

Chuỗi Lagrange - Burmann

Trương Phước Nhân, 28/01/2019

Nội dung của bài viết bàn về một dạng mở rộng quan trọng của công thức nghịch đảo Lagrange (xem bài viết “**Bài toán xác định hàm ngược – Công thức nghịch đảo Lagrange**”).

Nhắc lại một số kết quả cơ bản về bài toán xác định hàm ngược:

Giả sử biến w được biểu diễn theo biến z dưới dạng $w = f(z)$ trong đó f là một hàm chỉnh hình tại điểm $z = z_0$ và $f'(z_0) \neq 0$.

Khi đó, biến z có thể biểu diễn theo biến w dưới dạng $z = g(w)$ trong đó g là được xác định bởi chuỗi lũy thừa $g(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n \right] (w - w_0)^n$.

Một cách tổng quát ta có bài toán sau:

Cho trước hai hàm chỉnh hình $f(z)$ và $\varphi(z)$ trong đó φ song chỉnh hình tại điểm $z = z_0$ ($\varphi'(z_0) \neq 0$). Tìm khai triển của hàm $f(z)$ theo hàm $\varphi(z)$.

Đầu tiên từ giả thiết về tính song chỉnh hình của hàm $\varphi(z)$, ta có

$$\frac{f'(z)\varphi'(z_0)}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} = \frac{f'(z)\varphi'(z_0)}{\varphi'(z_0)(z - z_0) + \dots} = \frac{f'(z_0)}{z - z_0} + \dots$$

Bằng cách sử dụng kết quả của lý thuyết thặng dư ta nhận được kết quả

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)\varphi'(z_0)}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} dz = f'(z_0),$$

trong đó γ là một đường cong Jordan đóng, trọn bao quanh điểm z_0 .

Mặt khác, sử dụng công thức tích phân Leibniz–Newton, ta lại có

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^z f'(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0}^z \oint_{\gamma} \frac{f'(w)\varphi'(\zeta)}{\varphi(w) - \varphi(\zeta)} dw d\zeta.$$

Bằng cách phân tích biểu thức trong dấu tích phân theo $\varphi(z) - w_0$, $w_0 = \varphi(z_0)$, như sau:

$$\begin{aligned} \frac{f'(w)\varphi'(\zeta)}{\varphi(w) - \varphi(\zeta)} &= \frac{f'(w)\varphi'(\zeta)}{\varphi(w) - w_0} \cdot \frac{\varphi(w) - w_0}{\varphi(w) - \varphi(\zeta)}, \\ \frac{\varphi(w) - w_0}{\varphi(w) - \varphi(\zeta)} &= \left(1 - \frac{\varphi(\zeta) - w_0}{\varphi(w) - w_0} \right)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi(\zeta) - w_0}{\varphi(w) - w_0} \right)^m. \end{aligned}$$

Thay kết quả vừa thu được vào công thức tích nhân

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{z_0}^z \frac{f'(w)\varphi'(\zeta)}{\varphi(w) - w_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi(\zeta) - w_0}{\varphi(w) - w_0} \right)^m d\zeta \right) dw.$$

Nhận thấy rằng khi tính toán tích phân theo ζ ta chỉ cần quan tâm đến các số hạng phụ thuộc vào ζ , nên:

$$\int_{z_0}^z \varphi'(\zeta) (\varphi(\zeta) - w_0)^m d\zeta = \int_{\varphi(z_0)}^{\varphi(z)} (\varphi(\zeta) - w_0)^m d\varphi(\zeta) = \frac{(\varphi(z) - w_0)^{m+1}}{m+1}$$

(Lưu ý rằng $\varphi(z_0) - w_0 = 0$).

Do đó,

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\varphi(z) - w_0)^{m+1}}{m+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)dw}{(\varphi(w) - w_0)^{m+1}}.$$

Bằng cách đặt $\psi(w) = \frac{w - z_0}{\varphi(w) - w_0}$, ta nhận thấy rằng

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)dw}{(\varphi(w) - w_0)^{m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)(\psi(w))^{m+1}dw}{(w - z_0)^{m+1}} = \frac{1}{m!} \cdot \frac{d^m}{dw^m} \left(f'(w)(\psi(w))^{m+1} \right) \Big|_{w=z_0}.$$

Do đó khai triển của hàm $f(z)$ theo hàm $\varphi(z)$ có dạng

$$\boxed{f(z) = f(z_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \frac{d^m}{dw^m} \left(f'(w)(\psi(w))^n \right) \Big|_{w=z_0} (\varphi(z) - \varphi(z_0))^n} (*)$$

Chuỗi (*) được gọi là chuỗi Lagrange – Burmann.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Victor V. Prasolov, Polynomials, Springer.

[2]. Trương Phước Nhân, Bài toán xác định hàm ngược – Công thức nghịch đảo Lagrange, 18/01/2019.