

Bài toán tô màu đồ thị / Định lý Courant – Fischer

Trương Phước Nhân, 22/01/2019

Nội dung bài viết trình bày ý tưởng áp dụng các phân tích và kết quả của đại số tuyến tính để đánh giá độ lớn của sắc số.

1. Kiến thức cơ bản

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$ với $V = \{1, \dots, n\}$ và ma trận kề $A(G)$ có các giá trị riêng $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ với các vector riêng trực giao tương ứng $v_1, \dots, v_n$, trong trường hợp các vector $v_1, \dots, v_n$ không trực giao thì bằng cách áp dụng quá trình trực giao Hilbert-Schmidt ta thu được một hệ các giá trị riêng mới trực giao nhau đôi một.

Kết quả 1.

$$\alpha_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Chứng minh kết quả 1.

Đầu tiên, do $v_1, \dots, v_n$ là hệ vector riêng trực giao nên ta có thể biểu diễn vector x lại dưới dạng

$$x = \sum_{i=1}^n c_i v_i,$$

trong đó $c_i = v_i^T x$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} x^T A x &= \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^2. \end{aligned}$$

Mặt khác, $x^T x = \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2$, do $v_1, \dots, v_n$ là hệ trực giao.

Do đó,

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_1 c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \alpha_1 \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \alpha_1.$$

Dấu “=” xảy ra trong đánh giá trên khi $x = v_1$.

Bằng phương pháp lập luận tương tự ta cũng thu được các kết quả tương tự đặc trưng cho các giá trị riêng còn lại của ma trận kề $A(G)$:

Kết quả 2.

Giả sử T_k là không gian vector trực giao với các vector $v_1, \dots, v_{k-1}$.

Khi đó,

$$\alpha_k = \max_{x \in T_k} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Chứng minh kết quả 2.

Đầu tiên ta biểu diễn vector x theo hệ cơ sở $v_1, \dots, v_n$ dưới dạng $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$.

Do $x \in T_k$ nên $c_i = v_i^T x = 0$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq k-1$.

Do đó,

$$\frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \frac{\sum_{i=k}^n \alpha_i c_i^2}{\sum_{i=k}^n c_i^2} \leq \frac{\sum_{i=k}^n \alpha_k c_i^2}{\sum_{i=k}^n c_i^2} = \alpha_k \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \alpha_k.$$

Bằng cách tiếp tục phát triển các lập luận trong hai kết quả vừa nêu ở trên ta thu được:

Kết quả 3. (Courant – Fischer)

$$\alpha_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^T Ax}{x^T x} = \min_{\substack{T \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(T)=n-k+1}} \max_{x \in T} \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

Chứng minh kết quả 3.

Đầu tiên, giả sử S là một không gian vector con k -chiều bất kì và T_k là không gian vector con sinh bởi các vector $v_k, \dots, v_n$. Do $\dim S = k$ và $\dim T_k = n - k + 1$ nên phần giao của S và T_k khác rỗng.

Khi đó,

$$\min_{x \in S} \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \min_{x \in S \cap T_k} \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

Xét các vector $x \in S \cap T_k$, $x = \sum_{i=k}^n c_i v_i$.

$$\text{Khi đó, } \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{\sum_{i=k}^n \alpha_i c_i^2}{\sum_{i=k}^n c_i^2} \leq \frac{\sum_{i=k}^n \alpha_k c_i^2}{\sum_{i=k}^n c_i^2} = \alpha_k \frac{\sum_{i=k}^n c_i^2}{\sum_{i=k}^n c_i^2} = \alpha_k \text{ nên } \min_{x \in S \cap T_k} \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \alpha_k.$$

Do đó,

$$\min_{x \in S} \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \alpha_k.$$

Giả sử S_k là không gian vector con sinh bởi các vector $v_1, \dots, v_k$.

$$\text{Với mỗi vector } x \in S_k, x = \sum_{i=1}^k c_i v_i, \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i c_i^2}{\sum_{i=1}^k c_i^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_k c_i^2}{\sum_{i=1}^k c_i^2} = \alpha_k \frac{\sum_{i=1}^k c_i^2}{\sum_{i=1}^k c_i^2} = \alpha_k, \text{ nên } \frac{x^T Ax}{x^T x} = \alpha_k.$$

$$\text{Do đó, } \alpha_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^T Ax}{x^T x} \alpha_k.$$

Bằng phương pháp lập luận tương tự như trên, ta cũng chứng minh được $\alpha_k = \min_{\substack{T \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(T)=n-k+1}} \max_{x \in T} \frac{x^T Ax}{x^T x}.$

Lưu ý rằng phương pháp và kĩ thuật lập luận mà ta vừa trình bày ở trên đã được ta giới thiệu trong các bài viết “**Phương pháp trị riêng cho đánh giá chặn trên của chỉ số độc lập**” và “**Đồ thị Expand**”.

Kết quả 4.

Giả sử A là ma trận kề của một đồ thị G .

Khi đó, giá trị riêng lớn nhất của ma trận A lớn hơn hoặc bằng trung bình cộng số bậc của các đỉnh của đồ thị G .

Chứng minh kết quả 4.

Giả sử d là vector gồm bậc của các đỉnh của đồ thị G , tức là thành phần $d(i)$ chính là bậc của đỉnh i .

Bằng cách áp dụng kết quả 1), ta suy ra $\alpha_1 = \max_x \frac{x^T A x}{x^T x} \geq \frac{1^T A 1}{1^T 1} = \frac{1^T d}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(i)$, trong đó 1 là vector với tất cả các thành phần đều bằng 1.

Kết quả 5.

Giả sử A là ma trận kề của một đồ thị G và B là ma trận thu được bằng cách xóa đi hàng và cột cuối cùng khỏi ma trận A . Gọi β_1 là giá trị riêng lớn nhất của ma trận B .

Khi đó, $\alpha_1 \geq \beta_1$.

Chứng minh kết quả 5.

Giả sử y là vector riêng tương ứng với giá trị riêng β_1 của ma trận B .

Nếu ta giả sử rằng đồ thị G gồm n đỉnh thì $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, nên $y^T B y = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Do đó,

$$\beta_1 = \frac{y^T B y}{y^T y} = \frac{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}} \leq \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Từ kết quả vừa nhận ở trên ta nhận thấy rằng nếu bỏ đi đỉnh có bậc nhỏ nhất khỏi đồ thị G thì trung bình cộng bậc $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(i)$ có thể tăng nhưng giá trị riêng lớn nhất α_1 chỉ có thể giảm nên rất khó khăn để ta có thể xác lập được một mối liên hệ chặt giữa hai đại lượng này.

2. Bài toán tô màu

Một phép k - **tô màu** của đồ thị G là một hàm $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ sao cho $c(i) \neq c(j)$ với mọi $(i, j) \in E$.

Sắc số của đồ thị G , kí hiệu $\chi(G)$, là số k nhỏ nhất sao cho G có ít nhất một phép k - tô màu.

Mục đích chính của bài viết này đưa ra các đánh giá đủ tốt để ước lượng độ lớn của $\chi(G)$ dựa trên việc phân tích cấu trúc phổ của ma trận kề $A(G)$.

Kết quả 6.

$$\chi(G) \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1.$$

Chứng minh kết quả 4.

Ta sẽ chứng minh khẳng định bằng phương pháp quy nạp toán học theo số các đỉnh của đồ thị.

Nhận thấy rằng khẳng định của bài toán là hiển nhiên trong trường hợp chỉ gồm một đỉnh và không chứa bất kì cạnh nào, bởi vì sắc số của đồ thị bằng 1 và giá trị riêng lớn nhất của ma trận kề bằng 0.

Giả sử khẳng định của bài toán đúng với $n = k$, tức là tất cả các đồ thị gồm k đỉnh đều thỏa mãn hệ thức trong bài toán.

Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài toán cũng đúng với $n = k + 1$, tức là nếu G là một đồ thị gồm $k + 1$ thì tồn tại một phép $(\lfloor \alpha_1 \rfloor + 1)$ - tô màu cho đồ thị G .

Thật vậy, bằng cách áp dụng kết quả 4) ta nhận thấy rằng đồ thị G có ít nhất một đỉnh v có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $\lfloor \alpha_1 \rfloor$.

Xét đồ thị $G - \{v\}$, đồ thị thu được từ G bằng cách loại bỏ đi đỉnh v .

Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra đồ thị $G - \{v\}$ có thể được tô bởi $(\lfloor \beta_1 \rfloor + 1)$ màu, trong đó β_1 là giá trị riêng lớn nhất của ma trận kề của đồ thị $G - \{v\}$.

Từ kết quả 5 ta cũng suy ra được rằng đồ thị $G - \{v\}$ có thể được tô bởi tối đa $(\lfloor \alpha_1 \rfloor + 1)$ màu, ta tạm

giả sử $c: V(G - \{v\}) \rightarrow \{1, \dots, \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1\}$ là phép tô màu vừa nêu.

Để hoàn tất phép chứng minh cho bài toán ta cần mở rộng phép tô màu c cho cả đỉnh v .

Nhận xét rằng đỉnh v có tối đa $\lfloor \alpha_1 \rfloor$ láng giềng nên sẽ có ít nhất một màu nào đó trong đó các màu $\{1, \dots, \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1\}$ mà các đỉnh láng giềng không sử dụng và ta có thể chỉ định màu này để tô cho đỉnh v .

Do đó, đồ thị G có một phép $(\lfloor \alpha_1 \rfloor + 1)$ - tô màu.

Nhận xét rằng về mặt kĩ thuật mà nói thì phương pháp mà ta sử dụng để chứng minh đánh giá nêu trong bài toán trên hoàn toàn giống với cách chứng minh kinh điển của nhà toán học Vizing cho bất đẳng thức $\chi(G) \leq d_{\max} + 1$ với $d_{\max}$ là bậc lớn nhất của đồ thị G . Nhưng đánh giá của ta chặt hơn hẳn cách đánh giá cũ này, có thể tự kiểm tra trên các đồ thị nhỏ.

Tiếp theo, ta sẽ tiến hành đánh giá chặn dưới của sắc số. Để thực hiện được điều này ta sẽ cần đến một số khái niệm sau:

Nhắc lại rằng một tập $W \subseteq V$ được gọi là **tập độc lập** nếu với hai đỉnh bất kì thuộc W không có cạnh nối chúng với nhau. **Chỉ số độc lập** của đồ thị G , kí hiệu $\alpha(G)$, là kích thước lớn nhất có thể có của một tập độc lập của đồ thị G .

Từ khái niệm về sắc số và chỉ số độc lập ta nhận thấy rằng trong mỗi phép tô màu thực sự thì tập các đỉnh được tô bởi cùng một màu đóng vai trò của một tập độc lập nên $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Chìa khóa để đưa kĩ thuật đại số tuyến tính vào khảo sát bài toán đến từ nhận xét:

“Nếu S là một tập độc lập và χ_S là vector đặc trưng của tập S thì $\chi_S^T A \chi_S = 0$.”

Kết quả 7.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị d - đều.

Khi đó,

$$\alpha(G) \leq n \frac{-\alpha_n}{d - \alpha_n}.$$

Lưu ý rằng giá trị riêng nhỏ nhất α_n là số nhỏ hơn hoặc bằng 0, do $\text{tr}(A) = 0$, nên vế phải của đánh giá trên luôn lớn hơn hoặc bằng 0.

Chứng minh kết quả 7.

Giả sử ma trận kề $A(G)$ có các giá trị riêng $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ với các vector riêng trực giao tương ứng $v_1, \dots, v_n$.

Do $G = (V, E)$ là một đồ thị d - đều nên ta dễ dàng chứng minh được rằng $\alpha_1 = d$ và, không giảm tính tổng quát của vấn đề, ta có thể chọn $v_1 = 1/\sqrt{n}$.

Mặt khác do $v_1, \dots, v_n$ là một hệ các vector riêng trực giao lẫn nhau nên $Jv_i = \begin{cases} nv_1, & i = 1, \\ 0, & i \geq 2, \end{cases}$

trong đó J là ma trận với tất cả các phần tử đều bằng 1.

Xét ma trận $B = A - cJ$, trong đó $c = \frac{d - \alpha_n}{n}$.

Khi đó,

$$Bv_i = \begin{cases} (d - cn)v_1, & i = 1, \\ \alpha_i v_i, & i \geq 2. \end{cases}$$

Từ cách chọn hằng số c ta suy ra rằng giá trị riêng nhỏ nhất của ma trận B chính là $d - cn = \alpha_n$.

Mặt khác như đã trình bày nếu S là một tập độc lập của đồ thị G và χ_S là vector đặc trưng của nó thì $\chi_S^T A \chi_S = 0$.

Do đó, $\chi_s^T B \chi_s = \chi_s^T A \chi_s - c \chi_s^T J \chi_s = -c|S|^2$, nên $\frac{\chi_s^T B \chi_s}{\chi_s^T \chi_s} = \frac{-c|S|^2}{|S|} = -c|S|$.

Bằng cách áp dụng định lý Courant – Fischer ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}\alpha_n &\leq -c|S| = \frac{\alpha_n - d}{n}|S| \\ \Rightarrow |S| &\leq n \frac{-\alpha_n}{d - \alpha_n} \\ \Rightarrow \boxed{\alpha(G) \leq n \frac{-\alpha_n}{d - \alpha_n}}\end{aligned}$$

Lưu ý rằng từ kết quả vừa nhận được ở trên ta đưa ra một đánh giá cho chặn dưới của $\chi(G)$ cho các đồ thị d -đều như sau:

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{d - \alpha_n}{-\alpha_n} = 1 + \frac{d}{-\alpha_n} = 1 + \frac{\alpha_1}{-\alpha_n}.$$

Nhận xét rằng đánh giá vừa nêu cũng đúng cả trong trường hợp khi đồ thị G không phải là một đồ thị đều.

Kết quả 8. (Hoffman)

$$\chi(G) \geq \frac{\alpha_1 - \alpha_n}{-\alpha_n} = 1 + \frac{\alpha_1}{-\alpha_n}.$$

Trước khi trình bày phép chứng minh cho đánh giá vừa nêu ở trên ta sẽ giới thiệu một số tính chất cơ bản về phổ của các ma trận khối cần thiết cho các phép tính toán.

Để thuận tiện cho việc trình bày ta quy ước kí hiệu $\lambda_{\max}(A)$ và $\lambda_{\min}(A)$ lần lượt là giá trị riêng lớn nhất và nhỏ nhất của ma trận A .

Bổ đề 1.

Giả sử $A = \begin{bmatrix} B & C \\ C^T & D \end{bmatrix}$ là một ma trận đối xứng.

Khi đó,

$$\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A) \leq \lambda_{\max}(B) + \lambda_{\max}(D).$$

Chứng minh bổ đề 1.

Giả sử x là vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_{\max}(A)$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả sử rằng x là một vector đơn vị.

Đầu tiên ta biểu diễn lại vector x dưới dạng $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sao cho phù hợp với phân hoạch khối của ma trận A .

Đặt $y = \begin{pmatrix} \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|} x_1 \\ -\frac{\|x_1\|}{\|x_2\|} x_2 \end{pmatrix}$, ta dễ dàng kiểm tra được rằng vector y là một vector đơn vị.

Khi đó, bằng cách áp dụng định lý Courant – Fischer, ta nhận thấy rằng $y^T A y \geq \lambda_{\min}(A)$.

Bằng cách tính toán trực tiếp,

$$\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A) \leq x^T A x + y^T A y$$

$$= x_1^T B x_1 + x_1^T C x_2 + x_2^T C^T x_1 + x_2^T D x_2 + \frac{\|x_2\|^2}{\|x_1\|^2} x_1^T B x_1 - x_1^T C x_2 - x_2^T C^T x_1 + \frac{\|x_1\|^2}{\|x_2\|^2} x_2^T D x_2$$

$$\begin{aligned}
&= x_1^T B x_1 + x_2^T D x_2 + \frac{\|x_2\|^2}{\|x_1\|^2} x_1^T B x_1 + \frac{\|x_1\|^2}{\|x_2\|^2} x_2^T D x_2 \\
&= \left(1 + \frac{\|x_2\|^2}{\|x_1\|^2}\right) x_1^T B x_1 + \left(1 + \frac{\|x_1\|^2}{\|x_2\|^2}\right) x_2^T D x_2 \\
&\leq \lambda_{\max}(B) (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) + \lambda_{\max}(D) (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) \quad (\text{áp dụng kết quả 1 cho } B \text{ và } D) \\
&= \lambda_{\max}(B) + \lambda_{\max}(D) \quad (\text{do } x \text{ là vector đơn vị})
\end{aligned}$$

Bổ đề 2.

Giả sử $A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,k} \\ A_{1,2}^T & A_{2,2} & \dots & A_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,k}^T & A_{2,k}^T & \dots & A_{k,k} \end{bmatrix}$, $k \geq 2$, là một ma trận đối xứng.

Khi đó,

$$(k-1)\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{\max}(A_{i,i}).$$

Chứng minh bổ đề 2.

Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học theo k .

Với $k = 2$, khẳng định của bài toán được suy ra từ kết quả của bổ đề 1.

$$\text{Với } k > 1, B = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,k-1} \\ A_{1,2}^T & A_{2,2} & \dots & A_{2,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,k-1}^T & A_{2,k-1}^T & \dots & A_{k-1,k-1} \end{bmatrix}.$$

Bằng cách áp dụng kết quả 5), ta suy ra rằng $\lambda_{\min}(B) \geq \lambda_{\min}(A)$.

Từ bổ đề 1), ta cũng nhận thấy rằng

$$\begin{aligned}
\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A) &\leq \lambda_{\max}(B) + \lambda_{\max}(A_{k,k}) \\
&\leq -(k-2)\lambda_{\min}(B) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{\max}(A_{i,i}) + \lambda_{\max}(A_{k,k}) \quad (\text{áp dụng giả thiết quy nạp}) \\
&\leq -(k-1)\lambda_{\min}(A) + \sum_{i=1}^k \lambda_{\max}(A_{i,i}).
\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học ta suy ra khẳng định của bài toán đúng với mọi n .

Chứng minh kết quả 8.

Giả sử rằng đồ thị G có một phép k - tô màu.

Khi đó, bằng cách đánh lại số thứ tự cho các đỉnh của đồ thị G , ma trận kề của đồ thị G có dạng

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{1,2} & \dots & A_{1,k} \\ A_{1,2}^T & 0 & \dots & A_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,k}^T & A_{2,k}^T & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Do mỗi khối chéo của ma trận kề đều bằng 0, áp dụng bổ đề 2, nên ta suy ra rằng

$$(k-1)\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) \leq 0.$$

Lưu ý rằng do $\lambda_{\min}(A) = \alpha_n < 0$ và $\lambda_{\max}(A) = \alpha_1$ nên

$$1 + \frac{\alpha_1}{-\alpha_n} \leq k$$
$$\Rightarrow \boxed{\chi(G) \geq 1 + \frac{\alpha_1}{-\alpha_n}}$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Bài giảng Spectral Graph Theory của Daniel A. Spielman, 11/09/2009.
- [2]. Trương Phước Nhân, Đồ thị Expand, 13/08/2017.
- [3]. Trương Phước Nhân, Phương pháp trị riêng cho đánh giá chặn trên của chỉ số độc lập, 09/08/2017.