

Bất đẳng thức Fisher

Trương Phước Nhân, 31/07/2018

Kết quả 1. (Fisher) Cho trước một $2-(v, k, \lambda)$ design có với b khối. Khi đó, $b \geq v$.

Chứng minh.

Để giảm bớt tính phức tạp của vấn đề, đầu tiên ta xem xét trường hợp $\lambda = 1$, chọn một điểm x và một khối B với $x \notin B$. Với mỗi điểm $y \in B$, có duy nhất một khối B_y chứa cả x và y ; tất cả các khối mà ta vừa nêu ra ở trên đều khác nhau (nếu $B_y = B_z$ thì các khối B_y và B chứa cả y và z , nên chúng phải trùng nhau; nhưng $x \in B_y$, $x \notin B$, mâu thuẫn). Do đó, số r các khối cùng chứa điểm x nhỏ hơn hoặc bằng số các điểm nằm trong B , tức là $k \geq r$. Bằng cách sử dụng các kết quả cơ bản về t -design, $bk = vr$ và

$$b \binom{k}{2} = \lambda \binom{v}{2}, \text{ ta suy ra được rằng } br = vk, \text{ nên ta có } b \geq v.$$

Đối với trường hợp tổng quát ta sẽ đưa ra hai chứng minh cho bất đẳng thức Fisher: chứng minh thứ nhất dựa trên đại số tuyến tính, chứng minh thứ hai là sự kết hợp đầy sáng tạo giữa kỹ thuật đếm bằng hai cách và sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Chứng minh thứ nhất. Giả sử $X = \{x_1, \dots, x_v\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$, và ký hiệu M là ma trận cấp $v \times b$ trong đó phần tử (i, j) bằng 1 nếu $x_i \in B_j$, 0 trong trường hợp ngược lại. Ma trận M được gọi là ma trận liên thuộc của cấu hình này.

Khẳng định 1. MM^T là một ma trận cấp $v \times v$ với các phần tử trên đường chéo chính bằng r và các vị trí còn lại đều bằng λ .

Thật vậy, $(MM^T)_{ik} = \sum_{j=1}^b (M)_{ij} (M^T)_{jk} = \sum_{j=1}^b (M)_{ij} (M)_{kj}$, số này chính là số các khối cùng chứa phần tử x_i và x_k , nên số này bằng r nếu $i = k$, và bằng λ nếu $i \neq k$.

Khẳng định 2. $\det(MM^T) = rk(r - \lambda)^{v-1}$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} \det(MM^T) &= \det \begin{pmatrix} r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} r + (v-1)\lambda & r + (v-1)\lambda & \dots & r + (v-1)\lambda \\ \lambda & r & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix} \\ &= (r + (v-1)\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & r & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix} \\ &= rk \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & r - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r - \lambda \end{pmatrix} \\ &= rk(r - \lambda)^{v-1}. \end{aligned}$$

Do đó, ma trận MM^T không suy biến. Do ma trận MM^T có cấp bằng $v \times v$ nên hạng của nó bằng v .

Nếu $b < v$ thì $\text{rank}(M) \leq b < v$, nên $\text{rank}(MM^T) < v$, mâu thuẫn.

Tóm lại, $b \geq v$.

Chứng minh thứ hai.

Cổ định một khối B bất kỳ, với mọi $i = 0, \dots, k$, ký hiệu n_i là số các khối $B' \neq B$ sao cho $|B \cap B'| = i$.

Dựa trên ý tưởng đếm bằng hai cách, ta thu được các hệ thức sau:

$$\sum_{i=0}^k n_i = b-1,$$

$$\sum_{i=0}^k i n_i = k(r-1),$$

$$\sum_{i=0}^k i(i-1) n_i = k(k-1)(\lambda-1).$$

Thật vậy, hệ thức thứ nhất thu được bằng cách đếm số các khối $B' \neq B$. Hệ thức thứ hai thu được bằng cách đếm số các cặp (x, B') trong đó $x \in B \cap B'$ và $B' \neq B$ (với mỗi điểm trong số k của khối B có $r-1$ khối khác cũng chứa nó). Hệ thức thứ ba thu được bằng cách đếm số các bộ ba (x_1, x_2, B') trong đó $\{x_1, x_2\} \subset B \cap B'$ (có k cách chọn x_1 , $k-1$ cách chọn x_2 , và $\lambda-1$ khối $B' \neq B$ chứa cả x_1 và x_2).

Từ các hệ thức trên ta thu được $\sum_{i=0}^k i^2 n_i = k(r-1) + k(k-1)(\lambda-1)$.

Do đó, $\sum_{i=0}^k (x-i)^2 n_i = (b-1)x^2 - 2k(r-1)x + (k(r-1) + k(k-1)(\lambda-1))$ trong đó x là một biến số nào đó.

Từ kết quả vừa đạt được ta nhận thấy rằng tam thức $(b-1)x^2 - 2k(r-1)x + (k(r-1) + k(k-1)(\lambda-1))$ là nửa xác định dương, tức là nó nhận các giá trị lớn hơn hoặc bằng 0 với mọi số thực x .

Do đó, biệt thức của của tam thức phải nhỏ hơn hoặc bằng không, tức là

$$k^2(r-1)^2 - (b-1)k((r-1) + (k-1)(\lambda-1)) \leq 0.$$

Bằng cách nhân cả hai vế cho $v-1$ và sử dụng các hệ thức liên hệ giữa các tham số v, k, r là $bk = vr$ và $r(k-1) = \lambda(v-1)$ để thu gọn biểu thức, ta thu được:

$$k^2(r-1)^2(v-1) - (vr-k)(r-k)(v-1) - (vr-k)r(k-1)^2 \leq 0.$$

Sau một số phép biến đổi ta thu được $(k-r)r(v-k)^2 \leq 0$.

Do $r > 0$ và $(v-k)^2 > 0$ nên ta phải có $k \geq r$.

Từ hệ thức $bk = vr$, ta suy ra $b \geq v$.

Kết quả 2. Cho trước một $2-(v, k, \lambda)$ design có với $k < v$.

Khi đó, các khẳng định sau là tương đương với nhau:

- a) $b = v$;
- b) $r = k$;
- c) hai khối bất kỳ giao nhau tại λ điểm;
- d) hai khối bất kỳ giao nhau tại cùng một lượng điểm không đổi.

Chứng minh. Do $bk = vr$, nên a) và b) tương đương với nhau. Hiển nhiên, từ c) ta luôn suy ra được d). Phần việc còn lại của ta là chỉ ra rằng từ b) suy ra c), và từ d) suy ra b).

d) $\Rightarrow$ b): Nếu hai khối bất kỳ luôn giao nhau tại μ điểm thì $n_i = 0$ với mọi giá trị $i \neq \mu$, nên

$\sum (\mu-i)^2 n_i = 0$. Điều này có nghĩa là $x = \mu$ là một nghiệm của tam thức nêu ở phần chứng minh trên, nên biệt thức của tam thức này phải bằng 0. Do đó, $(k-r)r(v-k)^2 = 0$, hay $r = k$.

b) $\Rightarrow$ c): Nếu $r = k$ thì $b = v$, nên tam thức nêu ở trên được thu gọn lại dưới dạng

$$(v-1)x^2 - 2k(k-1)x + k(k-1)\lambda.$$

Bằng cách sử dụng hệ thức $k(k-1) = (v-1)\lambda$, nên ta có thể thu gọn lại biểu thức trên thành

$$(v-1)(x^2 - 2\lambda x + \lambda^2).$$

Do đó, $x = \lambda$ là nghiệm của tam thức, nên bằng cách đảo lại các lập luận ta suy ra $n_i = 0$ với mọi $i \neq \lambda$, hay một khối bất kỳ giao với B tại chính xác λ . Do B là một khối bất kỳ, nên ta nhận được khẳng định c).

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Trương Phước Nhân, Cấu trúc t -design, 27/07/2018.
- [2]. Trương Phước Nhân, Đánh giá số khối cho một $t-(v, k, 1)$ design, 22/02/2018.
- [3]. Trương Phước Nhân, Ma trận liên thuộc của t -design, 13/02/2018.
- [4]. Trương Phước Nhân, t -design, 12/02/2018.
- [5]. Trương Phước Nhân, Tiếp cận sơ cấp bất đẳng thức Fisher, 10/02/2018.
- [6]. Trương Phước Nhân, Định lý de Bruijn – Erdős, 30/07/2018.
- [7]. J.H. van Lint-R.M. Wilson, A course in combinatorics, Cambridge University Press, 2001.