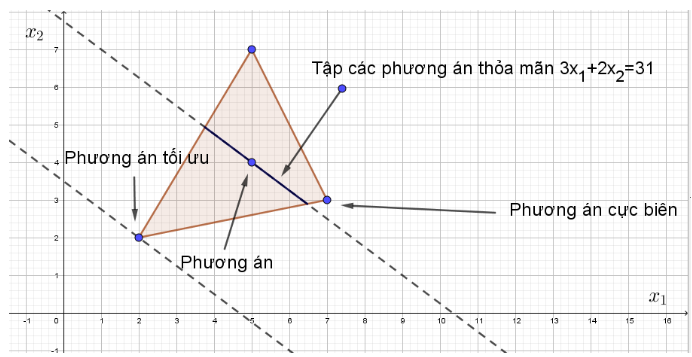
trong đó:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \ge 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 17 \\ 5x_1 - 3x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Một số thuật ngữ có liên quan về bài toán quy hoạch tuyến tính

- Hàm $f$ được gọi là *hàm mục tiêu*.
- Điều kiện $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = u_j, j = 1,...,k \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le u_j, j = k+1,...,l \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge u_j, j = l+1,...,m \end{cases}$ được gọi là điều kiện ràng buộc.
- Bộ số $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ thỏa mãn điều kiện ràng buộc được gọi là phương án của bài toán.
- Bộ số $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ thỏa mãn điều kiện ràng buộc và làm tối ưu hàm mục tiêu được gọi là phương án tối ưu của bài toán.

Hình vẽ minh họa




Bài toán quy hoạch tuyến tính có thể đc giải bằng nhiều cách khác nhau: thuật tóan đơn hình, thuật toán ellipsoid, thuật toán tỉ lệ affine, thuật toán giảm thế, thuật toán đường trung tâm,…. Nhưng thuật toán đơn hình vẫn luôn là thuật toán quan trọng số một vì nó thuận tiện trong thực hành và cài đặt trên các chương trình máy tính.

Ý tưởng của thuật toán đơn hình là bắt đầu từ một phương án ban đầu, nếu nó chưa phải tối ưu thì đi theo một cạnh của miền ràng buộc để tới được một phươn án tối ưu hơn.

Khi thuật toán kết thúc thì phương án tìm được chính là phương án tối ưu.

Để giải một bài toán quy hoạch tuyến tính bằng thuật toán đơn hình, ta thực hiện các bước sau:

**<u>Bước 0.</u> (Đưa bài toán về dạng chuẩn)**

Để thuận tiện cho việc thực hành bằng phương pháp đơn hình ta sẽ luôn luôn quy mọi bài toán quy hoạch tuyến tính về dưới dạng chuẩn

**Dạng chuẩn của bài toán quy hoạch tuyến tính**

Tìm các số $x_1, x_2, ..., x_m$ sao cho

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

trong đó:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = u_j, j = 1, ..., k \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, m} \end{cases}$$

($a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, ..., a_{mn}$ là các tham số thực và $b_j \geq 0, \forall j$)

**Một số phép biến đổi thường dùng:**

● Nếu có biến $x_i \leq 0$ thì đặt $y_i = -x_i$ và thay vào bài toán.

● Nếu có biến $x_i \geq c > 0$ thì đặt $y_i = x_i - c$ và thay vào bài toán.

● Nếu có biến $x_i$ không có điều kiện ràng buộc nào (biến tự do) thì đặt $x_i = y_i - z_i$ với $y_i, z_i \geq 0$ và thay vào bài toán.

● Nếu có điều kiện dạng $h(x_1, ..., x_n) \leq C$ với $C \geq 0$ thì đưa thêm biến $s \geq 0$ vào để chuyển về dạng $h(x_1, ..., x_n) + s = C$.

● Nếu có điều kiện dạng $h(x_1, ..., x_n) \geq C$ với $C \geq 0$ thì đưa thêm biến $t \geq 0$ vào để chuyển về dạng $h(x_1, ..., x_n) - t = C$.

Sau khi kết thúc, ta được một bài toán tương đương với bài toán ban đầu và ở dạng chuẩn.

**<u>Bước 0.</u>**

**Bài toán 2.**

Tìm $x_1, x_2$ sao cho

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \min$$

trong đó:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 17 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Để xây dựng phương pháp cực biên ban đầu và tinh chỉnh nghiệm cho bài toán quy hoạch tuyến tính ta sẽ dùng các phép quay loại được định nghĩa như sau

**Sơ đồ minh họa cho phép quay**

| | $-x_1$ | ... | $-x_j$ | ... | $-x_s$ | ... | $-x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1 =$ | $a_{11}$ | ... | $a_{1j}$ | ... | $a_{1s}$ | ... | $a_{1n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_i =$ | $a_{i1}$ | ... | $a_{ij}$ | ... | $a_{is}$ | ... | $a_{in}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_r =$ | $a_{r1}$ | ... | $a_{rj}$ | ... | $\boxed{a_{rs}}$ | ... | $a_{rn}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_m =$ | $a_{m1}$ | ... | $a_{mj}$ | ... | $a_{ms}$ | ... | $a_{mn}$ |

$\rightarrow$

| | $-x_1$ | ... | $-x_j$ | ... | $-y_r$ | ... | $-x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1 =$ | $b_{11}$ | ... | $b_{1j}$ | ... | $b_{1s}$ | ... | $b_{1n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_i =$ | $b_{i1}$ | ... | $b_{ij}$ | ... | $b_{is}$ | ... | $b_{in}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_s =$ | $b_{r1}$ | ... | $b_{rj}$ | ... | $\boxed{b_{rs}}$ | ... | $b_{rn}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_m =$ | $b_{m1}$ | ... | $b_{mj}$ | ... | $b_{ms}$ | ... | $b_{mn}$ |

**Quy tắc xác định các hệ số :**
$$\begin{cases} b_{rs} = \dfrac{1}{a_{rs}} \\ b_{rj} = \dfrac{a_{rj}}{a_{rs}}, j \neq s \\ b_{is} = \dfrac{-a_{is}}{a_{rs}}, i \neq r \\ b_{ij} = \dfrac{a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}, i \neq r, j \neq s \end{cases}$$

**<u>Bước 1.</u> (Xây dựng phương án ban đầu)**

Bảng đơn hình của bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chuẩn là

| | $-x_1$ | ... | $-x_s$ | ... | $-x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0 =$ | $a_{11}$ | ... | $a_{1s}$ | ... | $a_{1n}$ | $u_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $0 =$ | $a_{i1}$ | ... | $a_{is}$ | ... | $a_{in}$ | $u_i$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $0 =$ | $a_{r1}$ | ... | $\boxed{a_{rs}}$ | ... | $a_{rn}$ | $u_r$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $0 =$ | $a_{m1}$ | ... | $a_{ms}$ | ... | $a_{mn}$ | $u_m$ |
| $f =$ | $-c_1$ | ... | $-c_s$ | ... | $-c_n$ | 0 |

Xét dòng thứ $i$ tùy ý $(1 \leq i \leq m)$:

- Nếu $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} \leq 0$ thì tập các phương án của bài toán $D = \varnothing$, do đó bài toán vô nghiệm
- Nếu tồn tại $a_{is} > 0$, ta chọn cột $s$ làm cột quay. Để xác định dòng quay đầu tiên ta lập các tỉ số $\dfrac{u_i}{a_{is}}$ tại các phần tử $a_{is} > 0$ trên cột $s$, sau đó tìm tỉ số nhỏ nhất

**<u>Bước 1.</u>**

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0 =$ | $-1$ | 5 | $-1$ | 0 | 0 | 8 |
| $0 =$ | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 17 |
| $0 =$ | $\boxed{5}$ | $-3$ | 0 | 0 | $-1$ | 4 |
| $f =$ | $-3$ | $-4$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bỏ

| | 0 | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0 =$ | $1/5$ | $22/5$ | $-1$ | 0 | $-1/5$ | $44/5$ |
| $0 =$ | $-2/5$ | $31/5$ | 0 | 1 | $2/5$ | $77/5$ |
| $x_1 =$ | $\boxed{1/5}$ | $-3/5$ | 0 | 0 | $-1/5$ | $4/5$ |
| $f =$ | $3/5$ | $-29/5$ | 0 | 0 | $-3/5$ | $12/5$ |

$\min \frac{u_i}{a_{is}} = \frac{u_r}{a_{rs}}$, khi đó dòng $r$ sẽ được chọn làm dòng quay.

Thực hiện phép quay với tâm $a_{rs}$ ta thu được:

| | $-x_1$ | ... | $-x_{s-1}$ | $-x_s$ | ... | $-x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0=$ | $b_{11}$ | ... | $b_{1,s-1}$ | $b_{1s}$ | ... | $b_{1n}$ | $v_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $0=$ | $b_{i1}$ | ... | $b_{i,s-1}$ | $b_{is}$ | ... | $b_{in}$ | $v_i$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $0=$ | $b_{r1}$ | ... | $b_{r,s-1}$ | $b_{rs}$ | ... | $b_{rn}$ | $v_r$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $0=$ | $b_{m1}$ | ... | $b_{m,s-1}$ | $b_{ms}$ | ... | $b_{mn}$ | $v_m$ |
| $f=$ | $d_1$ | ... | $d_s$ | $d_s$ | ... | $d_n$ | $d_0$ |

- Khi thực hiện phép quay tâm $a_{rs}$ thì $x_s$ được chuyển xuống hàng $r$ và số 0 ở hàng $r$ được chuyển lên cột $s$.
- Khi thực hiện xong phép quay ta sẽ xóa bỏ cột $s$ đi vì cột $s$ bị triệt tiêu.

Thực hiện liên tiếp các phép quay như trên để lần lượt khử các số $0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử các biến được chuyển xuống là $x_1, x_2, ..., x_m$, ta thu được

| | $-x_{m+1}$ | ... | $-x_s$ | ... | $-x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1=$ | $c_{1,m+1}$ | ... | $c_{1s}$ | ... | $c_{1n}$ | $t_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_r=$ | $c_{r,m+1}$ | ... | $\boxed{c_{rs}}$ | ... | $c_{rn}$ | $t_r$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_m=$ | $c_{m,m+1}$ | ... | $c_{m,s}$ | ... | $c_{m,n}$ | $t_m$ |
| $f=$ | $\Delta_{m+1}$ | ... | $\Delta_n$ | ... | $\Delta_n$ | $\Delta_0$ |

**Dấu hiệu tối ưu**

Giả sử $X$ là phương án cực biên thu được bằng cách cho các biến độc lập bằng 0, biến phụ thuộc bằng cột số hạng tự do.

TH1. Nếu $\Delta_j \le 0 \ (j = 1...n)$ thì $X$ là phương án tối ưu.

TH2. Nếu tồn tại $\Delta_s > 0$ thì:

TH2.1. $c_{is} \le 0 \ (i = 1...m)$: bài toán vô nghiệm.

TH2.2. Tồn tại $c_{is} > 0$: có thể xây dựng phương án cực biên $X'$ mới tốt hơn phương án $X$.

Lập luận tương tự ta nhận được:

| | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $0=$ | 22/5 | −1 | 0 | −1/5 | 44/5 |
| $0=$ | 31/5 | 0 | 1 | $\boxed{2/5}$ | 77/5 |
| $x_1=$ | −3/5 | 0 | 0 | −1/5 | 4/5 |
| $f=$ | −29/5 | 0 | 0 | −3/5 | 12/5 |

Bỏ

| | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $0=$ | 15/2 | −1 | 1/2 | 1/2 | 33/2 |
| $x_5=$ | 31/2 | 0 | 5/2 | $\boxed{5/2}$ | 77/2 |
| $x_1=$ | 5/2 | 0 | 1/2 | 1/2 | 17/2 |
| $f=$ | 7/2 | 0 | 3/2 | 3/2 | 51/2 |

| | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $0=$ | $\boxed{15/2}$ | −1 | 1/2 | 33/2 |
| $x_5=$ | 31/2 | 0 | 5/2 | 77/2 |
| $x_1=$ | 5/2 | 0 | 1/2 | 17/2 |
| $f=$ | 7/2 | 0 | 3/2 | 51/2 |

Bỏ

| | 0 | $-x_3$ | $-x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_2=$ | 2/15 | −2/15 | 1/15 | 33/15 |
| $x_5=$ | −31/15 | 31/15 | 22/15 | 22/5 |
| $x_1=$ | −1/3 | 1/3 | 1/3 | 3 |
| $f=$ | −7/15 | 7/15 | 19/15 | 89/5 |

| | $-x_3$ | $-x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_2=$ | −2/15 | 1/15 | 33/15 |
| $x_5=$ | 31/15 | 22/15 | 22/5 |
| $x_1=$ | 1/3 | 1/3 | 3 |
| $f=$ | 7/15 | 19/15 | 89/5 |

**<u>Bước 2.</u> (Tối ưu hóa phương án)**

Phép xây dựng phương án cực biên mới được tiến hành như sau:

- Chọn cột $s$ làm cột quay
- Để xác định dòng quay đầu tiên ta lập các tỉ số $\dfrac{t_i}{c_{is}}$ tại

các phần tử $c_{is} > 0$ trên cột $s$, sau đó tìm tỉ số nhỏ nhất $\min \dfrac{t_i}{c_{is}} = \dfrac{t_r}{c_{rs}} = \theta$, khi đó dòng $r$ sẽ được chọn làm dòng quay.

Thực hiện phép quay với tâm $c_{rs}$, ta thu được bảng đơn hình mới với phương án cực biên tương ứng $X'$

| | $-x_{m+1}$ | ... | $-x_r$ | ... | $-x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1 =$ | $c'_{1,m+1}$ | ... | $c'_{1s}$ | ... | $c'_{1n}$ | $t'_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_s =$ | $c'_{r,m+1}$ | ... | $c'_{rs}$ | ... | $c'_{rn}$ | $t'_r$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_m =$ | $c'_{m,m+1}$ | ... | $c'_{m,n}$ | ... | $c'_{m,n}$ | $t'_m$ |
| $f =$ | $\Delta'_{m+1}$ | ... | $\Delta'_n$ | ... | $\Delta'_n$ | $\Delta'_0$ |

Công thức tính độ suy giảm $\boxed{f(X) - f(X') = \theta\Delta_s}$

**Lưu ý:**

Trong trường hợp ta có nhiều tâm quay thì ta chọn tâm quay làm cho hàm mục tiêu suy giảm nhiều nhất.

**<u>Bước 2.</u>**

$$\theta_3 = \min\left\{\frac{\frac{22}{5}}{\frac{31}{15}}, \frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{3}}\right\} = \frac{\frac{22}{5}}{\frac{31}{15}}$$

$$\theta_4 = \min\left\{\frac{\frac{33}{15}}{\frac{1}{15}}, \frac{\frac{22}{5}}{\frac{22}{15}}, \frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{3}}\right\} = \frac{\frac{22}{5}}{\frac{22}{15}}$$

| | $-x_3$ | $-x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_2 =$ | $-2/15$ | $1/15$ | $33/15$ |
| $x_5 =$ | $31/15$ | $\boxed{22/15}$ | $22/5$ |
| $x_1 =$ | $1/3$ | $1/3$ | $3$ |
| $f =$ | $7/15$ | $19/15$ | $89/5$ |

| | $-x_3$ | $-x_5$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_2 =$ | $-5/22$ | $-1/22$ | $2$ |
| $x_4 =$ | $31/22$ | $\boxed{15/22}$ | $3$ |
| $x_1 =$ | $-3/22$ | $-5/22$ | $2$ |
| $f =$ | $-29/22$ | $-19/22$ | $14$ |

**Tài liệu tham khảo:**

Hồ Hữu Hòa , Giáo trình Quy hoạch tuyến tính, Đại học Cần Thơ.